3

Dynamique appliquée à des mouvements simples

Nous allons tout d'abord nous intéresser à des mouvements sous l'action de la force de gravitation, c'est-à-dire des mouvement de chute. Dans un premier temps nous négligerons les frottements de l'air (**chute libre**), puis nous les prendrons en compte.

1 La force de gravitation

1.1 Introduction

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 s'attirent. Si elles sont séparées par une distance r, la force que subit m_2 s'écrit

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_r \tag{3.1}$$

où le vecteur $\vec{u}_r$ est dirigé de m_1 vers m_2, et où G désigne la **constante universelle de la gravitation**, ou **constante de Newton**, elle vaut $G = 6{,}673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Dans le cas où une masse m est entourée de plusieurs masses m_i, la force totale subie est la somme vectorielle des forces individuelles. En appliquant cette propriété à un corps sphérique que l'on découpe en une infinité de masses élémentaires, on peut montrer la propriété suivante :

Un corps dont la masse totale M est distribuée de façon sphérique autour d'un point O exerce la même force d'attraction qu'une masse M ponctuelle placée en O.

Cette propriété n'est pas du tout évidente a priori, elle n'est d'ailleurs vraie que parce que la force varie en $1/r^2$ (elle découle directement du **théorème de Gauss** que vous verrez plus tard). On peut l'appliquer à un couple Terre/objet. À une altitude h de la surface de la Terre, cette force s'écrit

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_\oplus m}{(R_\oplus + h)^2}\vec{u}_r \tag{3.2}$$

où l'on a introduit le rayon de la Terre à $R_\oplus \approx 6378$ km et la masse de la Terre $M_\oplus = 5{,}976 \times 10^{24}$ kg, et où l'on a noté m la masse du corps. La force de gravité est alors donnée par

$$\vec{F}_p = m\vec{g}^\star \quad \text{où} \quad \vec{g}^\star \equiv -\frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2}\vec{u}_r \tag{3.3}$$

où $\vec{g}^\star$ est dirigé vers le centre de la Terre. Au niveau du sol ($h = 0$) on a $g^\star \approx 9{,}81\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

1.2 Le poids

On introduit généralement la notion de poids, plus pertinente, qui fait aussi intervenir la force centrifuge $\vec{F}_c$ liée à la rotation de la Terre sur elle-même.

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad \text{où} \quad \vec{g} \equiv \vec{g}^\star + \frac{1}{m}\vec{F}_c \tag{3.4}$$

La force $\vec{F}_c$ n'est pas colinéaire à $\vec{g}^\star$ si bien que $\vec{g}$ ne pointe pas dans la même direction que $\vec{g}^\star$. Sa norme dépend de la latitude, elle est maximale à l'équateur où sa norme vaut

$$F_c = mR_\oplus \Omega_\oplus^2 \tag{3.5}$$

où la vitesse angulaire de rotation de la Terre vaut $\Omega_\oplus \approx 1/24\mathrm{h}^{-1} = 1,16 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$. On trouve alors qu'à l'équateur,

$$\frac{F_c}{m} \approx 8,6 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} \tag{3.6}$$

ce qui est petit devant $g^\star$. En fait, les variations de densité et de relief de la Terre ont aussi une influence sur $\vec{g}$. La détermination de $\vec{g}$ constitue le domaine de la gravimétrie. On en déduit certaines caractéristiques des roches ou des sous-sols, par exemple pour rechercher des nappes de pétrole.

1.3 Variations de $\vec{g}$

Dans beaucoup de situations, on suppose que $\vec{g}$ est constant dans une région donnée de l'espace. Il s'agit d'une approximation, dans la mesure où $\vec{g}$ varie en direction et en norme d'un point à l'autre. Estimons cette variation, dans le cas d'un mouvement de chute sur une distance verticale $h = 10$ m. La variation de la norme de $\vec{g}$ est donnée par

$$\delta g \approx \left.\frac{dg}{dh}\right|_{h=0} \delta h = \frac{-2GM_\oplus m}{R_\oplus^3}\,\delta h$$

soit

$$\frac{\delta g}{g} \approx \frac{-2\delta h}{R_\oplus} \approx 3 \times 10^{-6}$$

La valeur de g varie de quelques millionièmes sur une hauteur de 10 m. On peut généralement ne pas tenir compte de cette variation, en pratique.

Exercice : calculer la valeur de g à l'atlitude de la station spatiale internationale (de l'ordre de 350 km). On trouve environ 90 % de la valeur à la surface de la Terre.

1.4 La chute libre

Un corps soumis à la seule action de la gravité est dit en **chute libre**. L'équation du mouvement s'écrit, en négligeant les effets liés à la rotation de la Terre (force de Coriolis) et en supposant que $\vec{g}$ est constant,

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad \text{soit} \quad \vec{a} = \vec{g} \tag{3.7}$$

[subtilité : on a simplifié deux masses dont les significations physiques sont a priori différentes, mais en fait non... masse inertielle et masse gravitationnelle, principe d'équivalence] La masse m n'intervient pas dans l'équation du mouvement. En chute libre (sans frottement), tous les corps ont le même mouvement de chute. On raconte que Galilée a mis cet effet en évidence depuis le haut de la Tour de Pise, mais la réalité historique est douteuse, et les corps sont soumis à des frottements qui gênent l'expérience. Par contre, les astronautes de la mission lunaire Apollo XV ont réalisé (et filmé) cette expérience sur la Lune, avec une plume et un marteau.

Maths : détermination de l'équation horaire

La relation fondamentale de la dynamique donne l'accélération du système auquel on s'intéresse, et on voudrait en déduire certaines informations intéressantes, comme l'**équation horaire**, c'est-à-dire la position en fonction du temps, ou la **trajectoire**, c'est-à-dire l'équation de la courbe que le système décrit dans l'espace.

Considérons un corps lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. La RFD permet d'écrire $\vec{a} = \vec{g}$. Dans un référentiel cartésien $Oxyz$, dans lequel on choisit l'axe z vertical et dirigé vers le haut, et l'ace x tel que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ soit contenue dans le plan xOz (pas de composante suivant y). Cette équation vectorielle s'écrit, en explicitant les coordonnées de $\vec{a}$ et $\vec{g}$,

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

ce qui se décompose en trois équations

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

Intégrons cette équation, c'est-à-dire déterminons les expressions de $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ qui, lorsqu'on les dérive, redonnent les équations précédentes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{cte} \\ \dot{y} = \mathrm{cte}' \\ \dot{z} = -gt + \mathrm{cte}'' \end{cases}$$

où il ne faut surtout pas oublier les constantes d'intégration ! Le vecteur vitesse est donné à tout instant par

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{cte} \\ \mathrm{cte}' \\ -gt + \mathrm{cte}'' \end{pmatrix}$$

Au temps initial ($t = 0$), il vaut donc

$$\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{cte} \\ \mathrm{cte}' \\ \mathrm{cte}'' \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur des constantes à partir de ce que l'on sait du mouvement initial. Le vecteur vitesse est initialement donné par

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_x^0 \\ 0 \\ v_z^0 \end{pmatrix}$$

on a donc $\mathrm{cte} = v_x^0$, $\mathrm{cte}' = 0$ et $\mathrm{cte}'' = v_z^0$, soit

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x^0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_z^0 \end{cases}$$

On intègre une nouvelle fois, ce qui donne

$$\begin{cases} x = v_x^0 t + \mathrm{cte} \\ y = \mathrm{cte}' \\ z = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_z^0 t + \mathrm{cte}'' \end{cases}$$

où l'on a introduit trois nouvelles constantes d'intégration. Le vecteur position a pour coordonnées, à tout instant,

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x^0 t + \text{cte} \\ \text{cte}' \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_z^0 t + \text{cte}'' \end{pmatrix}$$

À l'instant initial, la position s'écrit donc

$$\vec{r}(t=0) = \begin{pmatrix} \text{cte} \\ \text{cte}' \\ \text{cte}'' \end{pmatrix}$$

La détermination des constantes fait intervenir le position initiale du corps. Celle-ci dépend de l'origine du repère qui a été choisie. Par exemple, si l'origine a été choisie au sol, à la verticale du système, celui-ci a pour coordonnées initiales $x = y = 0$ et $z = z_0$; où z_0 désigne l'altitude initiale du point. On a alors

$$\vec{r}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

ce qui fixe les trois constantes. Finalement,

$$\boxed{\begin{cases} x = v_x^0 t \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_z^0 t + z_0 \end{cases}}$$

C'est l'**équation horaire** du mouvement. La détermination de la trajectoire est maintenant quasi immédiate : si $v_x^0 = 0$, le corps tombe verticalement et la trajectoire est une portion de droite. Si $v_x^0 \neq 0$, c'est-à-dire si le corps a initialement une vitesse latérale, alors la première équation indique que $t = x/v_x^0$, ce qu'on peut reporter dans la troisième, pour obtenir

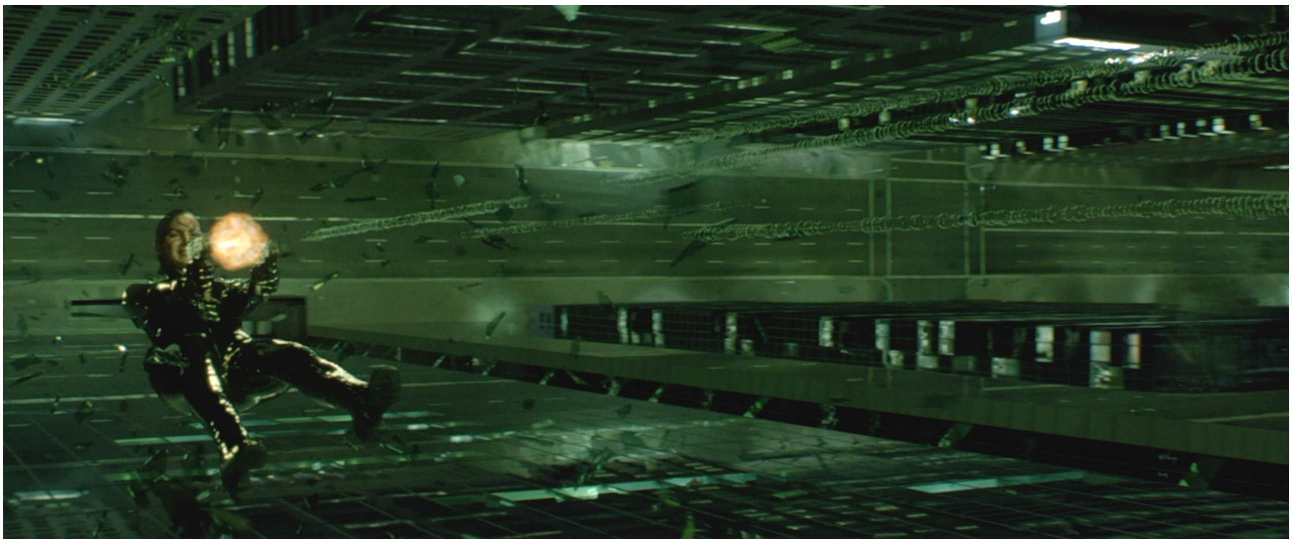
$$\boxed{z = -\frac{g}{2(v_z^0)^2}\, x^2 + \frac{v_z^0}{v_x^0} x + z_0}$$

On remarque que le mouvement ne dépend pas de la masse du système. Si on lance plusieurs corps de masses différentes avec la même vitesse initiale, ils vont suivre le même mouvement. Ils n'ont donc pas de mouvement relatif. C'est le principe des vols paraboliques en avion. L'avion suit la parabole de chute libre, si bien que vus depuis l'intérieur, les corps sont en apesanteur.

Vous traiterez plus tard le cas plus général dans lequel on prend en compte la variation de $\vec{g}$ avec la distance au centre de la Terre. C'est le problème de la trajectoire des satellites. Ces trajectoires sont des coniques (parabole, hyperbole, ellipse). La parabole que nous avons obtenue ici est en fait une approximation de l'ellipse réellement parcourue.

Remarque : on aurait pu intégrer directement l'équation vectorielle

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \tag{3.8}$$



en

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \tag{3.9}$$

puis

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0\, t + \vec{r}_0 \tag{3.10}$$

Exercices : montrer que le temps de chute depuis une hauteur h est donnée par (sans vitesse initiale)

$$t_{\text{chute}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

et que la vitesse acquise à l'issue de cette chute vaut

$$v = \sqrt{2gh}$$

Application : de quelle hauteur faut-il lâcher une voiture pour que son choc au sol soit équivalent à une collision à 50 km/h ? Réponse : d'après la formule précédente, $h = v^2/2g$ et pour avoir $v = 50\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 13{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, il faut $h \approx 9{,}8$ m, soit un peu plus de trois étages.

1.5 Remarque importante sur l'énergie

En partant de l'équation 3.7, on remarque qu'en multipliant par $\vec{v}$ les deux membres,

$$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{g} \tag{3.11}$$

et en intégrant sur le temps, on obtient

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(z - z_0) \tag{3.12}$$

On introduit l'**énergie potentielle** (ici de pesanteur) définie par

$$E_p = -mgz \tag{3.13}$$

Elle est définie à une constante additive près. La variation d'énergie cinétique E_c est opposée à la variation d'énergie potentielle. La somme $E_c + E_p$ est appelée **énergie totale**. Elle est conservée lors de la chute. Nous retrouverons cette propriété pour de nombreux types de forces (les forces conservatives).

1.6 Potentiel gravitationnel

Cette propriété est très générale, elle est reliée au fait que la force gravitationnelle exercée sur une masse m_2 peut s'écrire sous la forme

$$\vec{F}_g = -m_2 \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \quad \text{avec} \quad V(r) = gz \tag{3.14}$$

dans le cas où $\vec{g}$ est constant. Dans le cas général, on a pour la force gravitationnelle

$$\vec{F}_g = -m_2 \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \quad \text{avec} \quad V(r) = -\frac{Gm_1}{r} \tag{3.15}$$

La quantité $V(r)$ est appelée le **potentiel** gravitationnel. On montre en effet simplement que

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\,\vec{u}_r \tag{3.16}$$

Nous verrons plus loin le lien entre ce potentiel et l'énergie potentielle.

1.7 Aparté sur le gradient

Voir le complément à la fin du chapitre.

2 Les frottements fluides

2.1 Définitions

Les vraies expériences de chute libre sur Terre sont soumises à des frottements. L'air est un fluide et exerce une action sur les corps qui le traversent. L'étude des frottements fluides est un problème complexe de mécanique des fluides, il faut comprendre comment le flux d'air se répartit autour du corps en mouvement. Il existe toutefois quelques comportements simples qui décrivent remarquablement les situations dans lesquelles les vitesses sont grandes ou petites (dans un sens à définir plus loin).

Un corps sphérique de rayon R se dépaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide subit une force de traînée de même direction que $\vec{v}$ mais de sens opposé. Pour des vitesses faibles, on parle de **régime liminaire** et de **frottement visqueux**. La force est donnée par la **formule de Stokes**

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v} \tag{3.17}$$

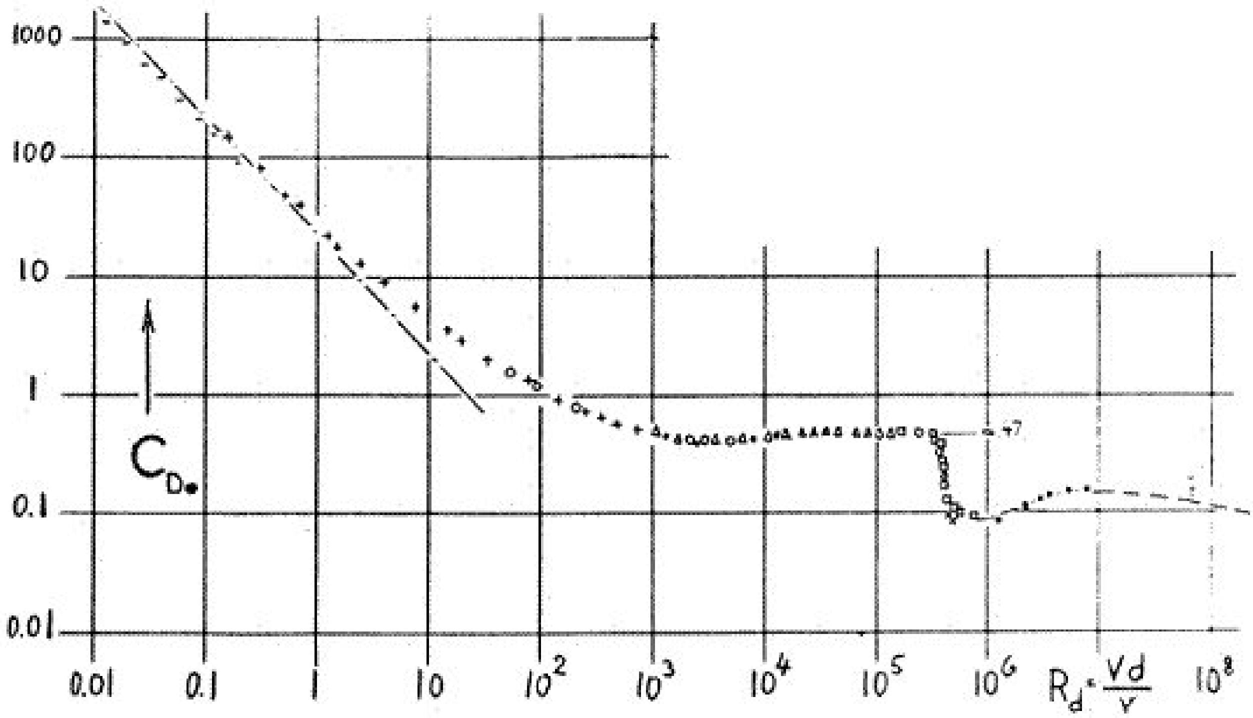
où η désigne une quantité caractéristique du fluide appelée **viscosité dynamique** et qui vaut $\eta \approx 2\times10^{-5}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ pour l'air et $\eta \approx 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ pour l'eau. Cette force de frottement est d'autant plus importante que l'objet est grand.

Pour des vitesses élevées, le régime change et aux vitesses très élevées, on parle de **frottement fluide** ou de **régime turbulent**. La force devient proportionnelle à v^2. On l'écrit alors

$$F = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2$$

où S désigne l'aire de la section du corps en mouvement dans un plan perpendiculaire à la vitesse, ρ la masse volumique et C_x un coefficient qui dépend de la forme du corps et qu'on appelle **coefficient de traînée**.

Entre les deux, c'est compliqué... La dépendance en v est intermédiaire.



Complément

La limite entre les deux régimes ne fait pas intervenir une vitesse universelle, en-dessous de laquelle on serait dans le régime visqueux et au-dessus de laquelle on serait en régime fluide. La limite fait intervenir le **nombre de Reynolds**, défini comme

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{\rho_f v L}{\eta}$$

où v désigne la vitesse de l'écoulement du fluide autour de l'objet, L la taille caractéristique que l'objet présente à l'écoulement, ρ_f la masse volumique du fluide (pas celle de l'objet !) et η sa **viscosité dynamique**, une caractéristique que nous avons décrite plus haut.

Le frottement est visqueux lorsque $\mathrm{Re} \lesssim 1$ et fluide lorsque $10^3 \lesssim \mathrm{Re} \lesssim 10^5$.

Pour un objet de 50 cm se déplaçant dans l'air, le frottement est visqueux si $v \lesssim 10\eta/\rho_f L \approx 3 \times 10^{-4}$ m·s^{-1}. Pour un objet de 1 mm, la limite devient 0,15 m/s. Pour un objet de 0,1 mm, on trouve une vitesse limite de 1,5 m/s. Dans l'eau, les vitesses limites sont environ 10 fois plus petites. On est très rapidement dans le régime des frottements fluides.

2.2 Chute d'un corps soumis à un frottement visqueux

Étudions la chute d'un objet dans l'air, dans le cas du frottement visqueux. La RFD permet d'écrire

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v} \tag{3.18}$$

soit

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dz}{dt} = -g \tag{3.19}$$

où l'on a noté

$$\frac{1}{\tau} \equiv \frac{6\pi\eta R}{m} \tag{3.20}$$

L'équation du mouvement s'écrit aussi en fonction de la vitesse $v \equiv \dot{z}$,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g \tag{3.21}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants.

Maths : rappels sur les équations différentielles

La résolution de ce type d'équation différentielle se fait en trois étapes.

Première étape On cherche la solution générale de l'équation sans second membre, ici

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

La solution la plus générale s'écrit

$$v(t) = Ke^{-t/\tau}$$

où K désigne une constante arbitraire. Vous pouvez vérifier qu'en remplaçant v par cette fonction dans l'équation ci-dessus, on trouve bien zéro.

Deuxième étape On cherche une solution particulière de l'équation complète (avec second membre).

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g$$

Ici, la fonction constante

$$v(t) = -g\tau$$

est bien une solution particulière.

Troisième étape La solution générale de l'équation complète est obtenu en sommant les deux solutions précédentes

$$v(t) = Ke^{-t/\tau} - g\tau$$

On trouve la constante arbitraire grâce aux conditions initiales. Si par exemple le corps est lâché sans vitesse initiale, soit $v(t) = 0$, alors on doit avoir

$$v(t=0) = 0 = Ke^0 - g\tau = K - g\tau$$

et donc $K = g\tau$ ce qui donne pour la solution cherchée

$$\boxed{v(t) = g\tau\left[e^{-t/\tau} - 1\right]}$$

Au bout d'un temps long, la vitesse tend vers une vitesse limite $-v_\ell = -g\tau$. On peut réécrire la vitesse sous la forme
$$v(t) = v_\ell \left[e^{-t/\tau} - 1\right]$$
On pouvait aussi calculer cette vitesse limite de manière différente, en remarquant que lorsqu'elle est atteinte, l'accélération $\vec{a}$ est nulle, soit
$$m\vec{g} = 6\pi\eta R\vec{v}_\ell$$
et donc
$$v_\ell = \frac{mg}{6\pi\eta R} \tag{3.22}$$
ce qui donne, pour un corps sphérique de masse volumique ρ,
$$v_\ell = \frac{2\rho R^2 g}{9\eta} \tag{3.23}$$
[vérification des dimensions de cette équation] Pour un parachutiste de 70 kg et de 50 cm de rayon, on trouve $v_\ell \approx 73\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$, ce qui dépasse largement le cadre de l'hypothèse des vitesses faibles ! Pour une goutte d'eau de 1 mm de rayon (une goutte de pluie), on trouve $v_\ell \approx 100\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pour une goutte d'eau de 1 à 10 microns de diamètre (typique d'un nuage), on trouve des vitesses comprises entre 1 $\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ et 0,1 $\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$. Ces gouttes tombent très lentement, elles sont en suspension.

Exercice : Calculer la taille maximale que doit avoir une sphère pour que l'hypothèse du frottement visqueux soit encore valable une fois la vitesse limite atteinte. On reporte la vitesse limite v_ℓ dans l'expression du nombre de Reynolds Re,
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_f v_\ell R}{\eta} = \frac{2\rho\rho_f R^3 g}{9\eta^2}$$
On trouve que pour avoir Re $\lesssim 10$, pour une goutte d'eau ($\rho = 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ tombant dans l'air ($\rho_f = 1{,}3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$), il faut que $R \lesssim 0{,}1$ mm.

2.3 Chute d'un corps soumis à un frottement en v^2

L'équation différentielle obtenue
$$m\ddot{z} = -mg - \frac{1}{2}C_x\rho S\dot{z}^2$$

matériaux	f_0	f
acier sur acier	0,6	0,4
bois sur bois	0,5	0,3
téflon sur acier	0,04	0,04
pneu sur béton sec	1	0,7
acier sur glace	0,1	0,05

TABLE 3.1: Quelques valeurs typiques de coefficients de frottement statique et de coefficients de frottement dynamique.

est plus compliquée à résoudre, et nous ne le ferons pas ici. On peut toutefois calculer la vitesse limite, en remarquant comme précédemment que l'accélération est nulle lorsque cette vitesse limite est atteinte,

$$\frac{1}{2}C_x\rho S v_\ell^2 = mg$$

soit

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2mg}{C_x\rho S}}$$

3 Les frottements solides

3.1 Définition du glissement

Il existe aussi des forces de frottement au contact entre deux solides. Vous étudierez ces forces plus en détail dans un cours de mécanique du solide, mais nous allons ici évoquer le glissement, un phénomène important dans la vie de tous les jours. On dit qu'un solide glisse sur un autre lorsqu'ils sont animés d'un mouvement relatif de translation.

3.2 Les lois de Coulomb relatives au frottement solide

Pour cette introduction, considérons un solide capable de glisser (ou non) sur une surface fixe. Séparons la force de réaction qu'exerce la surface (le support) sur le solide en une composante $\vec{N}$ normale à la surface et une composante tangentielle $\vec{T}$. Le frottement peut être décrit par deux lois empiriques (et approchées) appelées **lois de Coulomb** :

- si les corps glissent l'un sur l'autre, les deux composantes sont reliées par

$$\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$$

  où f désigne le **coefficient de frottement de glissement**, que l'on appelle aussi **coefficient de frottement dynamique** ou **coefficient de frottement cinétique**.
- les corps n'ont pas de mouvement relatif si la force tangentielle a une norme inférieure à une valeur de seuil $\|\vec{T}_0\|$ vérifiant

$$\|\vec{T}_0\| = f_0\|\vec{N}\|$$

  où f_0 désigne le **coefficient de frottement statique**, que l'on appelle aussi **coefficient d'adhérence**.

Les deux coefficients f et f_0 dépendent de l'état des surfaces en contact, des matériaux, de la température. Dans beaucoup de cas, $f_0 > f$ si bien qu'il faut fournir un à-coup pour faire glisser un solide initialement au repos.

3.3 Application : pousser une machine à laver

Pour mettre en mouvement latéral un objet de masse m posé au sol, il faut fournir une force au moins égale au frottement solide. La force normale est alors égale à mg, si bien qu'il faut fournir une force

$$F > f_0 mg \tag{3.24}$$

Pour une machine à laver de 100 kg, avec $f_0 \sim 1$, on trouve une force minimale d'environ 1000 N.

4 Force électrostatique

Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 s'attirent ou se repoussent. Si elles sont séparées par une distance r, la force que subit q_2 s'écrit

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r \tag{3.25}$$

où le vecteur $\vec{u}_r$ est dirigé de q_1 vers q_2, et où ϵ_0 désigne la **permittivité diélectrique du vide**, elle vaut $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

4.1 Remarque sur l'énergie

5 Force de rappel d'un ressort

Longueur au repos ℓ_0, Expression de la force en fonction de l'allongement,

$$\vec{F} = -k\vec{\ell}$$

où k désigne la constante de raideur, qui s'exprime en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

5.1 Remarque sur l'énergie

$$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

6 Mouvement d'un point matériel guidé

6.1 Mouvement sur un plan incliné

6.2 Mouvement sur un cercle

Point sur un cercle, coordonnées, vitesse et accélération,

$$\begin{array}{rclrclrcl} x &=& R\sin\theta & \dot{x} &=& R\dot{\theta}\cos\theta & \ddot{x} &=& R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta \\ y &=& R\cos\theta & \dot{y} &=& -R\dot{\theta}\sin\theta & \ddot{y} &=& -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta \end{array} \tag{3.26}$$

La RFD s'écrit

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -g &=& -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta \end{array} \tag{3.27}$$

ce qui donne finalement

$$g\sin\theta = -R\ddot{\theta} \tag{3.28}$$

Pour un cercle orienté dans l'autre sens on aurait un signe différent.

6.3 Équilibres

équilibre quand la résultante des forces est nulle et quand il n'y a pas de mouvement initial. Dans l'exemple précédent, $\theta = 0$ est position d'équilibre.

équilibre stable, équilibre instable.

7 Le gradient

7.1 Définition

La notion de gradient est défini dans un espace de dimension n quelconque. Nous allons ici considérer un espace de dimension 2, pour simplifier les notations, et nous allons noter x et y les coordonnées cartésiennes dans cet espace. Le gradient agit sur les fonctions $f(x,y)$, les applications de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, qui à chaque point de l'espace (ici du plan) associent un nombre.

Il définit en chaque point de l'espace un vecteur noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$, dont les coordonnées sont données par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \equiv \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

On le note aussi avec le symbole $\vec{\nabla}$ (« nabla »), un opérateur vectoriel de composantes

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Le gradient est un exemple simple d'**opérateur différentiel vectoriel**.

7.2 Exemple

Considérons la fonction $f(x,y) = \left[e^{-x^2/30}\cos(x/10)\cos(y/3)\right]^2$. On peut calculer les dérivées partielles $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$, et tracer les vecteurs correspondants. On obtient la figure suivante.

7.3 Propriétés

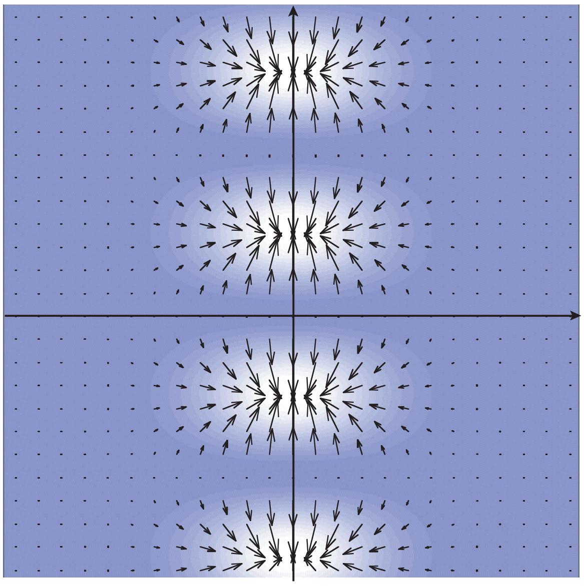
La direction du vecteur gradient indique, en chaque point, la direction dans laquelle la fonction f varie le plus rapidement. Si la fonction représente l'altitude z en fonction de la position sur une carte, le vecteur gradient indique la direction de plus grande pente. Ce vecteur pointe dans la direction des f croissants.

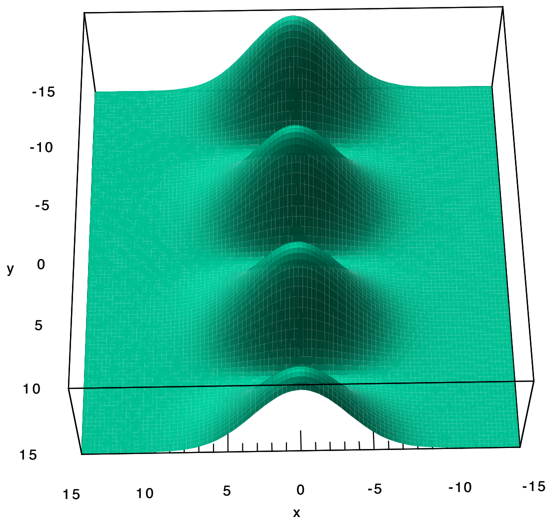
Quand on se déplace dans la direction de $\vec{\nabla} f$, la fonction f augmente. Plus précisément, on a la propriété

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\ell} \tag{3.31}$$

où $d\vec{\ell}$ représente un déplacement élémentaire et df la variation de f à l'issue de ce déplacement. C'est la généralisation à une fonction de plusieurs variables de

$$df = \frac{df}{dx}\,dx$$





On en déduit immédiatement que $df = 0$ quand le déplacement est orthogonal au gradient. En effet, le vecteur gradient est orthogonal aux lignes ou aux surfaces sur lesquelles f est constantes (pour une carte topographique, il s'agit des lignes de niveau).

Pour un déplacement AB petit, la relation précédente indique que

$$f(B) - f(A) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{AB} \tag{3.32}$$

Notons aussi que d'après la définition, le vecteur gradient est nul quand les dérivées de f sont nulles, c'est-à-dire en particulier quand f est extrémale (mais pas seulement, par exemple au niveau des cols entre les pics de la figure précédente, le gradient est nul mais la fonction n'est ni maximale, ni minimale. Cette propriété est déja vraie pour les fonctions d'une seule variable, qui peuvent avoir une dérivée nulle sans être extrémales).