

Ondes gravitationnelles, aspects théoriques et expérimentaux

Damir Buskalic*

Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules
Université de Savoie, CNRS, IN2P3

Résumé

Les ondes gravitationnelles apparaissent comme une solution ondulatoire aux équations de la Relativité Générale. Prédites dès 1916 par Einstein, leur mise en évidence indirecte n'a été possible qu'à partir du début des années 1980 par l'étude du pulsar binaire PSR 1913+16. La détection directe des ondes gravitationnelles devrait être possible avec les détecteurs interférométriques Virgo (Europe) et LIGO (Etats Unis). Après une description théorique succincte et un historique de la recherche des ondes gravitationnelles, nous détaillerons les techniques utilisées dans les détecteurs interférométriques, ainsi que quelques méthodes d'analyse. Un tableau de perspectives sera brossé dans le cours.

Abstract

The gravitational waves appeared as wave solutions of the Einstein-Hilbert equations of General Relativity. They were predicted by Einstein in 1916 and experimental indirect evidence of their existence was only possible in the eighties by the study of the binary pulsar PSR1913+16. The direct detection of gravitational waves should be possible by the interferometric detectors that are running in Europe (Virgo) and in the United States (LIGO). After a short theoretical description and giving the historical background to the search for gravitational waves, we will detail the techniques used in interferometric detectors, as well as some foundations for data analysis. We will also give some perspectives.

* Adresse : LAPP, Université de Savoie, CNRS, Chemin de Bellevue, B.P. 110, F-74941 Annecy-le-Vieux Cedex, FRANCE, méil : buskalic@lapp.in2p3.fr

Table des matières

1	Généralités et aspects théoriques	18
1.1	Les ondes gravitationnelles	18
1.1.1	Relativité Générale linéarisée	18
1.1.2	Manifestation des ondes gravitationnelles par leur effet sur la matière	22
1.2	Sources	22
1.2.1	Emission des ondes gravitationnelles	22
1.2.2	Exemple de génération : système binaire	23
1.2.3	Catalogue de sources	27
1.3	Buts scientifiques	29
2	Détection par interférométrie optique	29
2.1	Historique	29
2.2	Principe de détection pour les détecteurs interférométriques	31
2.2.1	Idée de base	31
2.2.2	Réponse angulaire	33
2.2.3	C'est le bruit qui fait le détecteur	34
2.2.4	Amélioration de la sensibilité, autres sources de bruit	39
2.2.5	Evolution de la sensibilité du détecteur jusqu'à la fin 2009	43
2.3	Réseau de détection mondial	44
2.4	Détecteurs du futur	44
2.4.1	Evolution des détecteurs existants	44
2.4.2	Les détecteurs de la décennie 2020	45
3	Analyse de données	46
3.1	Outils de base et généralités	46
3.1.1	Outils de base	46
3.1.2	Catégories d'analyse	55
3.1.3	Mesure de la performance du détecteur	55
3.2	Recherche de coalescences de binaires	56
3.2.1	Taux d'événements attendus	56
3.2.2	Principe de la recherche	57
3.3	Analyse des événements	60
3.3.1	Définition d'un événement	60
3.3.2	Bruit de fond non gaussien	61
3.3.3	Nettoyage de la distribution d'événements	62
3.3.4	Analyse statistique	65
3.3.5	Décision sur le signal ou sur les limites	68
3.3.6	Autres techniques	69
3.4	Autres activités d'analyse	69
3.4.1	Autres recherches de coalescences de binaires	69
3.4.2	Evenements impulsifs	69
3.4.3	Signaux continus	70
3.4.4	Déclenchements externes	71

Introduction

1 Généralités et aspects théoriques

Le chapitre théorique que vous lisez représente un résumé. Il suppose une connaissance de la relativité générale à un niveau pré-doctoral. Une introduction claire (à notre avis) à la relativité générale et des calculs complets peuvent être trouvés par exemple dans [1].

1.1 Les ondes gravitationnelles

S'intéressant aux conséquences de la relativité générale, Einstein mit en évidence dès 1916 la possibilité d'une solution ondulatoire à ses équations dans l'approximation de champs faibles. Cette solution représente physiquement une perturbation de la métrique se propageant dans un espace quasiment plat et vide, c'est à dire sans sources de champ gravitationnel.

1.1.1 Relativité Générale linéarisée

Linéarisation des équations Les équations de la relativité générale (équations d'Einstein) sont des équations non linéaires. Elles peuvent s'écrire

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, contracté du tenseur de Riemann et décrivant la courbure de l'espace-temps, R le scalaire de courbure, contracté du tenseur de Ricci, $g_{\mu\nu}$ le tenseur métrique et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion représentant le contenu en énergie-impulsion présent dans l'espace-temps (terme source).

Il est naturel de considérer les conditions et approximations dans lesquelles ces équations apparaîtraient comme linéaires. Ce sont les conditions dites de champ faible, où la courbure est peu différente de celle d'un espace plat de Minkowski. Dans ces conditions, on peut écrire la métrique comme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique d'un espace plat (de Minkowski) :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $h_{\mu\nu} \ll 1$ est la perturbation à cette métrique.

Si on se place dans ces conditions, il est possible de linéariser les équations d'Einstein, c'est à dire de les réécrire en ne considérant que les termes du premier ordre, linéaires. Pour ce faire,

- on linéarise les connexions affines en
 - remplaçant $g_{\mu\nu}$ par $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
 - ne tenant pas compte des termes d'ordre supérieur en $h_{\mu\nu}$

– on linéarise le tenseur de Riemann
On obtient alors l'équation équivalente

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho = -2 \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

où l'on a défini la trace inverse $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$.

L'expression de cette équation peut se simplifier en se mettant dans une jauge particulière, c'est à dire en choisissant un système de coordonnées particulier. Ici, ce sera la jauge dite harmonique. Le fait d'imposer des conditions de jauge revient à utiliser l'invariance du tenseur de Riemann linéarisé (donc de la courbure intrinsèque, donc de l'espace-temps physique) sous des transformations de coordonnées infinitésimales.

Lors d'une transformation de coordonnées infinitésimale

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

$h_{\mu\nu}$ se transforme comme

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (1.4)$$

Et si l'on impose des conditions de jauge, en choisissant les $\xi_\mu(x)$ telles que

$$\partial_\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.5)$$

les équations de champ deviennent beaucoup plus simples :

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -2 \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

Ondes gravitationnelles dans le vide Si on se place loin de toute matière-énergie, dans le vide ($T_{\mu\nu} = 0$), les équations d'Einstein se réduisent simplement à :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} h_{\mu\nu} = 0 \quad (1.7)$$

où l'on a choisi la constante $c = 1$. On reconnaît des équations de propagation, admettant des solutions ondulatoires de la forme

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re}\{A_{\mu\nu} \exp(ik_\rho x^\rho)\} \quad (1.8)$$

où $\text{Re}(\dots)$ indique la partie réelle. L'amplitude $A_{\mu\nu}$ et le vecteur d'onde k_ρ doivent vérifier les équations de propagation (1.7), ce qui donne la condition [1]

$$k_\rho k^\rho = 0 \quad (1.9)$$

qui peut aussi s'écrire, en développant l'expression de k_ρ

$$\omega^2 = c^2 |k|^2$$

équation de dispersion qui indique que l'onde se propage avec la célérité de la lumière c .

L'amplitude et le vecteur d'onde doivent satisfaire également les conditions de jauge $\partial_\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ imposées plus haut. Ceci donne

$$k_\rho A^{\rho\sigma} = 0 \quad (1.10)$$

Cette condition réduit le nombre d'éléments indépendants de l'amplitude $A_{\mu\nu}$ de 10 (matrice 4×4 symétrique) à 6. Il est encore possible de simplifier la forme de l'amplitude en choisissant une jauge harmonique particulière telle que

$$A_{0\sigma} = 0 \quad (1.11)$$

ce qui donne encore 4 contraintes et réduit le nombre d'éléments indépendants à 2. Cette jauge particulière s'appelle Transverse et sans Trace (TT). L'amplitude s'y écrit :

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

En choisissant $A_{11} = 1$ et $A_{12} = 0$ (polarisation dite "+") ou bien $A_{11} = 0$ et $A_{12} = 1$ (polarisation dite "×"), on obtient deux polarisations rectilignes sur lesquelles on peut décomposer la solution générale de l'équation de propagation. Si l'on choisit $A_{11} = 1$ et $A_{12} = \pm i$, on obtient deux polarisations circulaires.

Energie transportée par une onde gravitationnelle On peut se poser la question de l'énergie transportée par une onde gravitationnelle. Cette question a fait couler beaucoup d'encre à une certaine époque. En effet, supposons une masse dans un espace de Minkowski, vide de toute matière et qui subit le passage d'une onde gravitationnelle. Il est toujours possible de choisir un système de coordonnées tel que cette masse soit en chute libre. Dans ce système, la masse ne verrait aucun effet de l'onde gravitationnelle. Et celle-ci ne pourrait transférer aucune énergie à la masse test.

En réalité, on ne peut pas définir une densité d'énergie (associée à l'onde gravitationnelle) **qui soit locale**.

Par ailleurs, il est clair expérimentalement que le système binaire appelé PSR1913+16 perd de l'énergie (voir plus loin), et que cette perte peut très précisément être expliquée par une émission d'ondes gravitationnelles.

Si on essaye tout de même (naïvement) d'ajouter un terme d'énergie-impulsion du champ gravitationnel, noté $t_{\mu\nu}$, à l'équation d'Einstein linéarisée, on obtient

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \quad (1.13)$$

où $G_{\mu\nu}^{(1)}$ est le développement à l'ordre 1 (linéaire) de $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = G_{\mu\nu}$, et où ce développement s'écrit :

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (1.14)$$

Ceci suggère l'identification

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)}$$

mais nous avons vu que ce n'était pas suffisant pour expliquer l'énergie transportée par l'onde. Par contre, si on moyenne sur une petite région de l'espace-temps

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$$

on montre [1] que cette quantité est invariante de jauge (indépendante du système de référence). C'est elle qu'on utilise pour définir le tenseur énergie-impulsion de l'onde gravitationnelle. En bref, la simple identification entre $t_{\mu\nu}$ et $G_{\mu\nu}^{(2)}$ ne suffit pas parce que la masse test en chute libre ne ressent pas de transfert d'énergie. En moyennant, cette masse test "ressent" le champ sur une ou plusieurs longueurs d'onde, ou au moins sur une partie de la variation du champ.

Distance propre entre deux masses test Pour comprendre l'effet d'une onde gravitationnelle sur la matière, puisqu'une seule masse test ne "ressent" rien, on en prend deux, séparées d'une distance propre L (figure 1).

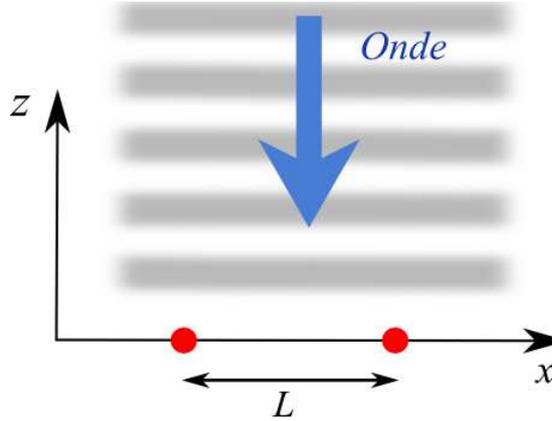


FIG. 1 – Effet d'une onde gravitationnelle polarisée rectilignement sur deux masses test séparées initialement d'une distance L .

On peut calculer la longueur propre au passage de l'onde, en supposant que les masses sont séparées de Δx :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\Delta x} dx \sqrt{g_{xx}} = \int_0^{\Delta x} dx \sqrt{1 + h_{xx}^{TT}(t, z = 0)} \\ &\approx \int_0^{\Delta x} dx \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t, z = 0) \right] = \Delta x \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t, z = 0) \right] \end{aligned}$$

l'amplitude de l'onde h est alors interprétée comme la variation relative de distance propre entre les deux masses test.

1.1.2 Manifestation des ondes gravitationnelles par leur effet sur la matière

On ne peut pas définir l'effet des ondes gravitationnelles sur une seule particule test, celle-ci suivrait simplement une géodésique et cela ne nous informerait que sur les valeurs des coordonnées le long de sa ligne d'univers. Par contre, si l'on considère le mouvement relatif de plusieurs particules voisines, on peut avoir une vue complète de l'effet des ondes gravitationnelles sur la matière. Considérons donc un ensemble de particules test libres réparties sur un cercle en l'absence d'onde. Leur mouvement est décrit sur la figure 2 pour une polarisation rectiligne de l'onde gravitationnelle et sur la figure 3 pour une polarisation circulaire. On se reportera à [2], [3] ou [1] pour le calcul complet de l'effet.

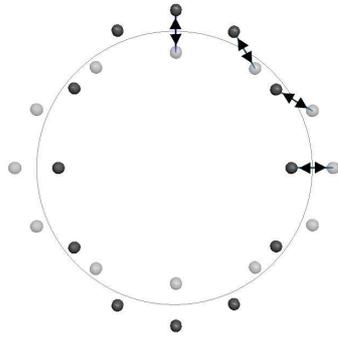


FIG. 2 – Effet d'une onde gravitationnelle polarisée rectilignement sur un ensemble de masses test disposées en cercle. Chaque masse a un mouvement harmonique simple par rapport à ses voisines.

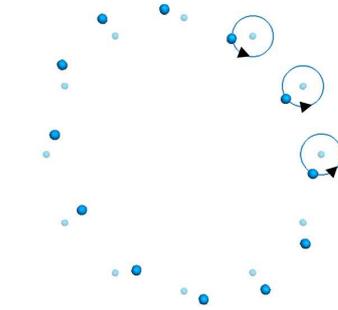


FIG. 3 – Effet d'une onde gravitationnelle polarisée circulairement sur un ensemble de masses test disposées en cercle. Chaque masse a un mouvement circulaire centré sur sa position initiale (position en l'absence d'O.G.).

1.2 Sources

1.2.1 Emission des ondes gravitationnelles

Pour étudier l'émission des ondes gravitationnelles par des distributions de masse en mouvement, il nous faut considérer les équations d'Einstein complètes, c'est à dire avec un second membre contenant le tenseur énergie-impulsion :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

On peut, comme en électromagnétisme, utiliser les fonctions de Green (solutions de l'équation d'onde en présence d'une source ponctuelle représentée par un pic de Dirac) pour obtenir une solution sous forme de potentiel retardé :

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int_{source} d\mathbf{x}' \frac{T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (1.16)$$

où l'on note $T_{\mu\nu}$ l'ensemble des termes d'énergie-impulsion des équations d'Einstein. On fait l'approximation que la source est isolée, compacte (de dimension caractéristique R), distante de l'observateur (donc $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \gg R$) et se déplaçant lentement (vitesse v de ses constituants les uns par rapport aux autres $\ll c$). On montre alors que l'onde produite s'écrit en fonction du tenseur moment quadripolaire de la source comme

$$\bar{h}_{ij}(t) = \frac{2G}{Rc^4} \frac{d^2 I_{ij} \left(t - \frac{R}{c} \right)}{dt^2} \quad (1.17)$$

le tenseur moment quadripolaire s'écrivant

$$I_{ij}(t) = \int_{source} d\mathbf{x} x_i x_j T_{00}(t, \mathbf{x}) \quad (1.18)$$

où T_{00} n'est rien d'autre que la densité d'énergie de la source. Contrairement au cas de l'électromagnétisme où un rayonnement dipolaire peut exister à la suite de la variation d'une densité de charge, ceci n'est pas possible en gravitation. En effet, l'équivalent d'un rayonnement dipolaire serait un mouvement oscillant du centre de densité d'une distribution isolée d'énergie, ce qui violerait le principe de conservation de la quantité de mouvement. Le rayonnement gravitationnel ne peut être que quadripolaire au mieux. L'amplitude d'un rayonnement quadripolaire est généralement beaucoup plus faible que celle d'un rayonnement dipolaire et ceci, ainsi que le couplage faible de la matière à la gravité, explique que l'amplitude d'un rayonnement gravitationnel est typiquement beaucoup plus faible qu'un rayonnement électromagnétique. Le facteur G/c^4 est de l'ordre de $10^{-44} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, les seules ondes gravitationnelles que l'on peut espérer détecter sont celles provenant de sources astrophysiques.

1.2.2 Exemple de génération : système binaire

Regardons plus précisément le cas simple d'un système de deux objets compacts en orbite l'un autour de l'autre. Comme indiqué sur la figure 4, on notera m_1 et m_2 les masses, a la distance entre les deux corps, $M = m_1 + m_2$ la masse totale et $\mu = m_1 m_2 / M$ la masse réduite.

On se placera dans le cas d'orbites circulaires et dans l'approximation newtonienne. On notera $x_1(t) = a \cos \omega t$, $x_2(t) = a \sin \omega t$, $x_3(t) = 0$ les coordonnées relatives. La troisième loi de Képler donne la pulsation correspondant à la fréquence de rotation :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (1.19)$$

On peut alors calculer h_+ et h_\times , les amplitudes des deux modes de l'onde émise, vues par un observateur situé à une distance $R \gg a$ du système, dans la direction déterminée par l'angle θ . On obtient :

$$h_+(t) = \frac{4G\mu a^2 \omega^2}{Rc^4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cos 2\omega t \quad (1.20)$$

$$h_\times(t) = \frac{4G\mu a^2 \omega^2}{Rc^4} \cos \theta \sin 2\omega t \quad (1.21)$$

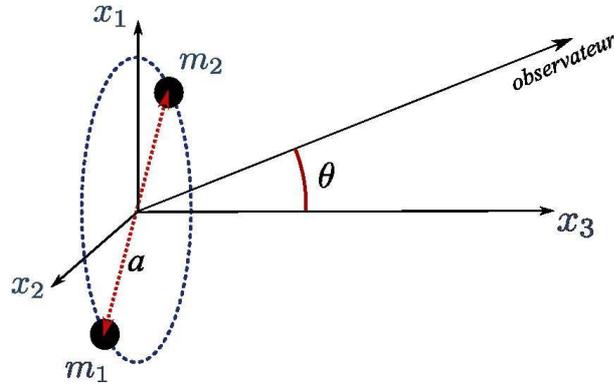


FIG. 4 – Système binaire de deux corps compacts en orbite circulaire l'un autour de l'autre.

Si l'on regarde deux cas particuliers, illustrés sur la figure 5-a, d'un observateur A (correspondant à $\cos \theta = 1$) et d'un observateur B (correspondant à $\cos \theta = 0$), on constate la cohérence de l'observation avec l'intuition. L'observateur A "voit" le système perpendiculairement au plan de rotation (figure 5-b) et mesure une polarisation circulaire, c'est à dire une combinaison des deux polarisations rectilignes. L'observateur B voit une polarisation rectiligne car il observe le système dans le plan de rotation (figure 5-c).

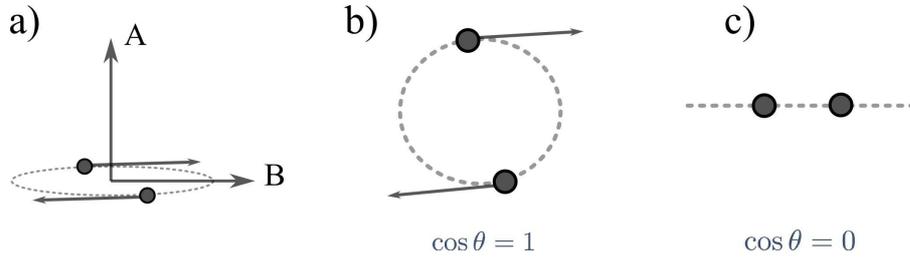


FIG. 5 – Deux observateurs situés dans les directions particulières A ($\cos \theta = 1$) et B ($\cos \theta = 0$) voient soit les deux polarisations rectilignes (A) soit une seule (B).

La puissance rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles par unité d'angle solide est donnée par

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{2G\mu^2 a^4 \omega^6}{\pi c^5} \frac{1}{4} (1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) \quad (1.22)$$

On note $\mathcal{P}(\theta) = \frac{1}{4}(1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta)$. On observe qu'il y a une évidente symétrie axiale et que cette puissance est non nulle quelque soit la direction d'émission θ . Elle est maximale pour l'observateur A, avec $\mathcal{P}(0) = 2$ et minimale pour l'observateur B, avec $\mathcal{P}(\pi/2) = 0,25$.

La puissance totale rayonnée est obtenue en intégrant sur les angles :

$$P = \frac{32G\mu^2 a^4 \omega^6}{5c^5} \quad (1.23)$$

On peut donner quelques exemples et ordres de grandeur :

- Système Soleil-Jupiter. On a les données : masse de Jupiter $m_J = 1.9 \times 10^{27}$ kg, rayon de l'orbite $a = 7.8 \times 10^{11}$ m, pulsation $\omega = 1.68 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$. Ceci nous donne une puissance rayonnée

$$P = 5 \times 10^3 \text{ J/s}$$

à comparer à la puissance lumineuse émise par le soleil $L_\odot \sim 3.8 \times 10^{26}$ J/s.

- Le pulsar binaire PSR1913+16 de Hulse et Taylor, dont nous reparlerons, émet une puissance

$$P = 7.24 \times 10^{24} \text{ J/s}$$

L'énergie rayonnée est prise à l'énergie gravitationnelle du système, ce qui va influencer son évolution. Puisque l'énergie gravitationnelle décroît et est négative, le rayon des orbites diminue et la fréquence des ondes gravitationnelles augmente. On peut écrire une équation de conservation de l'énergie, avec E l'énergie totale du système

$$\frac{dE}{dt} = -P$$

Puisque depuis le début de cette analyse, nous nous sommes placés dans le cas newtonien, on peut écrire

$$E = -G \frac{m_1 m_2}{2a}, \quad \omega^2 = \frac{GM}{a^3} \quad (1.24)$$

d'où l'on peut tirer une équation d'évolution du diamètre des orbites :

$$\dot{a} = -\frac{2}{3}(a\omega) \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} \right)$$

\dot{a} est la vitesse radiale, $a\omega$ la vitesse tangentielle et on nomme "facteur adiabatique" le rapport $\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$. Pour pouvoir calculer la forme de l'onde observée, il nous faut calculer l'évolution de la fréquence de l'onde gravitationnelle. On part des expressions (1.24) ci-dessus pour écrire le lien entre la dérivée temporelle de E et la pulsation ω :

$$\dot{E} = G^{2/3} \frac{m_1 m_2}{2M^{1/3}} \frac{2}{3} \dot{\omega} \omega^{-1/3}$$

et la conservation de l'énergie nous donne

$$\dot{E} = -P \quad \Rightarrow \quad G^{2/3} \frac{m_1 m_2}{2M^{1/3}} \frac{2}{3} \dot{\omega} \omega^{-1/3} = \frac{32G\mu^2 a^4 \omega^6}{5c^5}$$

Il reste à remplacer a par son expression en fonction de ω pour obtenir le facteur adiabatique :

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{96}{5} \frac{G^{5/3}}{c^5} \frac{\mu}{M} (M\omega)^{5/3}$$

En ce qui concerne la fréquence de l'onde gravitationnelle émise, il y a une symétrie dans le système qui fait que la fréquence de l'onde f_{OG} est le double de la fréquence de rotation $\omega/(2\pi)$, ce que l'on peut voir sur les expressions de $h_+(t)$ (1.20) et $h_\times(t)$ (1.21). On peut donc écrire une équation d'évolution de la fréquence de l'onde émise :

$$\dot{f}_{OG} = \frac{96}{5} \frac{G^{5/3}}{c^5} \pi^{8/3} \mathcal{M}^{5/3} f_{OG}^{11/3} \quad (1.25)$$

où l'on a défini la "chirp mass" (masse de "gazouillis", puisqu'un "chirp" est un gazouillis en anglais ?)

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5} \quad (1.26)$$

Le calcul complet incluant l'amplitude de l'onde est représenté en fonction du temps d'arrivée sur le détecteur sur la figure 6. L'amplitude varie, à un facteur près, comme $f^{-7/6}$ lorsqu'on la

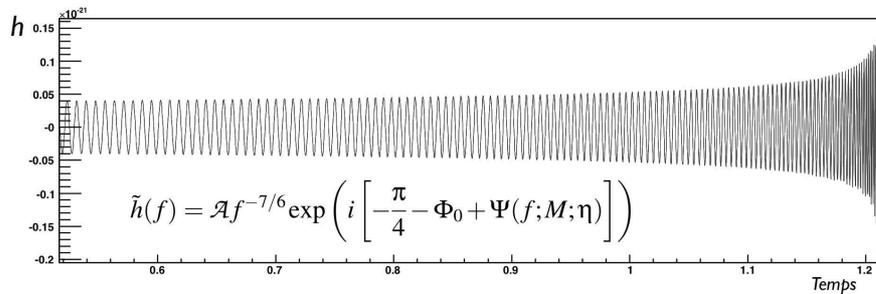


FIG. 6 – Forme d'onde due à la chute (phase spiralante) de deux corps compacts l'un sur l'autre, telle qu'elle devrait être observée dans un détecteur idéal.

calcule en supposant une évolution quasi-stationnaire (adiabatique) du système et en restant dans une approximation newtonienne.

Un calcul relativiste complet ne peut pas être conduit directement à cause de la nature non linéaire des équations d'Einstein. Par contre, on peut calculer des corrections appelées "post-newtoniennes". On réalise alors un développement dans la variable $\epsilon = v^2/c^2$ autour de la limite newtonienne, où v est la vitesse relative des deux étoiles, sans dimension ($v = (M\omega)^{1/3}$).

Si l'on considère par exemple le développement de la phase orbitale en puissances de la vitesse

$$\phi(t) = \phi_{ref} + \phi_N \sum_{k=0}^n \phi_{\frac{k}{2}PN} v^k \quad (1.27)$$

où $\phi_{\frac{k}{2}}$ sont les coefficients successifs, ceux-ci ont des expressions de plus en plus compliquées, on tient compte des effets d'ordre supérieur, par exemple l'interaction spin-spin entre les deux corps ou l'interaction spin-orbite. Nous ne détaillerons pas ces calculs.

En 1974, Russell Hulse et Joseph Taylor (Université de Princeton) ont découvert un pulsar, dénommé PSR B1913+16, qu'ils ont rapidement identifié comme faisant partie d'un

système double, le compagnon étant une étoile à neutrons. On avait donc un système de deux corps compacts (étoiles à neutrons) orbitant l'un autour de l'autre et qui devrait émettre des ondes gravitationnelles, engendrant une diminution de la période orbitale du système. Les calculs que nous venons de décrire ont permis de vérifier expérimentalement le bon accord entre la diminution de la période prédite par la relativité générale et la mesure, illustré sur la figure 7. Hulse et Taylor ont reçu le prix Nobel en 1993 pour cette découverte.

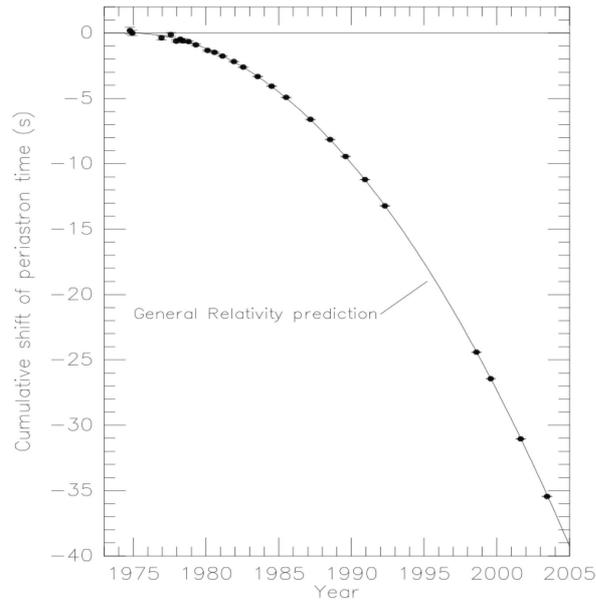


FIG. 7 – Décroissance de la période orbitale du système binaire PSR B1913+16. Les points montrent le décalage de l'instant correspondant au périastre en fonction de l'année. La courbe montre la prédiction de la relativité générale pour un système identique émettant des ondes gravitationnelles [4].

1.2.3 Catalogue de sources

Sans être exhaustif, faisons un tour d'horizon des sources d'ondes gravitationnelles habituellement considérées.

Sources impulsives Sont considérées comme sources impulsives toutes les sources qui émettent des ondes gravitationnelles de durée limitée à quelques dizaines de secondes.

Supernovae Par exemple les supernovae de type II, correspondant à l'effondrement d'une étoile massive sur elle-même pour former une étoile à neutrons ou un trou noir, sont des émetteurs impulsifs potentiels. Si les mouvements de masse de l'étoile (implosion puis éjection de matière) sont asymétriques, il y a production d'ondes gravitationnelles. L'estimation de leur amplitude n'est pas aisée, les modélisations effectuées donnent un ordre de

grandeur de 10^{-21} à 10^{-24} pour une source située à 15 Mpc, c'est à dire dans l'amas de la Vierge. Ces sources ont un spectre s'étendant jusqu'au kHz et des durées pouvant être aussi brèves que quelques millisecondes.

Coalescences de systèmes binaires Un type de source que l'on considère habituellement est la coalescence de deux objets compacts tels des trous noirs ou des étoiles à neutrons. Lorsque deux de ces objets tournant l'un autour de l'autre forment un système binaire, celui-ci est hautement asymétrique. Les ondes gravitationnelles émises entraînent une perte d'énergie de rotation du système, donc une diminution de la distance entre les corps et une augmentation de la vitesse de rotation. Cette phase spiralante se termine par une phase de coalescence (mélange) des deux objets pour n'en former plus qu'un. C'est lors des dernières secondes de la phase spiralante que la fréquence des ondes gravitationnelles émises entre dans la bande passante d'un détecteur interférométrique terrestre. Une amplitude typique du signal prédit est $h \sim 10^{-23}$ à 10^{-22} pour une source de $2 \times 1.4 M_{\odot}$ située à 10 Mpc. Comme nous le verrons plus précisément dans le chapitre 3, la détection de ce type de signal tient compte de sa forme et de sa variation en fréquence par l'utilisation de techniques de filtrage optimal.

Sources périodiques Les sources périodiques sont des sources émettant un rayonnement gravitationnel périodique permanent. Ce sont principalement des étoiles à neutrons dont l'axe de rotation n'est pas confondu avec l'axe de symétrie et où l'on a un mouvement de précession. Le calcul de l'onde émise peut se faire dans un cas simple d'un ellipsoïde aplati. Si on note I_{zz} le moment d'inertie selon l'axe de rotation, I_{xx} et I_{yy} les moments d'inertie selon les deux axes perpendiculaires et

$$\epsilon = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}$$

l'ellipticité dans le plan équatorial, on obtient l'expression de l'amplitude de l'onde gravitationnelle sur le détecteur :

$$h_0 = \frac{4\pi^2 G}{c^4} \frac{I_{zz} \epsilon f_{gw}^2}{d} \quad (1.28)$$

où d est la distance pulsar-observateur et f_{gw} la fréquence de l'onde gravitationnelle émise. Cette amplitude est très faible, de l'ordre de 10^{-25} à 10^{-26} à quelques kiloparsecs. Si on tient compte d'un facteur d'asymétrie ϵ de l'étoile (très mal connu, on l'estime être de l'ordre de $\epsilon \sim 10^{-5}$ à 10^{-12}), on peut obtenir une estimation un peu plus précise [5] :

$$h \sim 7.10^{-20} \epsilon \left(\frac{10 \text{ kpc}}{R} \right) \left(\frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \quad (1.29)$$

où R est la distance à la source et f la fréquence de rotation de l'étoile. On peut néanmoins utiliser le caractère permanent du signal pour, en l'intégrant sur plusieurs mois voire plusieurs années, espérer une détection. Cette intégration est compliquée par le fait qu'il faille tenir compte de la modulation (effet Doppler) engendrée par le mouvement du détecteur lié à la Terre et autour du soleil.

Sources moins classiques On se doit de citer des sources d'ondes gravitationnelles moins classiques, sans entrer dans le détail.

Fond stochastique Il doit exister un fond stochastique (i.e. qui a une évolution temporelle que l'on ne peut pas prédire) d'ondes gravitationnelles, dans lequel nous baignerions et qui serait de deux origines. La première est la superposition de l'ensemble des sources très faibles que nous ne pourrions pas séparer individuellement (par exemple les systèmes binaires de naines blanches). La seconde est la génération d'ondes gravitationnelles dans l'univers primordial, ondes qui nous parviendraient aujourd'hui sous la forme d'un fond, similaire au rayonnement de fond diffus cosmologique dans le domaine électromagnétique. La différence avec ce dernier est que le découplage des ondes gravitationnelles s'est fait beaucoup plus tôt dans l'histoire de l'univers que pour les photons. On peut espérer que la découverte de ces ondes primordiales permettrait de "sonder" l'univers plus loin que l'époque du découplage électromagnétique. Encore faut-il détecter ce fond stochastique...

EMRI L'existence des trous noirs super-massifs au centre des galaxies semble maintenant établie. On peut donc imaginer que certains objets compacts (étoiles à neutrons ou petits trous noirs) puissent tomber dans son puits d'attraction gravitationnelle. Ce faisant, ces objets devraient émettre des ondes gravitationnelles et sonder la structure de l'espace-temps autour du trou noir super-massif. On appelle ces phénomènes des EMRI pour "Extreme Mass Ratio Inspirals".

Sources exotiques On pourrait encore citer certaines sources spéculatives comme les cordes cosmiques, mais le plus intéressant n'est-il pas ce que nous ne prévoyons pas ?

1.3 Buts scientifiques

Le tableau 1 essaye de synthétiser les buts scientifiques assignés aux détecteurs en fonctionnement, en construction ou en projet. La colonne détecteurs indique simplement si le sujet est plus adapté aux détecteurs terrestres, dans l'espace, ou aux deux.

Plusieurs de ces buts exigent que l'on mette en commun les données de plusieurs détecteurs (par exemple pour déterminer la direction de l'onde). Nous sommes donc obligés de construire un observatoire mondial d'ondes gravitationnelles. Ceci a commencé par les analyses en commun réalisées par les détecteurs, notamment Virgo et LIGO.

2 Détection par interférométrie optique

2.1 Historique

La première idée qui vint à l'esprit des chercheurs pour réaliser une détection d'ondes gravitationnelles fut d'utiliser la résonance d'une barre ou d'une sphère métallique. Le passage d'une onde devrait exciter certains modes propres de la barre (????). Le premier détecteur fut construit par Joseph Weber à l'Université du Maryland en 1966. Weber déclarera même avoir détecté des ondes provenant du centre de la galaxie (1968-1969) mais d'autres expériences n'ont rien observé et ont déconsidéré son assertion.

Plusieurs détecteurs résonnants ont été construits depuis les années 1970 mais ceux qui sont encore en fonctionnement s'arrêtent petit à petit. A cause du caractère résonnant du

But, sujet	Type de détecteur
Confirmation de la présence d'O.G.	terrestre et spatial
Etude des propriétés, test de la RG – célérité vraiment celle de la lumière ? – onde vraiment quadripolaire ?	terrestre et spatial
Mesure de la constante de Hubble – si la direction est connue, les coalescences de binaires sont des chandelles standard	terrestre et spatial
Etude des caractéristiques – des étoiles à neutrons – des trous noirs de masse stellaire – ellipticité, modes de vibration, moments d'ordre supérieur	terrestre
Etude des trous noirs super-massifs – cartographie de l'espace-temps autour d'un trou noir super-massif de Kerr – étude de leur distribution, de l'évolution galactique	spatial
Etude du bruit de fond stochastique d'ondes gravitationnelles – premiers moments de l'univers ?	terrestre ? spatial ?
Surprises ? ? ? ?....	terrestre ? spatial ?

TAB. 1 – Buts scientifiques principaux poursuivis dans les expériences de détection d'ondes gravitationnelles

principe de détection, la bande de fréquence autour de laquelle ces détecteurs sont sensibles était de $\Delta f = 50 - 200$ Hz. La fréquence centrale était aux alentours de 700 à 1000 Hz. Leur sensibilité maximale a été de l'ordre de $h \sim 10^{-19}$ à 10^{-21} .

La deuxième idée, que nous allons développer, est de mesurer le temps de parcours de photons entre deux masses test. L'idée d'utiliser un interféromètre de Michelson pour ce faire a été publiée la première fois par Gertsenshtein et Pustovoit en 1962 [6]. Le premier interféromètre destiné à la détection d'ondes gravitationnelles a été construit par R.L. Forward et al en 1971 [7]. Les fondations techniques des interféromètres actuels ont été posées par Rainer Weiss en 1972 [8].

2.2 Principe de détection pour les détecteurs interférométriques

2.2.1 Idée de base

Nous avons montré l'effet d'une onde gravitationnelle sur un ensemble de masses test disposées en cercle (figure 2). Supposons maintenant que deux des masses test soient remplacées par les miroirs de bout de bras d'un interféromètre de Michelson (figure 8).

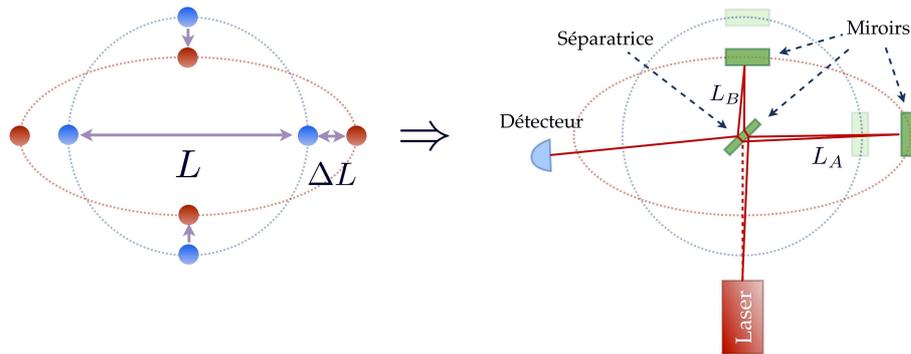


FIG. 8 – Principe de la détection interférométrique. Deux des masses test de l'expérience de pensée de la figure 2 sont remplacées par des miroirs, formant un interféromètre avec une séparatrice au centre.

Le passage d'une onde gravitationnelle va modifier les distances séparatrice-miroirs et on mesurera la différence de chemin optique entre les deux bras. Pour que cela fonctionne, les éléments de l'interféromètre (miroirs, systèmes d'injection et de détection) sont suspendus, nous verrons comment, et se comportent comme des masses en chute libre dans le plan de l'interféromètre, du moins pour les fréquences $f \gg f_{pend}$, la fréquence de résonance des pendules.

Pour mieux comprendre le principe de détection, évaluons le temps d'aller-retour des photons dans un bras. Dans le cas général, on peut écrire l'élément de longueur invariant pour un photon dans un champ :

$$ds^2 = 0 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Pour simplifier le calcul, considérons le cas particulier d'une onde se propageant selon z (perpendiculairement au plan des bras), de polarisation "+". On a alors

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + (1 + h_+(t))dx^2 + (1 - h_+(t))dy^2 + dz^2$$

On évalue le temps de parcours des photons en intégrant sur le chemin, par exemple pour le bras selon "x" :

$$\frac{1}{c} \int_0^L dx = \int_0^{\tau_{aller}} \frac{1}{\sqrt{1 + h_+(t)}} dt \approx \int_0^{\tau_{aller}} \left(1 - \frac{1}{2} h_+(t)\right) dt$$

On doit maintenant tenir compte de

- l'aller-retour dans un bras
- la longueur d'onde de l'onde gravitationnelle, que nous supposons très supérieure à la longueur du bras. Ainsi, on pourra considérer que sur le parcours du photon, l'amplitude $h_+(t)$ est indépendante de la position le long du bras
- la période de l'onde gravitationnelle, qui doit être très inférieure au temps d'aller-retour de la lumière dans un bras. Ainsi, on pourra considérer que $h_+(t) = cte = h_+$.

On peut alors intégrer sur le bras selon "x" de deux manières :

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_{arx}} \left(1 - \frac{1}{2} h_+(t)\right) dt &\approx \frac{1}{c} \left(\int_0^L dx - \int_L^0 dx \right) = \frac{2L_x}{c} \\ &= \tau_{arx} - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{arx}} h_+(t) dt = \tau_{arx} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2L_x}{c}} h_+(t) dt \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer le temps d'aller-retour

$$\Rightarrow \tau_{arx} = \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2L_x}{c}} h_+(t) dt$$

On peut faire le même calcul pour le bras selon "y" :

$$\Rightarrow \tau_{ary} = \frac{2L_y}{c} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2L_y}{c}} h_+(t) dt$$

Et ce qui nous intéresse est la différence de temps, où l'on tient compte de la constance de h et où l'on suppose que $L_x = L_y = L$:

$$\delta\tau_{ar} = \frac{1}{2} h_+ \left(\frac{2L_x}{c} + \frac{2L_y}{c} \right) = h_+ \frac{2L}{c}$$

Cette différence de temps peut être plus petite que la période de l'onde lumineuse du laser. Le dispositif interférométrique est en réalité sensible au déphasage entre les deux ondes. On considère donc plutôt la différence de phase accumulée sur le trajet des photons :

$$\delta\phi = \omega_{laser} \delta\tau_{ar} = \frac{4\pi}{\lambda_{laser}} L h_+$$

Il est intéressant de remarquer que cette différence de phase est proportionnelle à h et L . On cherchera donc à réaliser des dispositifs avec la plus grande longueur possible de bras, laissant le temps à la lumière de “sentir” l’onde gravitationnelle.

2.2.2 Réponse angulaire

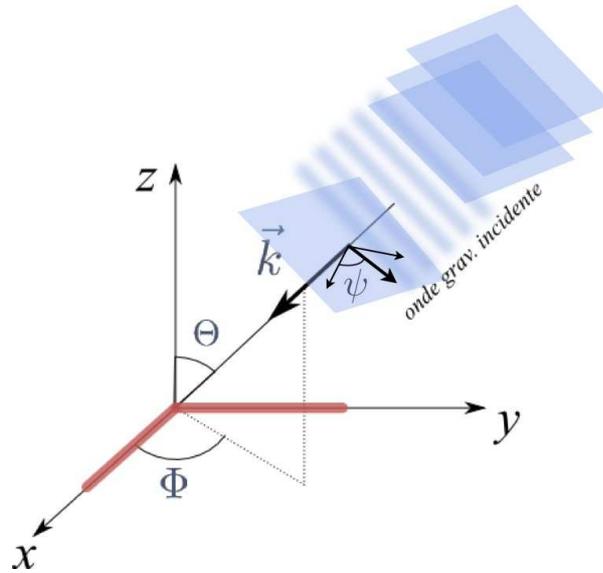


FIG. 9 –

Nous n’avons considéré jusqu’à maintenant que les ondes venant selon la direction “ z ” perpendiculaire au plan du détecteur. Si l’on considère une onde se propageant selon une direction (Θ, Φ) et avec une polarisation dirigée selon l’angle ψ , comme illustré sur la figure 9, la réponse de l’interféromètre s’écrit :

$$\frac{\Delta L}{L} = F_+(\Theta, \Phi, \psi) h_+ + F_\times(\Theta, \Phi, \psi) h_\times$$

où F_+ et F_\times sont les fonctions de réponse aux deux polarisations “+” et “ \times ”. Ces deux fonctions s’écrivent :

$$F_+ = -\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \Theta) \cos 2\Phi \cos 2\psi - \cos \Theta \sin 2\Phi \sin 2\psi$$

$$F_\times = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \Theta) \cos 2\Phi \sin 2\psi - \cos \Theta \sin 2\Phi \cos 2\psi$$

La figure 10 illustre le diagramme d’antenne, c’est à dire le rapport de la réponse de l’interféromètre sur la réponse optimale en fonction de la direction d’arrivée de l’onde, moyennée

sur les polarisations possibles de cette onde. Ceci est plus précisément $(F_+ + F_\times)/2$. On voit qu'un détecteur interférométrique est quasiment omnidirectionnel (à un facteur 2 près), la réponse ne devenant nulle que dans deux directions à 45° des deux bras.

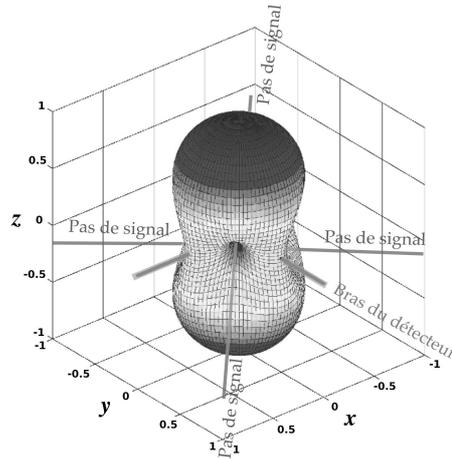


FIG. 10 – Diagramme d'antenne d'un interféromètre. Réponse moyennée sur la polarisation de l'onde arrivant selon la direction (Θ, Φ)

2.2.3 C'est le bruit qui fait le détecteur

Quelles sont les limites en sensibilité d'un détecteur ? C'est ce point que nous allons traiter. Et nous en profiterons pour améliorer sensiblement le schéma optique simple (Michelson) que nous considérons jusqu'à présent.

La quantité mesurée en sortie du Michelson est la différence de phase $\delta\phi$ obtenue entre les deux chemins suivis par la lumière dans les deux bras de l'interféromètre. On se pose donc naturellement la question de savoir quel est le meilleur réglage du Michelson. Pour répondre à cette question, regardons les limites de l'appareillage.

La limite ultime est ce que l'on appelle le bruit de grenaille (ou bruit de photons). Si l'on reçoit une certaine puissance lumineuse sur le photodétecteur final, ceci correspond à un flux de photons. Le nombre de photons n'étant pas infini, on a une statistique de comptage de ces photons. Si N photons frappent le détecteur pendant le temps T , la variance statistique sera \sqrt{N} si N est grand, ce qui est toujours le cas. Ceci permet de concevoir que les défauts principaux du système viendront

- d'une puissance du laser limitée
- d'un contraste pas parfait
- de certains bruits venant du laser lui-même comme les fluctuations de puissance

Et ceci n'est que le début de nos "ennuis"...

Bruit de photons On peut calculer le bruit de photons. Si t_k est le temps d'arrivée du photon k , l'énergie arrivant sur le détecteur au temps t peut s'écrire

$$P(t) = h\nu \sum_k \delta(t - t_k)$$

Si N photons arrivent pendant le temps T , la puissance continue s'écrit

$$P_{DC} = h\nu \frac{N}{T}$$

Ce qui nous intéressera sera la densité spectrale de bruit, fonction de la fréquence. Pour la calculer, on part de la transformée de Fourier de $P(t)$:

$$\tilde{P}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h\nu \left[\sum_k \delta(t - t_k) \right] e^{-i2\pi ft} dt = h\nu \sum_k e^{-i2\pi ft_k}$$

où l'on a utilisé les propriétés des fonctions δ de Dirac. Les temps d'arrivée des photons sont répartis aléatoirement donc pour $k \neq m$ la valeur moyenne $\langle e^{i2\pi(t_k - t_m)} \rangle$ est nulle. Ceci permet de calculer la norme $|\tilde{P}(f)|^2$:

$$|\tilde{P}(f)|^2 = P(f) \cdot P^*(f) = (h\nu)^2 \sum_k e^{-i2\pi ft_k} \sum_m e^{-i2\pi ft_m} \Rightarrow |\tilde{P}(f)|^2 = (h\nu)^2 N$$

On définit la densité spectrale de bruit S_b comme (voir plus d'explication dans le paragraphe 3.1.1)

$$S_b(f) = \sqrt{\frac{1}{T} \left(|\tilde{P}(f)|^2 + |\tilde{P}(-f)|^2 \right)}$$

ce qui peut s'écrire d'après les résultats précédents

$$S_b(f) = \sqrt{2h\nu P_{DC}} \quad \text{W}/\sqrt{\text{Hz}}$$

qui est indépendante de la fréquence.

Sensibilité Nous allons définir la "sensibilité" d'un interféromètre. Pour ce faire, voyons d'abord la réponse de l'appareil à une variation de la différence de longueur des bras. Un peu comme si une onde gravitationnelle passait...

Cette réponse sera vue sous la forme d'une variation de puissance dP_t transmise aux photodétecteurs finals pour une variation $d(\delta l)$ de la différence δl de longueur des deux bras. La puissance transmise dans le cas d'un interféromètre de Michelson idéal peut se calculer, mais nous savons d'ors et déjà que dans le cas d'un détecteur réel, il faut tenir compte du fait que la réflectivité des deux miroirs de bout de bras ne sera pas strictement la même. Notons les r_1 et r_2 . On notera dans la suite

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \text{et} \quad \Delta r = \frac{r_1 - r_2}{2}$$

On montre alors que la puissance transmise peut s'écrire

$$P_t = \frac{P_0(r^2 + \Delta r^2)}{2} \left(1 - \frac{r^2 - \Delta r^2}{r^2 + \Delta r^2} \cos(2k \delta l)\right)$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde du faisceau, avec λ sa longueur d'onde. On voit que si $\cos(2k \delta l) = -1$, on a la valeur maximale de la puissance transmise $P_t = P_{max} = P_0 r^2$ (on dit que l'interféromètre est sur la frange blanche) et la valeur minimale pour $\cos(2k \delta l) = 1$, $P_t = P_{min} = P_0 \Delta r^2$ (l'interféromètre est sur la frange noire). On définit le contraste C comme

$$C = \frac{r^2 - \Delta r^2}{r^2 + \Delta r^2}$$

et il est aisé de voir que

$$\frac{P_{min}}{P_{max}} = \frac{1 - C}{1 + C}$$

Si les deux réflectivités sont proches de 1 et la différence très faible, ce qui est le cas en pratique, on a

$$r_1 \approx 1, r_2 \approx 1, \Delta r \ll 1 \quad \Rightarrow \quad P_{max} \approx P_0, \quad C \approx 1 - 2\Delta r^2$$

D'après notre définition de la réponse du détecteur, celle-ci sera donnée par

$$\rho = \frac{dP_t}{d(\delta l)} = CP_0 k \sin(2k \delta l)$$

Nous pouvons maintenant définir la sensibilité comme le rapport du bruit de photon (en $W/\sqrt{\text{Hz}}$) et de la réponse de l'interféromètre (en W/m), après quelques simplifications :

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{2\pi P_{max}}} \frac{\sqrt{1 - C \cos(2k \delta l)}}{C \sin(2k \delta l)} \quad \text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

On peut interpréter cette expression comme l'inverse de la réponse de l'interféromètre normalisée au bruit de photon. Si l'on préfère, la sensibilité σ_b correspond à la densité spectrale de δl provoquant un bruit équivalent au bruit de photon (voir les explications sur la densité spectrale dans 3.1.1).

Considérons un interféromètre parfaitement symétrique (contraste $C = 1$, réflectivités égales). La sensibilité sera maximale si $k\delta l = q2\pi$, où q est un entier, c'est à dire si l'on se met sur la frange noire. Autrement dit, dans ce cas, la puissance moyenne transmise en sortie est nulle et la moindre variation de flux lumineux sur le photodétecteur est visible. La sensibilité sera alors

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi P_{max}}} \quad \text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

Ceci est une sensibilité en déplacement (en $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$) mais on peut également exprimer une sensibilité en bruit d'onde gravitationnelle équivalent, qui utilise la réponse à une variation relative de longueur :

$$\sigma_h = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi P_{max}}} \quad \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.1)$$

D'après tout ce qui vient d'être dit, il faudrait se mettre sur la frange noire, mais... le contraste n'est jamais parfait, les réflectivités jamais égales...

Dans ce cas plus réaliste, on obtient une sensibilité maximale lorsqu'on est décalé de la frange noire. La puissance moyenne reçue est alors non nulle et des fluctuations de la puissance du laser peuvent mimer un signal d'onde gravitationnelles. On devient sensible au bruit de puissance du laser. Ceci nous donne une contrainte. Pour minimiser l'impact de ce bruit de puissance, on veut qu'il soit inférieur au bruit de photons, qui est de toutes façons irréductible :

$$\frac{\delta P_0}{P_0} \lesssim \sqrt{\frac{hc}{\lambda P_0}} \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$$

on a au préalable calculé l'expression du bruit de photons pour le décalage de la frange noire donnant la sensibilité maximale.

Avec des valeurs raisonnables de contraste ($1 - C = 10^{-4}$) et de puissance du laser ($P_0 = 10$ W), on trouve

$$\frac{\delta P_0}{P_0} \lesssim 1.4 \times 10^{-9} / \sqrt{\text{Hz}}$$

Ceci était une contrainte trop forte pour la technologie du début des années 2000. On ne savait pas faire de lasers ayant d'aussi petites fluctuations de puissance. Il a fallu trouver des méthodes pour surmonter l'obstacle, en particulier la détection synchrone, nous en parlons plus loin.

Aujourd'hui, on y arrive, les prochaines générations d'interféromètres utiliseront la détection appelée "DC" et n'utiliseront plus lesdites méthodes synchrones.

Détection synchrone Dans les schémas actuels (2009-2010) des détecteurs en fonctionnement, et comme on vient de le voir, la détection synchrone reste indispensable. Elle consiste à moduler le faisceau laser avant son entrée dans l'interféromètre, à haute fréquence, 6.28 MHz pour Virgo. On réalise une démodulation synchrone à la sortie (voir figure 13). C'est une technique classique en électronique pour ne prendre en compte que le bruit à la fréquence de modulation. Or, à quelques MHz, le bruit en puissance du laser devient suffisamment faible pour que nous n'ayons plus de problèmes, du moins ceux-là.

Les conséquences sont multiples. Le bruit de puissance devient acceptable, mais on a apparition de bandes latérales dans le spectre optique du faisceau. Ces bandes sont néanmoins utiles pour le "verrouillage" de l'interféromètre, c'est à dire son contrôle pour qu'il reste sur la frange noire. Par ailleurs, l'électronique devient plus complexe.

Replier les bras L'expression de la sensibilité (expression 2.1) montre qu'elle est proportionnelle à la longueur des bras. On rappelle que plus σ_h est faible, mieux c'est...

La longueur physique des bras ne pouvant excéder quelques kilomètres, pour des raisons de coût évidentes, une idée naturelle est de faire faire plusieurs allers-retours à la lumière dans les bras. Un système simple consiste à mettre plusieurs miroirs entre lesquels le faisceau serait renvoyé. Ca donne un système optique lourd et complexe. Une solution beaucoup plus élégante consiste à introduire dans chaque bras une cavité Fabry-Pérot.



FIG. 11 – Principe d’une cavité Fabry-Pérot utilisée dans Virgo. La réflectivité du miroir d’entrée est r_e , celle du miroir de bout est égale à 1.

Pour une telle cavité (figure 11), en posant r_e la réflectivité du miroir d’entrée, on définit la finesse

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r_e}}{1-r_e}$$

qui sert à calculer le nombre moyen d’allers-retours des photons dans la cavité :

$$\bar{N} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi}$$

La sensibilité σ_h est alors a priori améliorée d’un facteur \bar{N} :

$$\sigma_h^{FP} = \frac{\pi}{2\mathcal{F}L} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi P_{max}}} 1/\sqrt{\text{Hz}}$$

Ceci fonctionne bien si nous considérons que les signaux qui nous intéressent sont continus (à fréquence nulle). Lorsqu’on regarde des signaux à une certaine fréquence f , il faut tenir compte du temps passé par les photons dans la cavité. Celle-ci se comporte comme un filtre passe-bas. Au delà d’une certaine fréquence de coupure, pendant que les photons voyagent dans la cavité, l’amplitude du signal potentiel d’onde gravitationnelle change et les photons moyennent son influence sur le temps qu’ils passent dans la cavité. Ceci est représenté sur la figure 12. La fréquence de coupure s’écrit $f_c = \frac{c}{4\mathcal{F}L}$.

Recyclage L’expression de la sensibilité (expression 2.1) montre également qu’elle est proportionnelle à la puissance injectée, qui est dans cette expression la puissance arrivant sur la lame séparatrice. Si on ajoute un miroir, appelé miroir de recyclage, entre le laser et la séparatrice, on renvoie la puissance lumineuse qui devrait revenir vers le laser dans l’interféromètre. On peut également considérer qu’on a formé une cavité entre le miroir de recyclage et l’interféromètre (composé de la séparatrice et des deux bras) qui se comporte comme un miroir. Cette cavité s’appelle la cavité de recyclage.

Le résultat net est que la puissance incidente sur la séparatrice est amplifiée d’un facteur G_{rec} , qui s’écrit

$$G_{rec} = \left(\frac{t_r}{1-r_r\rho} \right)^2$$

où t_r et r_r sont respectivement la transmissivité et la réflectivité du miroir de recyclage. ρ est la réflectivité globale des deux cavités Fabry-Pérot.

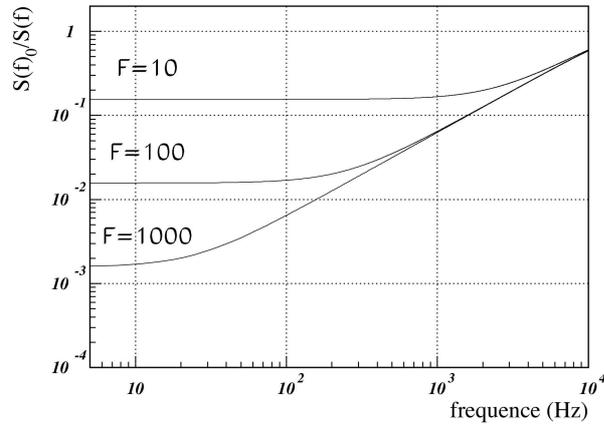


FIG. 12 – Rapport entre la sensibilité de l’interféromètre avec des cavités Fabry-Perot et celle d’un interféromètre sans cavité pour différentes valeurs de finesse

On obtient alors la sensibilité optimale d’un interféromètre de Michelson ayant un Fabry-Pérot dans chaque bras et un miroir de recyclage en entrée :

$$\sigma_h = \frac{\pi}{2\mathcal{F}L} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{4\pi G_{rec} P_{max}}} 1/\sqrt{\text{Hz}}$$

La figure 13 montre le schéma optique de Virgo. Nous n’avons pas parlé de certains éléments de ce schéma pour ne pas alourdir le discours. Le lecteur intéressé pourra par exemple se référer à [9] pour plus d’informations.

2.2.4 Amélioration de la sensibilité, autres sources de bruit

Le but de tous les systèmes de Virgo est, in fine, de réduire les bruits présents dans l’interféromètre. En plus des bruits fondamentaux que nous avons vus dans les paragraphes précédents, il existe un ensemble de sources de bruit limitant la sensibilité dans diverses bandes de fréquence. Sans vouloir faire une étude exhaustive, rappelons les bruits principaux, une fois activés tous les systèmes de Virgo. Nous décrirons certains de ces systèmes par la suite, mais nous les justifions ici à priori par le ou les bruits combattus. Chaque bruit cité est dominant dans une certaine plage de fréquences.

– Bruit sismique

Le bruit sismique domine en dessous de 4 Hz. Il est causé par l’activité sismique qui engendre des déplacements horizontaux des miroirs affectant la longueur des bras. Les déplacements verticaux affectent également cette longueur par des couplages dus à la géométrie globale du détecteur. Pour atténuer ces mouvements, les miroirs et certains éléments critiques (une partie des systèmes d’injection et de détection) sont suspendus à des chaînes d’amortisseurs appelés “super-atténuateurs”. Ceux-ci, décrits un peu plus loin, permettent une atténuation typique des mouvements de miroirs de 10^{-9} à 4 Hz.

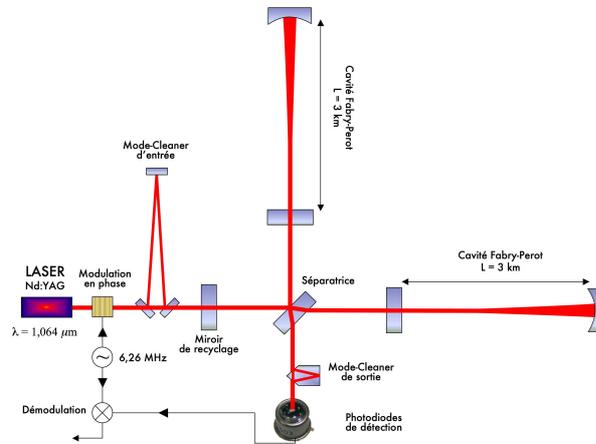


FIG. 13 – Schéma optique de Virgo

– *Bruit thermique*

Entre 4 et 500 Hz, les bruits dominants sont les divers bruits thermiques. Les systèmes mécaniques de virgo (éléments des suspensions et miroirs) peuvent être considérés comme des systèmes oscillants ayant un caractère dissipatif. L'équilibre thermique avec leur environnement introduit, en vertu du théorème fluctuation-dissipation [10], une incertitude sur leur position. Cette incertitude correspond au bruit thermique.

Selon le système mécanique considéré, le bruit thermique couvre une plage ou un ensemble de fréquences différentes. On retrouve la plupart du temps une densité spectrale de bruit thermique présentant une résonance caractéristique du système. Celle-ci dépend en particulier du facteur de qualité Q du système, que l'on cherche à rendre le plus grand possible de façon à réduire la densité spectrale de bruit hors du pic. Les différents contributeurs au bruit thermique global sont les suivants :

– *Mode "pendule" de l'ensemble miroir-fils de suspension*

Les miroirs sont suspendus par des fils au dernier étage d'amortissement (la "marionnette") de la chaîne d'atténuation. L'ensemble fils-miroir possède des modes d'oscillation pendulaires qui sont excités thermiquement. Ce bruit est dominant entre 3 et 40 Hz environ.

– *Modes "violon" des fils de suspension*

Les fils de suspension des miroirs ont des modes de vibration appelés modes violon qui apparaissent à haute fréquence sous la forme de modes harmoniques (pics au delà de 300 Hz).

– *Miroirs*

Les modes de vibration interne des miroirs sont vus par le faisceau comme un bruit de position. Les pics de résonance sont à haute fréquence (au dessus de quelques kilohertz) mais leur contribution à basse fréquence est en $\frac{1}{\sqrt{f}}$ et limite la sensibilité de

Virgo entre 40 Hz et 200 Hz. On cherche néanmoins à limiter ce bruit par l'adoption de miroirs en silice avec des facteurs de qualité très élevés.

– *Bruit de grenaille*

Au dessus de 500 Hz, le bruit de grenaille (bruit de photon) devient prépondérant. La présence des cavités Fabry-Pérot induit une remontée de ce bruit à haute fréquence. Cette remontée est due au fait que la détection des mouvements des miroirs et des chemins suivis par les photons en présence d'une onde gravitationnelle est intégrée sur plusieurs allers-retours dans les cavités. Celles-ci se comportent alors comme un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c \approx 500$ Hz.

– *Bruits instrumentaux*

La présence de bruits instrumentaux se traduit principalement par un excès de bruit entre 3 Hz et 100 Hz. Ces bruits sont très divers et à priori difficilement modélisables. On peut par exemple citer le décentrage des faisceaux qui introduit un couplage entre les mouvements angulaires et longitudinaux, ce qui injecte du bruit angulaire dans les boucles d'asservissement longitudinales et dans le signal de sortie. On peut aussi parler des faisceaux parasites de faible intensité produits par la diffusion de lumière sur les photodiodes (de détection ou auxiliaires) et qui se trouvent réinjectés dans les boucles d'asservissement longitudinal ou angulaire, le bruit de l'électronique de pilotage des actionneurs, le bruit de l'électronique de détection, le bruit en fréquence du laser. Tous ces bruits techniques sont peu à peu éliminés au fur et à mesure de l'optimisation du détecteur.

Configuration mécanique Comme nous l'avons vu ci-dessus, la lutte contre le bruit sismique impose l'utilisation de systèmes mécaniques d'atténuation très performants isolant autant que faire se peut les miroirs des perturbations mécaniques (sismiques ou d'origine humaine) extérieures. Ces atténuateurs doivent pouvoir amortir les perturbations dans une très large gamme de fréquences, à partir de quelques Herz, et de facteurs aussi grands que possible. On peut mentionner que le bruit sismique est, à 10 Hz, un facteur 10^{10} au dessus de la sensibilité escomptée.

Ces systèmes mécaniques, appelés "super-atténuateurs", agissent de façon passive mais également active. Ils sont constitués d'un ensemble de filtres mécaniques passe-bas montés en cascade. Chaque filtre réalise un amortissement des mouvements

- horizontaux (masse suspendue à un fil et formant un pendule)
- verticaux (ressorts à lame)
- de rotation (couple de torsion du fil de suspension)

Les fréquences de résonance de l'ensemble sont basses (en dessous de quelques Hz) et on obtient une fonction de transfert proportionnelle à $1/f^2$ au dessus de ces fréquences, ce qui rend la contribution du bruit sismique négligeable par rapport au bruit thermique au dessus de quelques Herz.

L'action d'atténuation passive des super-atténuateurs est complétée par une atténuation active. Un ensemble de senseurs (accéléromètres, senseurs de position) fournissent des informations qui, filtrées, servent à contrôler activement le mouvement des miroirs et les mouve-

ments parasites de la suspension. Des actionneurs, sous la forme de bobines agissant sur des aimants permanents, sont présents à plusieurs étages :

- aimants collés sur les miroirs et bobines sur une “masse de référence” suspendue à proximité du miroir et servant à contrôler celui-ci.
- actionneurs sur le dernier étage de suspension (“marionnette”), sous lequel sont suspendus le miroir et la masse de référence.
- actionneurs sur le premier étage de suspension (“filtre 0”)

Il est ainsi possible de limiter les mouvements aux fréquences de résonance des divers éléments de la suspension et d’assurer l’alignement et le positionnement de l’interféromètre pour permettre des conditions d’interférence optimales.

Sensibilité La prise en compte de tous les bruits modélisables décrits ci-dessus conduit à la figure 14 pour la première version de Virgo (ceci n’est qu’un exemple). Les divers bruits instrumentaux et bruits de contrôle sont plus difficilement modélisables a priori et viennent s’y ajouter. L’une des activités principales lors de la recette de l’interféromètre consiste à les réduire.

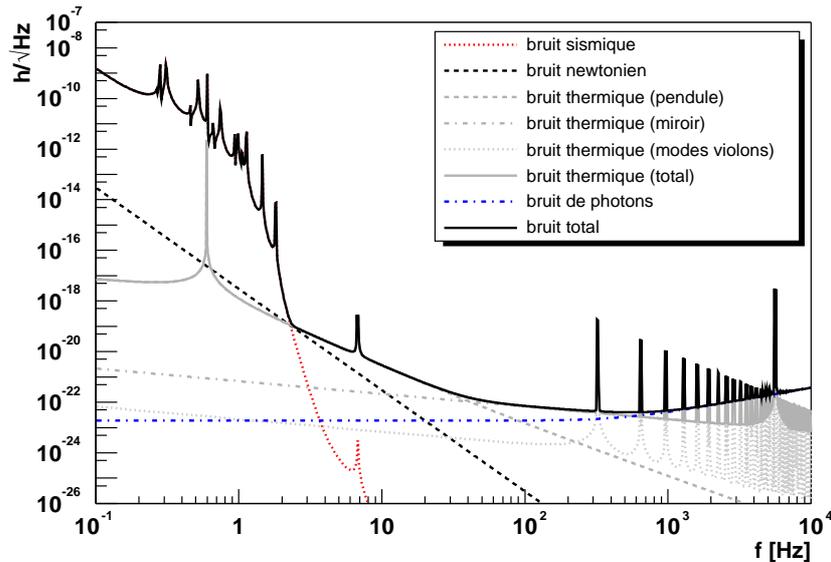


FIG. 14 – Contribution des principaux bruits à la sensibilité de Virgo.

Il est à noter que l’on suppose, pour le calcul de ces contributions modélisables, un bruit stationnaire et gaussien. L’expérience montre que des non-stationarités sont présentes (variation de la densité spectrale de bruit au cours du temps) et que le bruit présente un caractère

non gaussien. Ceci se traduit dans les données par des événements transitoires qui peuvent être pris pour un signal. Il est donc nécessaire de développer des techniques de veto efficaces prenant en compte des signaux auxiliaires (courants dans certaines bobines de moteurs par exemple).

2.2.5 Evolution de la sensibilité du détecteur jusqu'à la fin 2009

Pour illustrer les efforts faits dans la lutte contre les bruits, en particulier instrumentaux, il est intéressant de voir l'évolution de la sensibilité réelle de Virgo entre Novembre 2003, date de la première période de prise de données technique (ci-dessous dénommée "run") après le début de la recette ("commissioning") de l'instrument, et Octobre 2009.

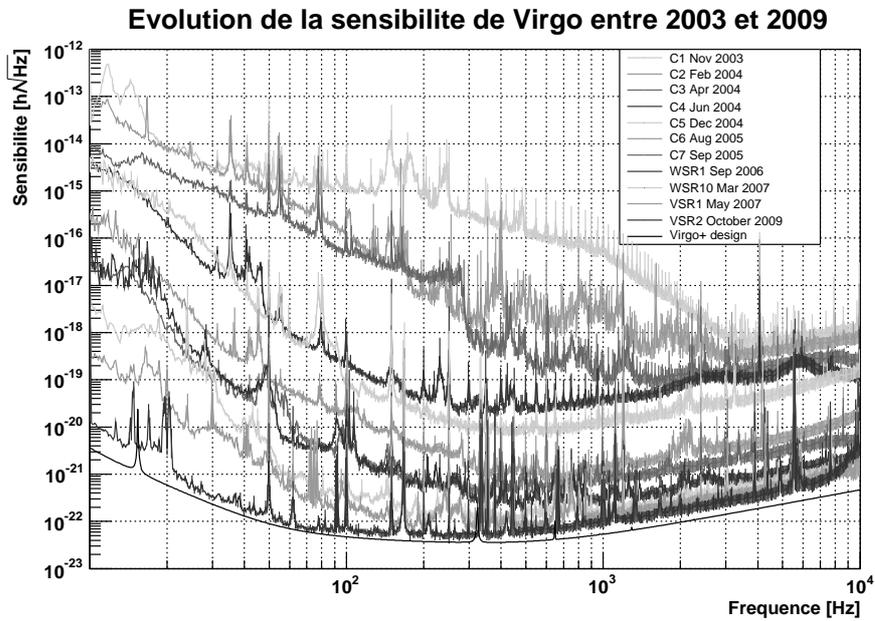


FIG. 15 – Evolution de la sensibilité au cours de la recette et du fonctionnement de Virgo. C1 & C2 : une seule cavité verrouillée, C3 & C4 : mode recombéné, C5 et suivants : mode recyclé

Les "runs" sont des périodes de prise de données réalisées après chaque avancée majeure de la recette. Leur durée varie de quelques jours à plusieurs mois suivant qu'il s'agit d'un "run" technique ou scientifique. On observe sur la figure 15 une amélioration constante de la sensibilité de l'appareil, due bien sûr à l'amélioration des configurations optiques utilisées, mais également au travail de lutte contre les bruits instrumentaux.

2.3 Réseau de détection mondial

Plusieurs des buts scientifiques décrits dans le tableau 1 nécessitent la mise en commun des données venant de plusieurs détecteurs. Par exemple, un détecteur unique ne peut pas donner la direction d'arrivée de l'onde, juste un temps de passage. Avec trois détecteurs répartis sur la Terre, et donc trois temps de passage, on peut réaliser une triangulation qui donne une direction possible. Il reste une ambiguïté quant au sens de propagation, qui peut être levée partiellement par une étude précise des formes d'onde.

Suivant cette voie, les signaux venant de plusieurs détecteurs sont mis en commun et analysés conjointement depuis plusieurs années. Les détecteurs actuellement en fonctionnement et les projets de détecteurs existant sont les suivants :

- Virgo [11], bras de 3 km, près de Pise en Italie
- LIGO [12], deux interféromètres avec des bras de 4 km, l'un à Hanford (Etat de Washington, Etats-Unis) et l'autre à Livingston, près de Baton Rouge (Louisiane, Etats-Unis). Sur le même site de Hanford et dans le même tube à vide, un deuxième interféromètre avec des bras de 2 km est également opérationnel
- GEO [13], bras de 600 m, servant au test de nouvelles technologies, Garching, Allemagne
- TAMA [14], bras de 300 m, au Japon
- Projet LCGT [15] de détecteur avec un système cryogénique (pour réduire le bruit thermique), Japon
- Projet AIGO [16] avec des bras de 5 km, situé dans le bush "à côté" (300 km) de Perth, en Australie

La mise en place d'un réseau de détecteurs mondial permettra de confirmer une détection, de déterminer la position de la source et également de décomposer la polarisation de l'onde gravitationnelle.

2.4 Détecteurs du futur

2.4.1 Evolution des détecteurs existants

Les plus grands détecteurs actuellement en fonctionnement, Virgo et LIGO, ont évolué par palier vers leurs sensibilités actuelles grâce à plusieurs améliorations successives. Un indicateur utilisé pour représenter la sensibilité d'un détecteur est la "distance horizon". C'est la distance à laquelle se produirait une coalescence de deux étoiles à neutrons de $1.4 M_{\odot}$ chacune, et qui donnerait un signal correspondant à un rapport signal sur bruit de 8 dans le détecteur. On moyenne sur les orientations possibles du système. Nous expliciterons en détail cette notion dans la section sur l'analyse de données (paragraphe 3.1.3). Vers la fin 2009, les détecteurs avaient une distance horizon variant entre 8 et 15 Mpc.

Après une période de mise à niveau pour Virgo, les interféromètres européen et américains devraient prendre des données en commun jusqu'à la fin 2010. Une évolution notable de ces détecteurs est prévue par la suite, ce sont les projets Advanced Virgo et Advanced LIGO. Le but sera d'augmenter la sensibilité globale d'un facteur 5 par rapport à la situation de fin 2009 et d'un facteur 10 par rapport aux objectifs de Virgo/LIGO dans leur configuration initiale. Ceci veut dire un volume d'espace accessible augmenté d'un facteur 10^3 et donc un

taux d'événements potentiel augmenté du même facteur. Le début de la construction de ces détecteurs devrait se produire dans le courant 2011.

Les estimations de taux d'événements rendent une détection très probable dans l'ère d'Advanced Virgo/LIGO. Une estimation plausible donne

- un taux de détection de coalescence d'étoiles à neutrons de $\sim 10/\text{an}$
- un taux de détection de coalescence de trous noirs de $\sim 20/\text{an}$, avec un horizon (recalculé pour des masses de trous noirs) allant jusqu'à $z \sim 0.1$, ce qui permettrait de faire de la cosmologie (du moins de commencer)
- un écart minimal à la sphéricité pour les pulsars de l'ordre de $\epsilon \sim 10^{-8}$

2.4.2 Les détecteurs de la décennie 2020

Les projets pour aller encore plus loin se mettent en place lentement. Le but affiché est, grâce aux taux d'événements très élevés, de faire de l'astronomie et de l'astrophysique gravitationnelles. Les deux projets décrits ici ne seront pas opérationnels avant 2023 voire plus tard.

LISA Pour progresser vers les très basses fréquences, il faut s'abstraire du bruit sismique et donc aller dans l'espace. C'est l'idée de base du projet LISA [17][18], constitué de trois satellites en formation triangulaire, le triangle équilatéral ayant des cotés de 5 Mkm (millions de km...). La longueur des bras implique une bonne sensibilité dans les basses, voire très basses, fréquences. En l'occurrence entre 10^{-4} Hz et 0.1 Hz.

Le vol en formation des satellites se fait sur la trajectoire de la Terre, à 20° derrière elle, comme illustré sur la figure 16.

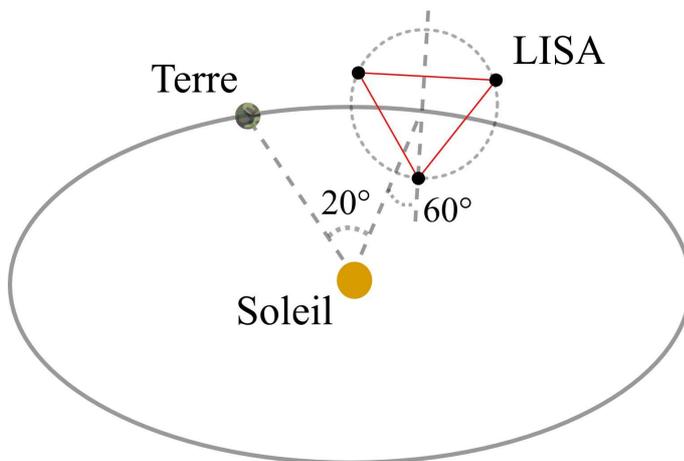


FIG. 16 – Configuration de vol des trois satellites de LISA. Chaque satellite a une trajectoire inclinée par rapport au plan de l'ecliptique, de façon à ce que le triangle se déforme le moins possible.

Des liens laser relieront les différents satellites et la position de chaque satellite sera

contrôlée autour d'une masse test libre. Les défis techniques seront nombreux, comme par exemple la stabilisation en fréquence des lasers, le suivi des masses test et le contrôle fin des satellites, et le plus important, la nécessité que tout fonctionne du premier coup. Hors de question d'aller faire une réparation dans l'espace.

En contrepartie de toutes ces difficultés, on devrait avoir un programme scientifique très complet, par exemple on devrait voir des coalescence de trous noirs supermassifs de deux galaxies jusqu'à des redshifts $z = 1$ et la phase spirale bien avant la coalescence de deux étoiles à neutrons. Peut-être pourra-t-on prévoir les GRB courts ?

Einstein Telescope (ET) Une autre possibilité pour les détecteurs de troisième génération est de faire évoluer le concept "terrestre" jusqu'à ses limites. C'est l'objet du projet "Einstein Telescope" [19]. Le but est d'obtenir une sensibilité 10 fois meilleure que celle d'Advanced Virgo/LIGO. La bande de fréquence sensible devrait commencer aux alentours de 1 Hz. La configuration optique n'est pas encore figée mais devrait être constituée de 30 km de faisceaux, et donc de tubes à vide. Il s'agira d'un détecteur souterrain pour diminuer le bruit sismique. On sera obligé d'utiliser certaines techniques en cours de développement comme le squeezing ou la cryogénie et des lasers plus puissants (de l'ordre du kW ?). Le schéma pressenti prévoit plusieurs interféromètres dans une configuration triangulaire.

La sensibilité serait telle que nous pourrions détecter des coalescences de trous noirs de masses stellaires jusque z entre 3 et 5.

3 Analyse de données

Traiter de manière exhaustive de l'analyse de données pour les détecteurs d'ondes gravitationnelles demanderait un livre plus gros que celui que vous avez entre les mains. Nous nous contenterons, après la présentation des outils de base que nous utilisons, de décrire l'analyse de signaux de coalescences de binaires. Et ceci sans épuiser le sujet. Le but est de donner une idée des difficultés et spécificités rencontrées. Suivra un survol de quelques autres exemples d'analyses.

3.1 Outils de base et généralités

3.1.1 Outils de base

Outils et notions d'analyse du signal Le signal produit par le détecteur est en première approximation continu, se présente sous la forme d'une série temporelle, et la recherche de signaux d'amplitude très faible s'apparente souvent à la recherche d'un article sur le bureau de l'auteur de ces lignes... Les outils mathématiques utilisés en majorité sont ceux de l'analyse de signal [20][21].

La série temporelle $a(t)$ qui nous intéresse a un caractère aléatoire, c'est en majorité du bruit $n(t)$, mais contient une composante déterministe $s(t)$, c'est à dire le signal éventuel que nous voudrions extraire ou détecter. On peut l'écrire

$$a(t) = n(t) + s(t)$$

Dans cette expression, si on refait l'expérience plusieurs fois pour le même signal, $n(t)$ sera différent à chaque fois (aléatoire) alors que $s(t)$ ne changera pas (déterministe). Les outils dont nous aurons besoin sont les suivants :

– *Transformée de Fourier*

Elle fait le lien entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel. On peut l'écrire

$$\tilde{a}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \exp^{-i2\pi ft} dt$$

– *Intercorrélation et autocorrélation*

Elle indique le degré de similitude de deux formes d'onde ou signaux. On l'écrit

$$a_1 \star a_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t) a_2(t + \tau) dt$$

La forme générale introduit un décalage temporel τ de l'une des formes d'onde. Ceci permet, lorsque l'une des formes d'onde (par exemple le signal $a(t)$) est beaucoup plus long que l'autre (le signal recherché $s(t)$), de construire une quantité qui indique si $s(t)$ est présent à l'instant τ dans $a(t)$. Ceci est la base de certains algorithmes de recherche. La figure 17 illustre le fonctionnement de ces algorithmes.

On peut réaliser l'intercorrélation d'un signal avec lui même décalé d'une valeur temporelle τ . C'est la fonction d'autocorrélation :

$$R_a(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t + \tau) a(t) dt$$

On peut se représenter cette quantité comme l'amplitude des structures qui existent et se répètent dans le signal sur des échelles de temps τ . Par exemple, on aura un maximum pour $\tau = 0$ lorsque $a(t)$ est alignée avec elle-même. De même, une fonction périodique aura une série de maximums pour des décalages multiples de la période.

Les définitions de l'intercorrélation et de l'autocorrélation données ci-dessus peuvent diverger si les signaux sont non nuls pour tout temps t . Dans ce cas, les définitions sont un peu modifiées :

$$a_1 \star a_2(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a_1(t) a_2(t + \tau) dt$$

$$R_a(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a(t + \tau) a(t) dt$$

– *Densité spectrale de puissance*

L'une des questions qui se pose naturellement lorsqu'on étudie un signal est : "Quelle "quantité" de signal est présente à une fréquence f donnée?". La notion de quantité est ici volontairement laissée floue pour le moment. Pour un signal **déterministe** (non aléatoire) $s(t)$, la transformée de Fourier $\tilde{s}(f)$ peut suffire à décrire une série temporelle

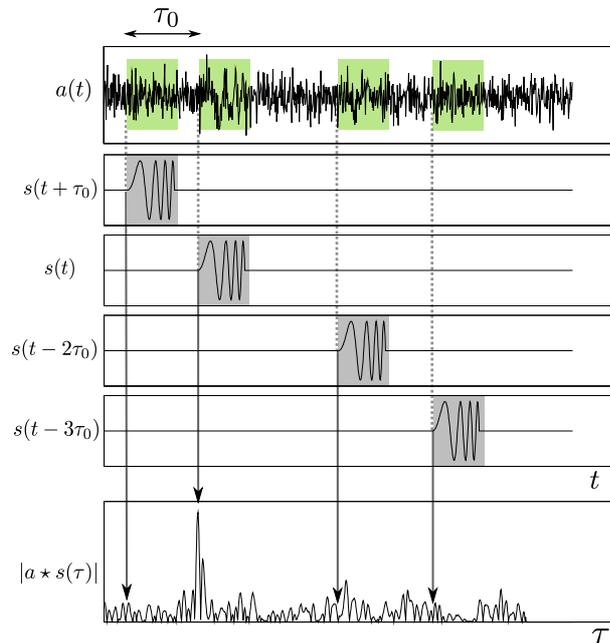


FIG. 17 – On calcule la valeur absolue de l’intercorrélacion $|a * s(\tau)|$ (graphe du bas) entre deux signaux $a(t)$ et $s(t)$ en fonction d’un décalage τ de $s(t)$. La valeur maximale est obtenue lorsque $s(t)$ "ressemble" le plus à $a(t)$. Ici, on a construit $a(t)$ comme la somme de $s(t)$ commençant à un temps τ_0 et d’un signal aléatoire gaussien.

dans le domaine fréquentiel. Dans le cas d’un signal **stochastique** (série temporelle aléatoire), une transformée de Fourier ne donne l’information que pour une réalisation de la série temporelle.

Pour comprendre les notions d’énergie et de puissance d’un signal, il faut nous placer dans un cas pratique. Imaginons une tension variable v aux bornes d’une résistance $\rho = 1 \Omega$. La puissance instantanée sera $P = v^2/\rho$. Par convention, on a gardé cette notion de “puissance” comme une quantité proportionnelle à l’amplitude au carré, et celle associée “d’énergie” dans le cas de signaux non électriques.

En traitement du signal, l’énergie et la puissance d’un signal $a(t)$ non périodique sont donc naturellement données par :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt, \quad P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |a(t)|^2 dt \quad (3.1)$$

Dans le cas d’un signal périodique, on calcule la puissance sur une période.

Ce qui nous intéresse le plus souvent est la répartition de cette puissance en fonction de la fréquence pour nos signaux aléatoires (nous voulons savoir quel bruit est présent "autour" de la fréquence f). Le lien entre l’énergie dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel est donné par le *théorème de Parseval*. Si $\tilde{a}(f)$ est la transformée

de Fourier d'un signal $a(t)$, ce théorème s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{a}(f)|^2 df$$

il indique simplement que l'énergie totale d'un signal est la même que l'on se place dans le domaine fréquentiel ou temporel.

Si $a(t)$ est un signal **déterministe**, on peut naturellement d'après ce qui précède définir la densité spectrale d'énergie comme

$$E(f) \equiv |\tilde{a}(f)|^2$$

mais comme on l'a vu, ceci n'a pas réellement d'utilité pour un signal **stochastique**. On définit la densité spectrale d'énergie dans ce cas comme l'espérance mathématique (correspondant à un nombre infini de réalisations du signal)

$$E(f) \equiv E \left[|\tilde{a}(f)|^2 \right]$$

bien entendu, seulement si cette espérance existe.

Pour définir la densité spectrale de puissance, on est tenté de prendre une moyenne temporelle de l'énergie comme dans l'équation 3.1 ci-dessus. Mais, toujours dans le cas stochastique, il faut faire attention au fait que la fonction $a(t)$ peut ne pas être de carré sommable et que $\tilde{a}(f)$ peut ne pas être défini au sens des fonctions. On arrive à donner une définition cohérente en considérant des fonctions tronquées

$$a_T(t) \equiv \{ a(t) \text{ si } |t| < T, 0 \text{ sinon} \}$$

La définition de la densité spectrale de puissance est alors :

$$P_a(f) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|\tilde{a}_T(f)|^2 \right]}{2T} \quad (3.2)$$

Point intéressant, on montre que pour des processus stochastiques stationnaires, il y a une relation de Fourier entre la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation. C'est le *théorème de Wiener-Khinchine* :

$$P_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_a(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

La plupart des auteurs utilisent d'ailleurs cette relation comme une définition de la densité spectrale de puissance.

Dans la plupart des cas qui nous occupent, la fonction $a(t)$ est réelle et dans ce cas, la densité spectrale $P(f)$ est une fonction réelle, positive et paire. On peut donc utiliser ce que l'on nomme la *densité spectrale de puissance unilatérale*

$$P_a^{SS}(f) = P_a(f) + P_a(-f) = 2.P_a(f) \quad (3.3)$$

et c'est d'elle que nous parlerons lorsque nous dirons "densité spectrale de puissance" dans la suite. "SS" est l'abréviation de "Single Sided".

L'estimation de $P(f)$ se fait à l'aide d'une moyenne sur un grand nombre de périodogrammes.

Rapport signal sur bruit (SNR) Pour détecter la présence d'un signal dans du bruit et mesurer éventuellement son intensité, il faut un outil. Cet outil, c'est le rapport signal sur bruit ("Signal to Noise Ratio", SNR). Pour le définir, il nous faut faire attention à un détail.

Supposons que les données sortant de nos interféromètres représentent l'amplitude de l'onde gravitationnelle. Ces données et signaux seront sans dimension, on rappelle que l'amplitude de l'onde est mesurée par la variation relative de longueur des bras $h = \frac{\Delta L}{L}$. Comme nous l'avons observé plus haut, dans le cas de signaux déterministes $s(t)$ (nos signaux cachés dans le bruit) sans dimension donc, la représentation de l'intensité du signal en fonction de la fréquence se fait le plus simplement à l'aide de la transformée de Fourier $\tilde{s}(f)$ dont la dimension est $[1.s] = [1/\text{Hz}]$. Lorsqu'on considère des signaux stochastiques (le bruit pur), on utilise pour les caractériser leur densité spectrale d'amplitude qui, comme nous l'avons vu, s'exprime en $[\sqrt{s}] = [1/\sqrt{\text{Hz}}]$

Un signal et un bruit du fait de leur caractère déterministe ou aléatoire ne sont donc pas de même nature. La question qui se pose est donc comment reconnaître qu'une forme d'onde est cachée dans un signal bruité ? Nous avons vu que la ressemblance entre deux signaux pouvait être mesurée en réalisant une intercorrélation entre eux. Étudions donc ses caractéristiques statistiques, c'est à dire comment se comporte le résultat d'une intercorrélation entre un signal et un bruit pur.

On ne devrait pas parler de bruit mesuré dans un détecteur mais d'une réalisation particulière du bruit dans le détecteur. Si on refait la mesure, les valeurs obtenues en fonction du temps seront différentes à chaque fois. La distribution des valeurs du bruit la plus simple est une distribution gaussienne, venant de la superposition d'un grand nombre de variables aléatoires (influences physiques) indépendantes et du théorème de la limite centrale.

Considérons donc un tel bruit gaussien $n(t)$, en l'absence de signal caché dedans, et réalisons une intercorrélacion entre le bruit et une forme d'onde de test $s(t)$. D'ailleurs, non pas une, mais un très grand nombre d'intercorrélacions avec des réalisations du bruit différentes. Alors, la distribution statistique du résultat de ces intercorrélacions sera également distribuée selon une gaussienne (figure 18).

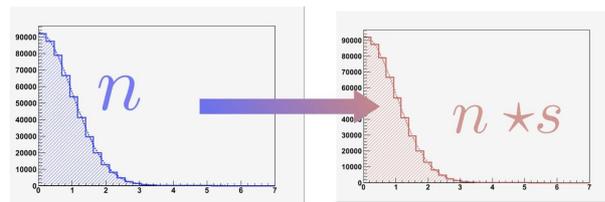


FIG. 18 – La distribution statistique de l'intercorrélacion d'un signal test et d'un bruit gaussien est une gaussienne.

Supposons qu'une forme d'onde $s_0(t)$ est présente dans le bruit. On notera $a(t) = n(t) + s_0(t)$ les données venant du détecteur, somme du bruit et du signal recherché. Si la forme d'onde de test $s(t)$ recherchée est identique à la forme d'onde $s_0(t)$, la valeur du maximum de l'intercorrélacion $v = a * s(\tau)$ (maximum en fonction de τ , voir figure 17) sera grande, typiquement plusieurs fois l'écart-type de la distribution en l'absence de signal $n * s(\tau)$. On aura une distribution comme celle illustrée sur la figure 19.

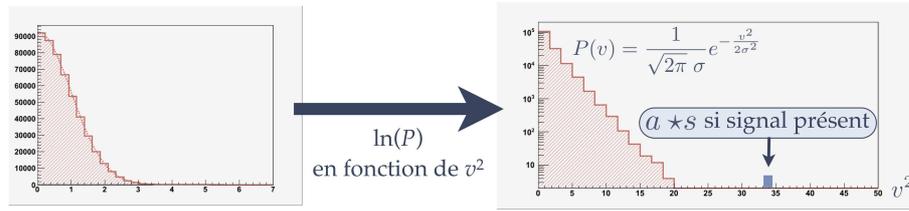


FIG. 19 – Dans le cas de la présence d’un signal dans les données et d’une intercorrélacion avec une forme d’onde identique au signal, la distribution du maximum de l’intercorrélacion présente un pic pour une valeur très supérieure à la largeur de la distribution dans le cas de bruit seul.

On compare bien des quantités ayant la même dimension. Nous définissons alors le rapport “signal sur bruit” comme le rapport entre la valeur de l’intercorrélacion maximale en présence de signal et la largeur de la distribution en présence de bruit seul. Cette largeur peut s’écrire

$$\begin{aligned}\sigma_N &= \sqrt{\langle n \star s(\tau)^2 \rangle - \langle n \star s(\tau) \rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle n \star s(\tau)^2 \rangle}\end{aligned}$$

où les crochets $\langle \rangle$ désignent la moyenne sur plusieurs réalisations du bruit ou, ce qui est ici équivalent, la moyenne sur le temps. On a aussi remarqué que la moyenne $\langle n \star s(\tau) \rangle$ est nulle en l’absence de signal $s(t)$ dans les données.

L’amplitude du signal sera définie par

$$S \equiv |\tilde{a} \star s(\tau)|$$

Et on peut définir le rapport signal sur bruit par

$$SNR \equiv \frac{S}{\sigma_N} \quad (3.4)$$

Pour conclure, le rapport signal sur bruit SNR est une mesure de la probabilité de voir une valeur donnée de l’intercorrélacion dans l’hypothèse où les données ne contiennent que du bruit. Si le SNR est grand, cela indique qu’autre chose que du bruit seul est présent dans les données.

Filtrage optimal L’intercorrélacion mesure la ressemblance entre deux signaux, mais est-ce la meilleure manière de réaliser cette mesure ? On peut montrer que l’intercorrélacion donne le rapport signal sur bruit optimal uniquement si le bruit est un bruit blanc, c’est à dire si la densité spectrale de bruit est une constante ($P_a(f) = cte$).

En pratique, il est très rare d’avoir un bruit blanc. Nous devons donc adapter la méthode pour notre cas particulier. La mise au point de méthodes optimales de recherche d’une forme d’onde s noyée dans un bruit n a été le fruit de la guerre. C’est au début des années 1940 que les alliés en ont eu besoin lors du développement des premiers radars.

De façon très générale, on cherche à définir un filtre Q qui est basé sur une version modifiée de la forme d'onde s recherchée, de façon à obtenir un rapport signal sur bruit optimal. Et on utilise toujours l'intercorrélacion, notée S , cette fois entre les données du détecteur ($a(t) = n(t) + s(t)$) et le filtre Q . Son expression est alors, dans le domaine temporel ou bien dans le domaine fréquentiel, c'est équivalent :

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)Q(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad S = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}(f)\tilde{Q}^*(f)df \quad (3.5)$$

Le signal s sera ici noté

$$s(t) = \alpha C(t - t_0) \quad (3.6)$$

où C est le signal attendu mais normalisé et entrant dans la bande de fréquence au temps $t = 0$. Ceci pour définir l'amplitude du signal dans la suite.

Le bruit $n(t)$ est stochastique, on peut donc définir l'espérance mathématique de ce que nous nommerons dorénavant "signal" S et la calculer :

$$\langle S \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{a}(f) \rangle \tilde{Q}^*(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{s}(f) \tilde{Q}^*(f)df$$

où l'on a utilisé le fait que $\langle \tilde{a}(f) \rangle = \langle \tilde{n}(f) + \tilde{s}(f) \rangle$ et que $\langle \tilde{n}(f) \rangle = 0$ puisque n est un bruit stochastique stationnaire et qu'on peut considérer son espérance comme nulle. Si elle ne l'est pas, ce sera une constante qu'on peut soustraire des données. On utilise aussi $\langle \tilde{s}(f) \rangle = \tilde{s}(f)$ puisque s est une forme d'onde déterministe.

Nous avons défini S comme le "signal" qui nous intéresse, dans l'espace des résultats de l'intercorrélacion. On peut aussi définir le "bruit" comme

$$N = S - \langle S \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{a}(f) - \tilde{s}(f))\tilde{Q}^*(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{n}(f) \tilde{Q}^*(f)df$$

On a bien sûr, comme vu ci-dessus, $\langle N \rangle = 0$. Mais, pour avoir l'écart-type de la distribution de bruit ($\sigma_N = \langle N^2 \rangle - \langle \tilde{a}(f) \rangle^2$), on peut calculer $\langle N^2 \rangle$ qui n'a aucune raison d'être nul :

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f')\tilde{Q}(f)\tilde{Q}^*(f')df df' \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f') \rangle \tilde{Q}(f)\tilde{Q}^*(f')df df' \end{aligned}$$

L'équation 3.2 permet de trouver, après quelques calculs

$$\langle \tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f') \rangle = \frac{1}{2} S_h(|f|) \delta(f - f')$$

où $S_h(|f|)$ est la densité spectrale de puissance unilatérale. La notation S_h est une notation traditionnelle, ce pour quoi nous l'avons adoptée (voir la définition 3.3). Ceci permet d'écrire

$$\langle N^2 \rangle = \int_0^{+\infty} S_h(|f|) |\tilde{Q}(f)|^2 df$$

Pour aller plus loin et en même temps simplifier les notations, il est naturel de définir un produit scalaire

$$(A, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(f) \tilde{B}^*(f) S_h(|f|) df \quad (3.7)$$

ce qui nous permet de réécrire $\langle S \rangle$ et $\langle N^2 \rangle$ sous la forme :

$$\langle S \rangle = \left(\frac{\tilde{s}}{S_h}, \tilde{Q} \right) \quad \text{et} \quad \langle N^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\tilde{Q}, \tilde{Q} \right)$$

Pour rappel, ce que nous voulons obtenir est un rapport signal sur bruit “optimal”, c’est à dire le plus grand possible. La définition du rapport signal sur bruit est donnée par 3.4. Ceci peut se réécrire avec nos notations :

$$SNR^2 = \frac{\langle S \rangle^2}{\langle N^2 \rangle} = 2 \frac{\left(\frac{\tilde{s}}{S_h}, \tilde{Q} \right)^2}{\left(\tilde{Q}, \tilde{Q} \right)} \quad (3.8)$$

Nous n’avons pas encore obtenu un SNR optimal, il nous faut trouver la valeur du filtre \tilde{Q} qui satisfait à un critère d’optimalité. Puisque nous avons défini un produit scalaire, le critère d’optimalité est donné par les inégalités de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} (A, B) &\leq (A, A) (B, B) \\ (A, B) &= (A, A) (B, B) \quad \text{si } A \text{ et } B \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

l’égalité, c’est à dire l’obtention de la valeur maximale de (A, B) n’étant vérifiée que si A et B sont colinéaires. Etant donné notre définition du SNR, équation 3.8, que nous voulons maximiser, il est naturel de considérer

$$\tilde{Q} \propto \frac{\tilde{s}(f)}{S_h(|f|)}$$

ce qui peut s’écrire, en se rappelant la forme de s (définition 3.6) et en se plaçant dans le domaine spectral par une transformation de Fourier :

$$\tilde{Q} = \alpha \frac{\tilde{C}(f)}{S_h(|f|)} e^{i2\pi f t_0}$$

Revenons maintenant à la définition du “signal” S que nous avons donnée au début de cette partie (3.5). S peut s’écrire

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}(f) \tilde{Q}^*(f) df = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{a}(f) \tilde{C}^*(f)}{S_h(f)} e^{-i2\pi f t_0} df$$

On reconnaît la transformée de Fourier de $\frac{\tilde{a}(f) \tilde{C}^*(f)}{S_h(f)}$. Donc si on a une forme d’onde recherchée $C(t)$ (où de façon équivalente $\tilde{C}(f)$), que l’on appelle *calque*, on pourra obtenir

un signal optimal S , et ce pour tous les temps d'arrivée t_0 , en réalisant une transformée de Fourier. C'est le résultat le plus important pour nous des méthodes de filtrage optimal. Le rapport signal sur bruit optimal est alors

$$SNR_{\text{optimal}}^2 = 2\alpha^2 \left(\frac{\tilde{C}}{S_h}, \frac{\tilde{C}}{S_h} \right) \quad (3.9)$$

Si on normalise la forme d'onde telle que $\left(\frac{\tilde{C}}{S_h}, \frac{\tilde{C}}{S_h} \right) = \frac{1}{2}$, alors

$$\langle N^2 \rangle = 1 \quad \text{et} \quad SNR^2 = \alpha^2$$

le rapport signal sur bruit est directement proportionnel à l'amplitude du signal d'onde gravitationnelle éventuellement présent dans les données.

Dans le calcul que nous avons fait ci-dessus, nous avons supposé que la distribution des valeurs du bruit était une distribution gaussienne. Et nous avons montré que dans ce cas, le filtrage que nous avons construit donnait la statistique optimale. On peut exprimer ceci de la manière suivante : si on sélectionne les événements en mettant un seuil sur le rapport signal sur bruit (que nous noterons ρ dans la suite), $\rho > \rho^*$, on garantit d'obtenir la probabilité de fausse alarme la plus basse pour une probabilité de détection donnée.

Ceci est illustré sur la figure 20 où l'on a représenté la distribution de notre variable S (ou du SNR, c'est équivalent) pour des données en présence et en l'absence de signal. Lorsque le signal est absent, la probabilité de fausse alarme, c'est à dire la probabilité de dire qu'un signal est présent alors qu'il ne l'est pas, est l'intégrale de la densité de probabilité pour $\rho > \rho^*$. Lorsque le signal est présent, la probabilité de détection est également cette intégrale mais pour une densité de probabilité différente. On remarque que dans le cas où l'on a que du bruit, on a tracé une distribution qui n'est pas une gaussienne. Il s'agit d'une distribution de Rayleigh, et la raison en est une petite complication pratique de notre méthode de filtrage optimal, que nous allons expliquer.

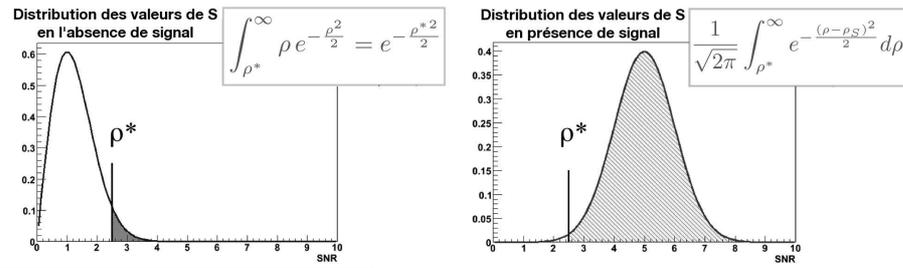


FIG. 20 –

En pratique, donc, la phase du signal, donnée par la position initiale des étoiles sur leur orbite, est inconnue. Supposons une phase ϕ , l'amplitude de l'onde gravitationnelle s'écrit

$$h(t) = A [h_c(t) \cos \phi + h_s(t) \sin \phi]$$

où h_c et h_s sont les deux formes d'onde correspondant à deux valeurs de phase $\phi = 0$ (pour h_c) et $\phi = \pi/2$ (pour h_s). On montre qu'on peut construire une variable qui tient compte de notre ignorance de la phase initiale et qui rend le rapport signal sur bruit maximal. Ceci est basé sur le fait que les deux formes d'onde sont orthogonales, leur produit scalaire est nul. Pour construire la variable, on réalise deux filtrages avec deux formes d'onde correspondant à $\phi = 0$ (on obtient un signal S_0) et $\phi = \pi/2$ (on obtient un signal $S_{\pi/2}$) puis on prend la somme quadratique

$$S = \sqrt{S_0^2 + S_{\pi/2}^2} \quad (3.10)$$

et comme la distribution obtenue en prenant la somme quadratique de deux variables aléatoires indépendantes (c'est le cas) distribuées de façon normale est une distribution de Rayleigh, on comprend la première distribution sur la figure 20.

3.1.2 Catégories d'analyse

Le filtrage optimal que nous avons décrit dans le paragraphe précédent recherche la présence d'un signal similaire à un calque (forme d'onde calculée) dans les données. Ce n'est que l'un des outils de détection et d'extraction de signal dans un bruit. Il est particulièrement adapté à la recherche de signaux de coalescence de binaires, mais il y a d'autres types d'analyse.

On peut tenter de les classer selon leur nature optimale ou non, c'est à dire selon l'utilisation ou non de calques et selon la longueur du signal recherché.

Les analyses optimales utilisant des calques sont

- pour les signaux longs, la recherche de signaux d'étoiles à neutrons en rotation
- pour les signaux courts, la recherche de signaux de coalescences de binaires

Les analyse sub-optimales, n'utilisant pas de calques sont

- pour les signaux longs, la recherche d'un signal de fond stochastique
- pour les signaux courts, la recherche de signaux impulsifs, venant par exemple de supernovæ

Même à l'intérieur de ces catégories, les analyses diffèrent selon la nature précise du signal. Par exemple, la recherche de coalescences de binaires va dépendre de la forme d'onde, de notre connaissance a priori de ses caractéristiques, de sa durée, de son contenu en fréquence et du fait qu'elle ait été déclenchée par un événement externe, comme une supernova ou un GRB (sursaut gamma), ou non.

3.1.3 Mesure de la performance du détecteur

Donner une mesure de la performance d'un détecteur n'est pas chose aisée. Cette performance dépend du type de source, de la sensibilité et du type d'analyse que l'on effectue. On définit une "distance horizon" à partir d'un phénomène choisi par convention.

En l'occurrence, on choisit une coalescence de binaire de $(1.4, 1.4) M_{\odot}$, orientée de façon optimale par rapport au détecteur et donnant un rapport signal sur bruit de 8 lorsque l'analyse se fait par filtrage optimal. La distance à laquelle se trouve une telle binaire est l'horizon optimal D_H . Si on fait une moyenne sur les orientations de la source et du détecteur, on

obtient une distance horizon moyenne

$$D_{H_{avg}} = \frac{D_H}{2.3}$$

D_H est une mesure de la performance du détecteur, mais il est clair que ce n'est pas la seule et qu'elle n'indique pas forcément la distance à laquelle on "voit" toutes les sources. Ce n'est qu'un cas particulier pris comme convention.

Pour donner un ordre d'idées, les distances horizon des détecteurs LIGO et Virgo étaient :

– pour LIGO durant le 1^{er} mois du run S6/VSR2 (juillet 2009) :

$$D_H \sim 35 \text{ Mpc}, D_{H_{avg}} \sim 15 \text{ Mpc}$$

– pour Virgo durant le run S5/VSR1 (mai-octobre 2007) :

$$D_H \sim 19 \text{ Mpc}, D_{H_{avg}} \sim 8 \text{ Mpc}$$

pour comparaison, l'amas de galaxies de la Vierge (amas "Virgo") est situé à 15-22 Mpc.

3.2 Recherche de coalescences de binaires

3.2.1 Taux d'événements attendus

Avant de décrire précisément la méthode de recherche de coalescences, il nous faut avoir une idée du taux d'événements estimé par les astrophysiciens et du taux d'événements que nous pouvons espérer obtenir dans nos détecteurs.

Taux de coalescence Les astrophysiciens expriment le taux des coalescence en termes de nombre d'événements par unité de temps et par "galaxie". Une "galaxie" est ici par définition un ensemble d'étoiles ayant une luminosité, notée $L_{10} = 10^{10} L_B$, où L_B est la luminosité du soleil dans la bande bleue. Pour référence, pour notre galaxie, $L_g = 1,7 L_{10}$.

Les taux estimés [22] varient en fonction du type d'événement considéré. Par exemple dans le cas des coalescences de systèmes binaires composés de deux étoiles à neutrons (systèmes notés BNS pour "Binary Neutron Stars"), les taux sont calculés à partir des 4 pulsars binaires connus, ce qui donne une estimation

$$R_{BNS} = 60 - 600 \times 10^{-6} \text{ evts.an}^{-1} . L_{10}^{-1}$$

Une telle incertitude peut surprendre, mais elle traduit l'ignorance que nous avons des propriétés, de la genèse et de l'évolution de ces systèmes.

Cette ignorance est encore plus grande dans le cas des systèmes binaires de trous noirs (BBH pour "Binary Black Hole"). Il n'y a aucun système observé avec certitude et les estimations se basent sur des calculs par synthèse de population qui essaient de simuler l'évolution d'une population d'étoiles, avec toutes les connaissances imparfaites que nous en avons. Le taux de coalescence est alors

$$R_{BNS} = 0,3 - 60 \times 10^{-6} \text{ evts.an}^{-1} . L_{10}^{-1}$$

et pour les systèmes composés d'un trou noir et d'une étoile à neutrons (NSBH pour "Neutron Star Black Hole") :

$$R_{NSBH} = 2 - 60 \times 10^{-6} \text{ evts.an}^{-1} . L_{10}^{-1}$$

Taux d'événements dans les détecteurs Les taux d'événements attendus dans les détecteurs doivent tenir compte des caractéristiques de ceux-ci et des analyses effectuées. A un facteur d'efficacité près, le nombre d'événements peut s'écrire

$$\mathcal{R}_{det} \propto R.\Gamma.T$$

où R est le taux astrophysique, Γ le nombre de galaxies atteignables et T le temps d'observation. Si l'on se fixe un temps d'observation de 1 an, les taux d'événements observés sont résumés dans la figure 21 pour les détecteurs actuels (Virgo+, Enhanced LIGO) et leur évolution dans le futur (Advanced Virgo, Advanced LIGO).

\mathcal{R}_{det}	NS-NS (1.4-1.4) M_{\odot}	BH-BH (8-8) M_{\odot}	BH-NS (5-1.4) M_{\odot}
<i>Virgo+, Enhanced LIGO</i>	$\sim 1/10 \text{ an}^{-1}$ incertitude : (1/50-1/3) an^{-1}	$\sim 1/10 \text{ an}^{-1}$	$\sim 1/20 \text{ an}^{-1}$
<i>Advanced Virgo, Advanced LIGO</i>	$\sim 40 \text{ an}^{-1}$ incertitude : (3-50) an^{-1}	$\sim 30 \text{ an}^{-1}$	$\sim 10 \text{ an}^{-1}$

FIG. 21 –

3.2.2 Principe de la recherche

Décrivons maintenant le principe de la recherche d'un signal de coalescence de binaire.

Signal recherché et idée du principe Le signal caractéristique d'une coalescence, que cela concerne des étoiles à neutrons ou bien des trous noirs, peut être séparé en parties correspondant à différentes étapes du processus.

- La première phase, représentant la chute des deux corps l'un vers l'autre, appelée phase spiralante, a été décrite au paragraphe 1.2.2 et un exemple de résultat est montré sur la figure 6. On peut faire un calcul analytique de la puissance émise.
- Le résultat de la phase de fusion des deux corps ne peut pas être calculé analytiquement. C'est à proprement parler, la coalescence.
- A la fin de la coalescence, il reste le plus souvent un trou noir dans un état excité. La troisième phase d'émission, celle de la relaxation, peut être décrite en termes de modes d'oscillation de l'horizon du trou noir et est donc calculable.

Le fait que l'on puisse calculer analytiquement le signal de la phase spiralante introduit l'idée que l'on peut faire une recherche par filtrage optimal de la forme d'onde dans les données du détecteur. Ceci est également vrai pour la phase de relaxation.

Calcul de la forme d'onde La forme d'onde de la phase spiralante, décrite dans le paragraphe 1.2.2, dépend en pratique de plusieurs paramètres :

$$h(t) = \mathcal{F}(M, \eta, \omega, t_c, \Phi_0, i)$$

M est la masse totale ($M = m_1 + m_2$, m_1 et m_2 les masses des composantes), η le rapport entre la masse réduite et la masse totale (c'est une variable commode pour la suite), c'est à dire $\eta = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$, t_c le temps de la coalescence, Φ_0 la phase initiale du signal et i représente l'ensemble des variables d'orientation du plan de l'orbite du système binaire par rapport au détecteur.

Certains paramètres influencent l'amplitude globale ou la phase initiale de la forme d'onde, mais pas sa forme. Par exemple, l'orientation du système ne va pas influencer sur la variation de phase, la distance entre le système et le détecteur ne va modifier que l'amplitude globale du signal détecté. On peut tenir compte de ces paramètres dans l'analyse par des méthodes simples, comme on l'a montré pour la phase initiale Φ_0 . On qualifie ces paramètres d'"extrinsèques". Les paramètres "intrinsèques", quant à eux, modifient la forme et l'évolution de la phase des formes d'onde. Ce sont dans notre cas les paramètres de masse, M et η . Si nous considérons les paramètres de spin ou d'ellipticité, ceux-ci seraient également des paramètres intrinsèques. De façon générique, dans la suite, nous appellerons λ_i les paramètres intrinsèques. Alors qu'on traite les paramètres extrinsèques par des méthodes simples et rapides, par exemple tous les temps de début sont pris en compte dans une transformée de Fourier, une variation des paramètres intrinsèques donne des formes d'onde différentes et nécessite à chaque fois un filtrage optimal avec un calque différent.

Espace des paramètres intrinsèques Concentrons-nous sur les paramètres intrinsèques et sur l'espace qu'ils forment. On supposera que cet espace est de dimension 2 (deux masses par exemple). Si nous calculons une forme d'onde correspondant à des valeurs particulières (λ_1, λ_2) et que nous réalisons un filtrage optimal comme décrit dans le paragraphe 3.1.1, nous n'aurons testé qu'un seul point de l'espace des paramètres. Ceci n'est pas tout à fait vrai, nous aurons testé en réalité une petite région de l'espace autour du point (λ_1, λ_2) . En effet, si le vrai signal $s(t)$ présent dans les données correspond à des paramètres légèrement différents $(\lambda_1 + \delta\lambda_1, \lambda_2 + \delta\lambda_2)$, le rapport signal sur bruit optimal obtenu sera légèrement plus faible que si les deux signaux (calque et signal présent dans les données) étaient rigoureusement identiques. Si nous acceptons une petite perte de rapport signal sur bruit, nous pourrions dire que nous avons détecté le signal $(\lambda_1 + \delta\lambda_1, \lambda_2 + \delta\lambda_2)$ avec le calque (λ_1, λ_2) .

Précisons un peu la notion de "région de l'espace des paramètres". La figure 22 représente la valeur du SNR obtenu en réalisant un filtrage optimal avec un calque $(\lambda_1(0), \lambda_2(0))$ et pour un ensemble de signaux $s(t)$ balayant l'espace des paramètres autour de $(\lambda_1(0), \lambda_2(0))$. Par ailleurs, on a normalisé les valeurs de SNR par rapport à la valeur maximale obtenue pour un calque et un signal qui seraient identiques. On appelle cette valeur le "match" et on obtient donc un match $M = 1$ au maximum lorsque $s(t)$ correspond aux paramètres $(\lambda_1(0), \lambda_2(0))$ et $M < 1$ partout ailleurs. La fonction décrite sur cette figure s'appelle en théorie de traitement du signal une "fonction d'ambiguïté". Pour une valeur de M fixée, par exemple $M_{min} = 0.95$, l'ensemble des points tels que $M > M_{min}$ forme une région de l'espace des paramètres, et le contour de cette région sera appelé contour d'iso-match. Choisir M_{min} revient à choisir une valeur acceptable de perte de rapport signal sur bruit lorsqu'on cherche une forme d'onde et que la forme d'onde réellement présente dans les données est différente. On choisit généralement une perte acceptable de SNR de 3%, ce qui revient à choisir $M_{min} = 0.97$.

Pour des valeurs de match suffisamment grandes, proches de 1, on peut approximer le

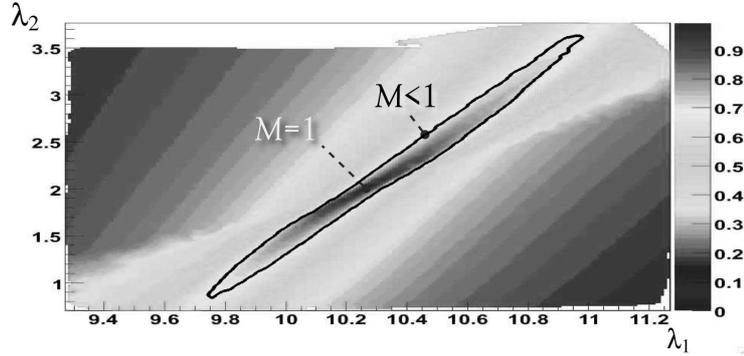


FIG. 22 – Fonction de match (SNR normalisé à 1 au centre) autour d'un point de l'espace des paramètres. Le choix d'une valeur minimale de match M_{min} dans le test d'une forme d'onde de paramètres voisins mais pas égaux au signal de référence (point central) définit une région de l'espace des paramètres. Les contours ainsi construits sont approximés par des ellipses lorsque M_{min} est suffisamment grand, typiquement $M_{min} > 0.97$

sommet de la fonction de match par un paraboléoïde. Autrement dit, on peut faire un développement quadratique et définir une métrique

$$g_{ij}(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 M(\lambda, \Lambda)}{\partial \Lambda^i \partial \Lambda^j} \Big|_{\Lambda=\lambda}$$

où les Λ^i représentent les variables de l'espace des paramètres et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ les paramètres du point central, correspondant à la forme d'onde recherchée. Le développement quadratique de la fonction de match donne

$$M(\lambda, \lambda + \delta\lambda) \approx 1 - g_{ij} \delta\lambda^i \delta\lambda^j$$

Si l'on exprime le match dans des variables appropriées, cette expression représente une très bonne approximation. Dans ce cas, les contours d'iso-match sont très bien approximés par des ellipses. Juste pour référence, on peut montrer que, parmi d'autres, des variables appropriés sont la durée du signal à différents ordres de développement post-newtonien :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{5}{256} M^{-5/3} (\pi f_0)^{-8/3} \eta^{-1} \\ \tau_1 &= \frac{5}{192} M^{-1} (\pi f_0)^{-2} \left(\frac{743}{336\eta} + \frac{11}{4} \right) \\ \tau_{1.5} &= \frac{1}{8} (\pi M)^{-2/3} f_0^{-5/3} \eta^{-1} \end{aligned}$$

avec f_0 la fréquence basse de la zone de sensibilité de l'interféromètre, M la masse totale et η le rapport entre la masse réduite et la masse totale. Quelques soient les variables, on peut faire un développement quadratique de la fonction de match, mais ces temps donnent la plus grande surface de l'espace des paramètres pour un match minimal donné.

Placement des calques dans l'espace des paramètres On ne peut pas se contenter de tester une seule forme d'onde, puisqu'on ne teste qu'une toute petite partie de l'espace des paramètres (la surface de l'ellipse). Pour tester toutes les formes d'onde, il faut paver l'espace des paramètres, c'est à dire choisir un ensemble de points dans cet espace tels que les ellipses associées le couvrent en entier. Et il ne faut pas en choisir trop, c'est à dire sur-paver, sinon le temps de calcul devient problématique. La figure 23 illustre la couverture d'un espace de paramètres.

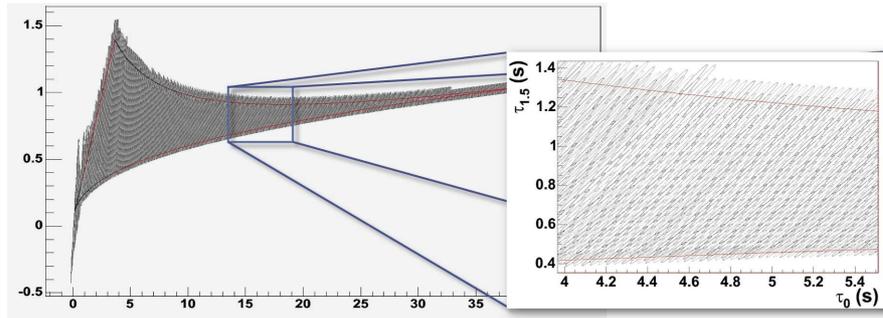


FIG. 23 – Pavage d'un espace de paramètres correspondant à des masses m_1 et $m_2 = [1; 0] M_\odot$, un match minimal $M_{min} = 0.95$ et un domaine de fréquences $F = [40; 2000]$ Hz. Le nombre de points final est de l'ordre de 11000.

3.3 Analyse des événements

A ce stade, nous avons testé si l'une au moins des formes d'onde parmi toutes celles ayant servi à paver l'espace des paramètres est présente dans les données d'un détecteur. Nous obtenons un ensemble "d'événements" (nous allons préciser la signification de ce terme) ayant chacun un rapport signal sur bruit après la procédure de filtrage optimal. Nous pourrions penser qu'il suffit de mettre un seuil sur le SNR de tous ces événements pour sélectionner ceux qui sont dignes d'être appelés "onde gravitationnelle". Ce serait mal connaître la nature et les imperfections de nos détecteurs que de penser que ce serait aussi simple.

3.3.1 Définition d'un événement

Avant d'aller plus loin, donnons quelques notions de vocabulaire qui seront nécessaires pour la suite.

Les données du détecteur sortent du système d'acquisition puis passent dans un "**pipeline**", c'est à dire un programme, d'analyse. C'est là qu'on applique la recherche par filtrage optimal. On appelle "**événement**" ou "**déclenchement**" un résultat (temps, amplitude du SNR) d'analyse par filtrage optimal ayant passé un seuil fixé. Un déclenchement aura d'autres caractéristiques, par exemple

- les paramètres du ou des calques ayant permis le déclenchement
- le ou les détecteurs dans lesquels il aura été vu

– etc...

Si l'on tient compte de tous les événements, leur nombre est très élevé et nous allons travailler sur des **distributions** d'événements.

3.3.2 Bruit de fond non gaussien

Nous avons vu que la distribution des valeurs de SNR devait présenter un caractère gaussien (3.1.1 et figure 18) ou être une distribution de Rayleigh si l'on combine deux distributions gaussiennes (equation 3.10 et figure 20). Mais ce n'est vrai dans l'absolu que si le bruit de départ est gaussien. Malheureusement, ce n'est jamais le cas. La figure 24 montre la distribution d'un ensemble d'événements sortant du "pipeline".

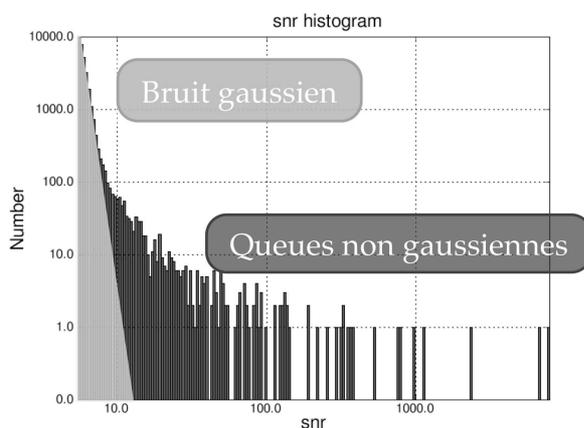


FIG. 24 – Illustration des queues non gaussiennes dans les distributions d'événements. Ces queues sont dues au caractère non gaussien du bruit du détecteur.

Les échelles des axes étant logarithmiques, la zone gris clair montre ce que devrait être une distribution gaussienne. La présence de queues non gaussiennes est évidente, et leur modélisation est très difficile, voire impossible car leur origine n'est pas toujours comprise. Il est impossible dans ces conditions de mettre un seuil sur le SNR en déclarant "tout les événements de SNR au dessus de ce seuil sont des ondes gravitationnelles" car on ne peut pas calculer la probabilité de fausse alarme, c'est à dire la probabilité qu'un événement soit déclaré bon alors qu'il ne l'est pas. Ceci était calculable dans le cas gaussien via la fonction "erfc". On verra que l'on peut par contre mesurer cette probabilité en partant des données elles-mêmes.

Une grande partie du travail sur les distributions d'événements sera la réduction des queues non gaussiennes. On peut le faire en utilisant

- des coïncidences entre détecteurs, puisqu'il est peu probable que deux détecteurs aient les mêmes sautes d'humeur au même moment
- des vetos instrumentaux. Le suivi du détecteur est très complet et un grand nombre de canaux de données représentent une mesure de son comportement ou de son environ-

nement. Par exemple, on a des canaux sismiques, des canaux mesurant divers courants, divers faisceaux optiques. On cherchera donc des coïncidences en temps entre l'événement et des artefacts instrumentaux qui pourraient indiquer un comportement anormal du détecteur

- des vetos dits “de signal”, qui cherchent à vérifier la cohérence interne du signal avec la forme d'onde attendue. On en donnera des exemples plus loin.

3.3.3 Nettoyage de la distribution d'événements

Voyons point par point les outils utilisés pour reconnaître et enlever les événements participant à la queue non gaussienne de la distribution.

Coïncidences Lorsqu'une onde gravitationnelle traversera deux détecteurs, elle produira deux événements qui seront observés de façon corrélée dans un intervalle de temps court, correspondant au temps de vol de l'onde entre les deux détecteurs. Les événements qui sont strictement dûs au bruit n'ont pas de raison a priori d'être corrélés en temps. On peut donc chercher des événements en coïncidence temporelle entre plusieurs détecteurs.

Des déclenchements dans plusieurs détecteurs (Virgo et les deux détecteurs de LIGO) seront considérés comme coïncidents lorsqu'ils ne seront séparés que d'une durée inférieure à la largeur d'une fenêtre en temps prédéterminée. Cette fenêtre sera légèrement supérieure au temps de vol maximal entre deux détecteurs, qui est de ~ 20 ms et devra tenir compte des incertitudes de mesure des temps relatifs. Il faut trouver un équilibre pour la largeur de la fenêtre en temps. Trop petite, on risque de rater certaines coïncidences. Trop grande, le taux de fausse alarme risque d'augmenter.

Par ailleurs, on demande également une cohérence des paramètres des déclenchements entre les différents sites. C'est à dire que les calques ayant répondu pour chaque détecteur soient suffisamment proches dans l'espace des paramètres (\mathcal{M}, η) .

Vetos instrumentaux La plupart des déclenchements sont dûs à des artefacts du détecteur. Un grand nombre de canaux de données enregistrent certaines variables de fonctionnement ou de conditions de l'environnement autour de l'interféromètre. On recherche dans ces canaux le signe d'anomalies du comportement de la machine ou de perturbations ayant pu passer dans le signal de sortie. Et bien sûr, on recherche une coïncidence entre ces comportements anormaux et les déclenchements du programme de recherche de coalescences de binaires.

La figure 25 montre un événement transitoire présent à la fois dans le signal de frange noire (notre “signal de sortie”), et dans divers autres canaux.

Ces événements transitoires (“glitch”) sont traqués et on cherche à comprendre l'origine du problème, la cause du “glitch”. Si il est possible de corriger le problème, on devrait pouvoir éliminer les déclenchements dont il aura été la cause. Si on n'arrive pas à trouver de solution, on signalera un intervalle de temps autour de l'événement comme veto et le programme qui suit en tiendra compte en éliminant les événements sortant de l'analyse qui se trouvent dans l'intervalle.

La complexité du détecteur entraîne un grand nombre de vetos différents. On caractérisera ces vetos par

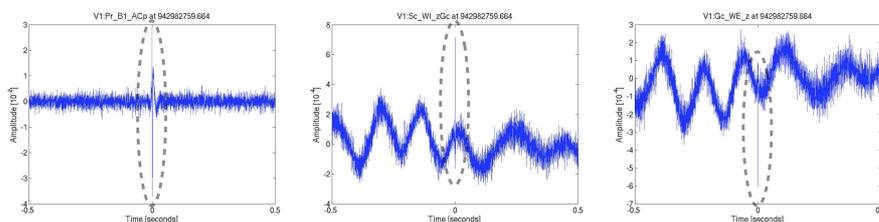


FIG. 25 – Exemple d'événement transitoire présent dans le signal de sortie et dans quelques autres canaux. Ce n'est souvent pas aussi évident à montrer que dans le cas présenté.

- leur efficacité, c'est à dire leur capacité d'élimination des faux déclenchements, surtout de grand SNR
- leur pertinence. Ils doivent être le plus souvent possible associés à des déclenchements
- leur faible coût. Ils ne doivent pas éliminer une grande fraction de données

Toutes ces caractéristiques sont testées et mesurées à l'aide d'injections logicielles et matérielles de formes d'ondes standard. Dans le cas des injections matérielles, on injecte des signaux en agissant sur les miroirs.

Les vetos peuvent être basés sur des canaux auxiliaires, en recherchant des corrélations avec les données, mais on peut aussi utiliser des combinaisons de canaux pour rechercher un problème particulier. On a par exemple utilisé certains signaux de photodiodes pour identifier des poussières qui tombaient à travers le faisceau. On peut enfin utiliser des drapeaux de qualité qui signalent certains problèmes connus.

Vetos basés sur le signal Dans le cas que nous considérons dans ces lignes, les coalescences de binaires, nous pensons connaître le signal d'onde gravitationnelle que nous voulons détecter. Ce signal se distingue des diverses perturbations transitoires non seulement par le fait qu'on peut potentiellement identifier leur origine comme étant proche du détecteur (sismique, magnétique,...), ceci grâce aux capteurs dont on a truffé l'environnement, mais également par ses caractéristiques intrinsèques. Autrement dit, un signal d'onde gravitationnelle ne "ressemble" pas à un transitoire quelconque. Par exemple, si on le découpe en bandes de fréquence, le rapport signal sur bruit sera distribué d'une manière spécifique. On peut vérifier la cohérence de cette distribution en fréquence avec le signal attendu.

Dans le cas idéal où le calque et le signal sont identiques (appelons les $\tilde{h}(f)$ dans le domaine fréquentiel), le SNR peut se ramener à l'expression (voir l'équation 3.9)

$$\begin{aligned}
 SNR^2 &= 4 \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_h(f)} df \\
 &\approx A \int_0^{f_{max}} \frac{f^{-7/3}}{S_h(f)} df
 \end{aligned}$$

où l'on a supposé que la forme d'onde pouvait s'écrire sous la forme de la figure 6, c'est à dire que l'amplitude de l'onde variait comme $f^{7/6}$. On a factorisé dans A tout ce qui ne

dépendait pas de la fréquence. f_{max} est une fréquence de coupure au delà de laquelle on sait que la contribution au SNR devient négligeable à cause de la remontée de $S_h(f)$ (voir figure 15). Pour vérifier la cohérence interne du signal, on découpe l'intervalle de fréquence en p bandes Δf_i telles que le rapport signal sur bruit d'un vrai signal soit uniformément réparti entre les p bandes :

$$\int_{\Delta f_i} \frac{f^{-7/3}}{S_h(f)} df = \frac{1}{p} \int_0^{f_{max}} \frac{f^{-7/3}}{S_h(f)} df$$

Si on note ρ le SNR total et ρ_i le SNR restreint à la bande Δf_i , on a

$$\rho = \sum_{i=0}^p \rho_i$$

et on peut construire une variable statistique

$$\chi^2 = p \sum_{i=0}^p \left(\rho_i - \frac{\rho}{p} \right)^2$$

Cette variable a une distribution de χ^2 pour un bruit gaussien et pour le signal. Par contre, dans le cas d'un "glitch" qui n'aurait rien à voir avec une onde gravitationnelle et participerait aux queues d'événements non gaussiens, les valeurs ne seront pas consistantes, ce que nous allons montrer.

Il n'y a pas de méthode analytique pour prédire le résultat. On utilise donc des injections (des formes d'onde théoriques calculées et ajoutées aux données) pour comprendre le comportement de notre veto basé sur le χ^2 . En pratique, on identifie dans le plan (χ^2, SNR) une différence nette entre les événements de bruit et ceux de signal, ce qui est illustré sur la figure 26, à gauche. On y voit en gris clair les événements correspondant à des injections logicielles et en noir des événements tout venant, dûs au bruit.

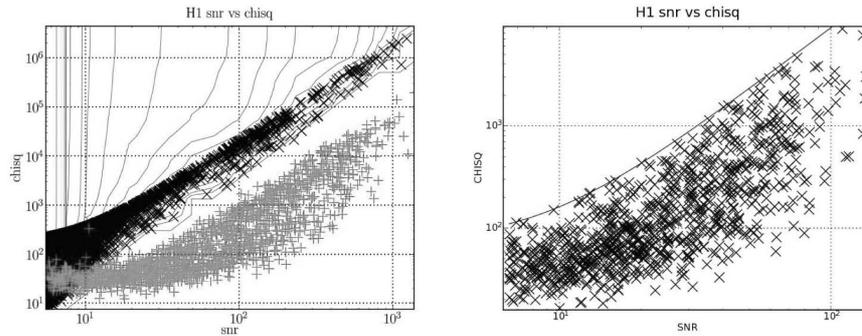


FIG. 26 – Distributions d'événements reconstruits pour du bruit de fond (premier graphe, croix noires) et pour des événements calculés puis injectés et retrouvés/reconstruits (premier graphe, croix grises et deuxième graphe). On construit une limite entre les événements de signal et ceux de bruit en évitant de rejeter des événements qu'on aurait pas modélisés (formes d'onde avec spin par exemple).

On peut donc séparer les signaux du bruit de fond en établissant une limite. Cette limite est paramétrisée de façon phénoménologique, c'est à dire sur un fondement purement expérimental ou pratique, par une fonction dépendant du SNR à travers le χ^2 :

$$\xi^2 = \frac{\chi^2}{p(1 + \delta^2 p^2)}$$

et l'on ajuste p et δ pour ne pas rejeter de vrais signaux. Mais le seuil ne doit pas être trop étroit pour ne pas risquer de rejeter des signaux réels mais que nous n'aurions pas simulé, comme par exemple des signaux de coalescence avec spin ou incluant la phase de relaxation.

La règle générale est que le χ^2 est plus grand pour des événements de bruit de fond que pour les signaux.

3.3.4 Analyse statistique

Choix d'une variable statistique La variable statistique que nous avons considéré jusqu'à présent est le rapport signal sur bruit ("SNR"). Mais elle ne concernait qu'un seul détecteur. Lorsque nous avons plusieurs détecteurs et des événements coïncidents, il faut construire une autre variable. C'est ce que l'on appelle le rapport signal sur bruit combiné ρ_c . Il s'agit de la somme quadratique des SNR individuels ρ_i :

$$\rho_c^2 = \sum_i \rho_i^2$$

Plus généralement, on va voir que l'on cherche à améliorer cette variable statistique pour qu'elle présente le moins possible de queues non gaussiennes.

Estimation du bruit de fond Avec un seul détecteur, il est très difficile de savoir quelle forme aurait la distribution d'événements purement fortuits, de bruit de fond, qui ne seraient avec certitude pas dûs à des ondes gravitationnelles. Avec plusieurs détecteurs, cela devient possible, de la façon suivante.

Prenons l'exemple de deux détecteurs (appelés ici "Virgo" et "Hanford 1"). Les flux de données vont être analysés de façon indépendante et donner un ensemble de déclenchements dans chaque détecteur. Certains de ces déclenchements seront en coïncidence, comme illustré sur la figure 27A. A ce stade, nous ne savons pas si ce sont des déclenchements dûs à des ondes gravitationnelles. Par contre, si l'on décale en temps l'un des flux de données par rapport à l'autre (figure 27B), des déclenchements qui n'avaient certainement rien à voir l'un avec l'autre vont se retrouver en coïncidence.

On forme la distribution en fonction de la variable statistique ρ_c de tous les événements coïncidents dans les données décalées ainsi construits. Ceci forme une très bonne approximation de ce que sont les événements de fond, dans le cas où, avec certitude, il n'y aurait pas d'onde gravitationnelle dans les données.

On compare ensuite les distribution de signal (sans décalage) et de fond (avec décalage), voir la figure 28. Si les deux distributions sont consistantes, on en conclut que la détection est peu probable. Sinon, les événements candidats du signal qui sont manifestement au dessus de la distribution de fond sont soumis à un ensemble de contrôles supplémentaires (une "check-list") dont nous reparlons plus loin.

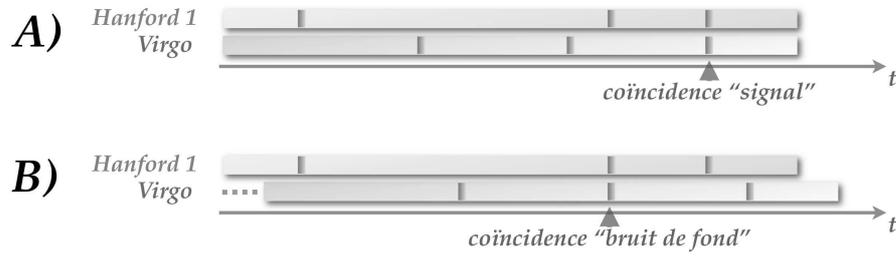


FIG. 27 – Illustration de la méthode des décalages pour estimer le bruit de fond des événements en coïncidence entre deux détecteurs. Sans décalage entre les données (cas A), une coïncidence entre événements peut être un bruit ou un signal. Avec décalage (cas B), les coïncidences sont toutes fortuites et leur distribution donne une approximation du bruit de fond des vrais événements.

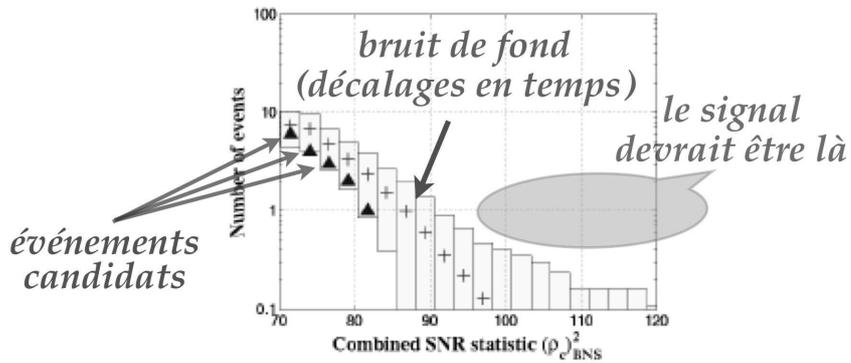


FIG. 28 – Illustration de la comparaison entre une distribution de bruit de fond, produite à l’aide de la méthode des décalages, et la distribution des événements candidats (à décalage nul).

Amélioration de la variable statistique Comme nous l’avons dit, on cherche à améliorer la variable statistique pour faciliter la prise de décision sur le statut “bruit” ou “signal” d’un événement. On peut le faire en incorporant certaines variables, comme le χ^2 ou bien en se spécialisant sur un domaine de masse ou de paramètres donné, si la variable statistique ne se comporte pas identiquement dans tous les domaines.

Certaines des améliorations successives sont

- *le SNR effectif* qui donne un poids plus faible aux événements de grand χ^2 . Sa forme a été trouvée de manière empirique :

$$\rho_{eff}^2 = \frac{\rho^2}{\sqrt{\left(\frac{\chi^2}{2p-2}\right) \left(1 + \frac{\rho^2}{250}\right)}}$$

et ceci est illustré sur la figure 29

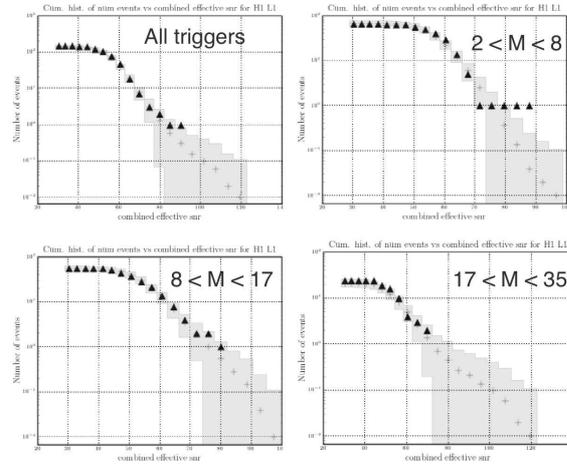


FIG. 29 – Comparaison entre une distribution de bruit de fond et la distribution des événements candidats (à décalage temporel nul). On constate que les distributions sont différentes pour différentes régions de l’espace des paramètres.

Cette variable statistique donne malheureusement des taux de fausse alarme qui sont différents selon les régions de l’espace des paramètres (masses des composantes du système binaire par exemple). Alors on introduit...

- la *IFAR* (“*Inverse False Alarm Rate*”) qui tient compte du fait que les contributions au taux de fausse alarme sont différentes selon les régions de l’espace des paramètres. On range les événements par l’inverse du taux de fausse alarme autour du temps de l’événement. Celui-ci est calculé à l’aide des distributions de fond, créées à l’aide de décalages en temps, comme indiqué dans le paragraphe précédent. La figure 30 montre des exemples de distributions de IFAR.

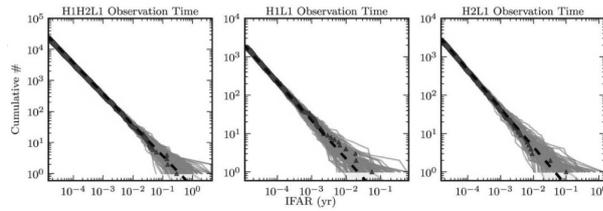


FIG. 30 – Exemples de distribution en IFAR (“*Inverse False Alarm Rate*” ou taux de fausse alarme inverse). Ceci permet de tenir compte des contributions différentes au taux de fausse alarme des différentes régions de l’espace des paramètres.

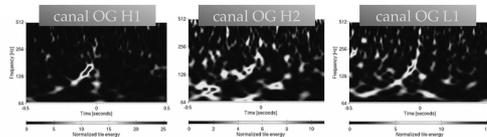
Le problème est que, bien que toutes les catégories donnent la même contribution, leur sensibilité aux vrais événements diffère. Alors on introduit...

- la *vraisemblance* (“*Likelihood*”) qui tient compte du fait que chaque catégorie ou région de l’espace des paramètres a une sensibilité différente aux vrais événements. La

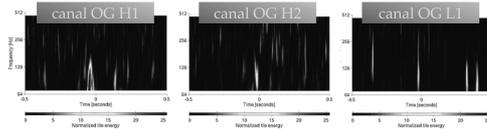
vraisemblance est construite en attribuant un poids au IFAR, poids qui correspond à la probabilité d’observer un signal selon son amplitude.

Investigations sur un événement Lorsqu’un événement est considéré comme intéressant, c’est à dire au dessus du seuil pour une variable statistique donnée et passant les tests et vetos de qualité de données, on va le regarder d’un peu plus près. Ceci consiste à observer l’état du détecteur, à procéder à un examen minutieux des caractéristiques de l’événement, à réaliser des spectrogrammes, etc... On utilise pour cet examen des outils aidant à distinguer une onde gravitationnelle d’un artefact instrumental. Un exemple est donné sur la figure 31 ainsi qu’une liste détaillée des vérifications.

Injection hardware, chirp visible dans H1 et L1



Déclenchement bruit de fond (décalage en temps)



Check-list de détection

- Significane statistique de l’événement
- Etat des interféromètres
- Vérification de la présence de causes environnementales ou instrumentales
- Apparence du candidat
- Vérification de la cohérence des paramètres estimés du candidat
- Vérification de l’intégrité des données
- Vérification de la robustesse de la détection (ex: versus les incertitudes de calibration)
- Application de pipelines d’analyse cohérente en réseau
- Vérification de la coïncidence avec des recherches non-OG : autres détecteurs EM ou de particules

FIG. 31 – Lorsqu’un événement est considéré comme intéressant, on réalise une série de vérifications supplémentaires destinées à voir si on a raté un comportement anormal du détecteur ou une condition particulière de l’environnement.

3.3.5 Décision sur le signal ou sur les limites

Quand allons-nous décider que nous avons fait une découverte ? En physique des hautes énergies, pour annoncer une découverte, on met traditionnellement un seuil sur le rapport signal sur bruit à “ 5σ ”. c’est à dire que si un événement est à 5σ au dessus de la valeur moyenne du bruit, on le considère comme significatif. σ est ici la variance de la distribution de bruit qui est considéré comme **gaussien**. Mais comme nous l’avons vu, ça ne fonctionne pas dans notre cas à cause des queues non gaussiennes. Pour résoudre ce problème, il faut se rappeler qu’un écart de 5σ par rapport à la valeur moyenne correspond dans le cas gaussien à une probabilité d’environ 10^{-6} qu’un événement du bruit de fond ait atteint cette valeur. On a donc une probabilité de 10^{-6} de se tromper en annonçant une découverte.

Dans notre cas, on se focalise sur cette probabilité de se tromper. Elle est mesurée indirectement par le taux de fausse alarme (FAR, “False Alarm Rate”). Ce taux peut être mesuré, comme on l’a vu, par un ensemble de décalages en temps entre les données de différents détecteurs. On veut atteindre un FAR équivalent aux 5σ d’une gaussienne, c’est à dire 10^{-6} sur

la durée de notre prise de donnée. En pratique, les queues sont telles que c'est très difficile. On aura besoin de plusieurs événements et/ou d'une contrepartie optique/électromagnétique dans d'autres détecteurs, télescopes/satellites. On pense à des contreparties optiques de sursauts gamma ou bien une supernova visible.

Si aucune détection n'est intervenue sur une période de prise de données, on met des limites en distance sur les taux de coalescences de binaires pour certains modèles de populations. On peut voir un exemple déjà ancien dans [23] concernant les "runs" S3 et S4 des détecteurs LIGO.

3.3.6 Autres techniques

D'autres sujets sur lesquels nous ne nous étendrons pas peuvent être d'un certain intérêt. On peut citer les problèmes de localisation d'un événement dans le ciel, ce qui permet le pointage de certains télescopes rapides (voir 3.4.4 ci-dessous) ou bien la recherche cohérente qui considère le réseau de détecteurs comme un seul instrument [24][25].

3.4 Autres activités d'analyse

Ne pouvant être exhaustif, nous allons juste passer en revue d'autres types d'analyse de signaux d'onde gravitationnelle. La compréhension des outils que nous avons décrits auparavant (filtrage optimal, outils statistiques) reste fondamentale car ceux-ci sont utilisés par un grand nombre d'analyses.

3.4.1 Autres recherches de coalescences de binaires

Nous n'avons qu'égratigné la surface des analyses, même de la recherche de coalescences. Citons pour information :

- *La recherche de coalescences à haute masse*, de masse totale supérieure à $25 M_{\odot}$. Les signaux sont courts, de l'ordre de quelques secondes, et les phases de fusion et de relaxation deviennent des phases importantes en terme de fraction de rapport signal sur bruit apporté.
- *La recherche de signaux de relaxation des trous noirs*. Cette recherche devient importante pour des systèmes de grande masse (aux alentours de $100 M_{\odot}$ de masse totale) où la phase spiralante n'apporte plus grand chose en termes de rapport signal sur bruit.
- *La recherche de signaux en coïncidence avec des signaux astrophysiques comme des sursauts gamma (GRB)*. Pendant la période de prise de données S5 de LIGO (en 2006 et 2007), incluant la participation de Virgo entre mai et septembre 2007, 22 GRB courts ont été analysés. Les temps des GRB étant connus, il a été possible de faire une recherche approfondie de coalescences NS-NS ou NS-BH autour de ces temps [26].
- *L'amélioration des recherches par la prise en compte du spin des objets en coalescence*
- *Les injections de formes d'ondes issues de calculs de relativité générale numérique*

3.4.2 Evenements impulsifs

Nous pensons connaître la forme d'onde produite par les coalescences de binaires, du moins dans la limite de validité de la relativité générale. Ceci nous permet d'utiliser des

techniques de comparaison comme le filtrage optimal.

Mais on peut aussi vouloir détecter des événements impulsionsnels dans certains cas où on ne peut pas modéliser la forme d'onde. Les supernovæ en sont l'exemple le plus fameux. Dans ce cas, on ne peut plus utiliser de méthodes optimales, sauf à supposer certaines formes d'onde (sinusoïde amortie par exemple). On peut rechercher des signaux courts non modélisés soit sans déclenchement, sur toutes les données et dans toutes les directions, soit déclenchés par des observations astronomiques, comme les sursauts gamma ou les SGR ("Soft Gamma Repeaters").

Les étapes de l'analyse sont les suivantes

- Décomposition du signal en temps-fréquence, ce qui revient à faire une projection sur une base de fonctions, soit une base de Fourier, soit une base d'ondelettes.
- Seuil sur la puissance. On obtient un ensemble de temps correspondant à des déclenchements au dessus du seuil. Les déclenchements apparaissent généralement en paquets, il faut réaliser des regroupements.
- Teste la coïncidence de déclenchements entre détecteurs. On élimine les déclenchements qui ne seraient apparus que dans un seul détecteur.
- Etude du bruit de fond par le même genre de méthodes de décalages temporels que celles décrites dans le paragraphe 3.3.4.
- Etudes statistiques utilisant la qualité des données et des vérifications de consistance, similaires à celles décrites dans 3.3.4

On obtient un ensemble d'événements en coïncidence entre détecteurs avec une similarité pour la signification statistique, le temps, la fréquence, l'amplitude et la forme d'onde.

Un exemple typique d'analyse, bien qu'un peu ancien, est décrit dans la référence [27].

On peut citer un exemple de résultat [28] qui met une limite physique intéressante. Le sursaut gamma GRB070201, détecté par le satellite Swift, a eu la particularité d'avoir une boîte d'erreur qui couvrait une partie d'un bras spiral de la galaxie d'Andromède. De façon naturelle, on a tenté de déceler la trace d'un sursaut gamma qui serait associé à un événement dans Andromède. Des algorithmes de recherche de coalescence aussi bien que d'événements impulsifs génériques ont été tournés et les résultats sont les suivants :

- une coalescence de binaire avec des composantes de masse $1 M_{\odot} < m_1 < 3 M_{\odot}$ et $1 M_{\odot} < m_2 < 40 M_{\odot}$ est exclue avec 99% de degré de confiance.
- l'énergie E_{OG} d'un signal impulsif en ondes gravitationnelles non modélisé est telle que

$$E_{OG} < 4.4 \times 10^{-4} M_{\odot} \quad (7.9 \times 10^{50} \text{ ergs})$$

3.4.3 Signaux continus

L'une des sources d'ondes gravitationnelles possible est représentée par les étoiles à neutrons en rotation (voir paragraphe 1.2.3). Ces sources produisent un signal périodique d'amplitude donnée par l'équation 1.28 que l'on rappelle ici :

$$h_0 = \frac{4\pi^2 G}{c^4} \frac{I_{zz} \epsilon f_{gw}^2}{d}$$

Le mouvement du détecteur sur la terre et autour du soleil complique l'analyse car on obtient un signal modulé par effet Doppler.

Pour réaliser la détection de signaux périodiques, les analyses “cohérentes”, avec calques, seraient les plus sensibles. Mais les systèmes cibles ont un très grand nombre de paramètres (position, paramètres de décroissance de la période, fréquence, etc...) et les signaux sont très longs, de l'ordre de plusieurs mois. Il n'est donc pas étonnant que ceci demanderait de très grosses puissances de calcul (on parle de 10^{14} TFlops !). Pour mémoire, la puissance d'un PC standard aujourd'hui (2010) est de quelques GFlops...

L'analyse utilise donc des méthodes sub-optimales qui font se succéder

- une phase cohérente dans laquelle on réalise des transformées de Fourier de courtes tranches en temps (30 min) ou d'autres transformées si les tranches sont plus longues
- une phase incohérente qui décale les différentes transformées réalisées dans l'étape cohérente dans le diagramme temps-fréquence. On suit ainsi le décalage Doppler et la dérive en fréquence et on somme la puissance du signal dans les transformées successives.

On peut ensuite mettre ou non des poids en fonction du diagramme d'antenne et/ou de la courbe de bruit du détecteur. Pour référence, les diverses transformées qui sont utilisées ont pour nom transformée de Hough, transformée de Radon, méthode “PowerFlux”.

On met enfin des limites sur l'amplitude des ondes gravitationnelles et sur les ellipticités équatoriales.

Le lecteur intéressé pourra se référer à [29] pour de plus amples détails.

Exemples de résultats On observe que la rotation des pulsars subit un ralentissement avec le temps. Les taux de décroissance de la période de rotation \dot{P} observés vont de 10^{-12} pour les pulsars les plus jeunes à 10^{-19} pour certains pulsars dits “recyclés”. Le ralentissement peut être compris comme la conséquence du fait que l'axe magnétique du pulsar n'est pas aligné avec son axe de rotation. Ceci serait donc un effet majoritairement électromagnétique. Mais si l'on suppose que le taux de ralentissement de la rotation est uniquement dû à l'émission d'ondes gravitationnelles, on peut mettre une limite supérieure sur ce taux d'émission. Bien sûr, ce ne sera qu'une limite grossière car on ne tient pas compte d'autres effets, mais il s'agit d'un résultat déjà intéressant.

Dans le cas du pulsar du crabe, LIGO a mis une limite sur l'émission d'ondes gravitationnelles qui est maintenant très en dessous de la limite supérieure déduite du taux de ralentissement [30]. Ceci implique que moins de 2% de l'énergie disponible dans le ralentissement est émise sous forme d'ondes gravitationnelles.

3.4.4 Déclenchements externes

Une activité qui est commune à plusieurs recherches (coalescences et événements impulsifs) est celle de l'échange de déclenchements avec des détecteurs externes, électromagnétiques tels des télescopes ou de particules tels les détecteurs de neutrinos.

On part de l'idée qu'il est vraisemblable qu'une source émettant des ondes gravitationnelles émet également dans d'autres domaines. Il suffit de penser à une supernova. On est donc naturellement amené à rechercher des signaux en coïncidence non seulement entre les détecteurs d'ondes gravitationnelles répartis sur la terre mais également avec d'autres instruments. On cherche à construire une astronomie “multi-messagers”.

Le déclenchement d'une recherche peut aller dans les deux sens, soit un signal astronomique intéressant déclenche une recherche de signal dans LIGO-Virgo, soit on détecte un signal d'onde gravitationnelle et ceci déclenche la recherche rapide d'une contrepartie radio, optique, X ou autre.

Déclenchement d'une recherche dans LIGO-Virgo par une détection extérieure Cette recherche est déjà mise en place partiellement. On recherche des signaux de sursauts gamma (GRB) mais aussi des SGR ("Soft Gamma Repeaters") et des supernovæ "Core Collapse" proches.

Les projets en cours tendent à renforcer les liens avec la communauté GRB, à développer des déclenchements neutrinos pour des sources qui seraient des supernovæ ou des sources extra-galactiques et à développer des déclenchements optiques ou radio.

Recherche de contrepartie Cette recherche est encore en cours de développement. En particulier avec des télescopes grand champ, qui pourraient faire un suivi des déclenchements LIGO-Virgo. Il y a également des demandes d'observation dans les domaines X, optique et radio.

Références

- [1] Hobson Efstathiou Lasenby, *General Relativity : An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, 2006
- [2] Carroll, *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity* Addison-Wesley, 2003
- [3] Martin, *General relativity : a first course for physicists*, Prentice Hall, 1996
- [4] Weisberg and Taylor, *Astrophysical J.* 576 (2002) 942
- [5] Saulson, *Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors*, World Scientific, 1994
- [6] Gertsenshtein and Pustovoit, *Sov.Phys.*, 253 (1963) 433
- [7] Moss Miller Forward, *Applied Optics*, 10 (1971) 2495
- [8] Weiss, *Quart.Progr.Rep.Res.Lab.MIT*, 105 (1972) 54
- [9] Derome, *Le système de détection de l'expérience VIRGO dédiée à la recherche d'ondes gravitationnelles*, Thèse, 1999
- [10] Expliqué dans tous les bons livres de physique statistique !
- [11] <http://www.virgo.infn.it/>
- [12] <http://www.ligo.caltech.edu/>
- [13] <http://www.geo600.org/>
- [14] <http://tamago.mtk.nao.ac.jp/tama.html>
- [15] <http://gw.icrr.u-tokyo.ac.jp/lcgt/>
- [16] <http://www.aigo.org.au/index.php>

-
- [17] <http://sci.esa.int/lisa>
 - [18] <http://lisa.jpl.nasa.gov/>
 - [19] <http://www.et-gw.eu/>
 - [20] Max, *Methodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, vol. 1 et 2*, Masson, 1997
 - [21] Charbit, *Elements de théorie du signal : les signaux aléatoires*, Ellipses, 1996
 - [22] Abadie et al, *Predictions for the Rates of Compact Binary Coalescences Observable by Ground-based Gravitational-wave Detectors*, arXiv :1003.2480v2 [astro-ph.HE]
 - [23] Abbott et al., Phys. Rev. D 77 (2008) 062002
 - [24] Gursel and Tinto, Phys. Rev. D, 40, (1989) 3884
 - [25] Chatterji et al., Phys. Rev. D, 74, (2006) 082005
 - [26] Dietz (LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration), arXiv :1006.3393v1 [gr-qc]
 - [27] Abbott et al., Class. Quantum Grav. 24 (2007) 5343
 - [28] Abbott et al., Astrophysical J., 681 (2008) 1419
 - [29] Jaranowski and Krolak, *Analysis of Gravitational-Wave Data*, Cambridge University Press, 2009
 - [30] Abbott et al., Astrophysical J., 713 (2010) 671