5

Statique des fluides

Nous allons commencer à nous intéresser à des systèmes un peu plus compliqués, les fluides. Ce sont des milieux déformables, par exemple des liquides ou des gaz, et leurs propriétés peuvent varier d'un point à l'autre du milieu. Nous n'allons ici considérer que des fluides au repos et soumis à la gravité. Cette étude constitue le domaine de la **statique des fluides**.

1 Propriétés des fluides

1.1 Hypothèse du milieu continu

Les fluides sont constitués d'atomes et de molécules. Toutefois, quand on s'intéresse à un échantillon assez étendu pour contenir un grand nombre de particules, on peut décrire les fluides comme des milieux continus. Cette limite est assez facilement atteinte en pratique, un cube d'un micron de côté rempli d'eau contient environ 10^{11} molécules.

1.2 Masse volumique

En chaque point du fluide, on définit la **masse volumique** comme la masse d'un petit élément de fluide centré sur le point par le volume de cet élément,

$$\rho \equiv \frac{\delta m}{\delta V} \tag{5.1}$$

Dans les unités du système SI, elle s'exprime en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. L'eau a une masse volumique de l'ordre de $10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et l'air dans les conditions usuelles de 1,3 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ On définit aussi la **densité**, comme le rapport entre la masse volumique du milieu et celle d'un milieu de référence, par exemple l'eau pour les liquides et l'air pour les gaz.

1.3 Pression

Lorsque l'on place une surface dS dans un fluide, elle subit une force. Dans le cas général cette force peut être dirigée dans n'importe quelle direction, mais dans beaucoup de situations, elle est dirigée suivant la normale à la surface, avec un sens allant du fluide vers la surface (le fluide pousse sur la surface). On montre que dans beaucoup de fluides, la norme de la force ne dépend pas de la direction selon laquelle est orientée la surface dS. On définit alors la **pression** p par la relation

$$d\vec{F} = -p\,\vec{n}dS \tag{5.2}$$

C'est une force par unité de surface. Dans le système d'unités SI, on l'exprime en pascal, $1\,\mathrm{Pa} \equiv 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. La pression atmosphérique est de l'ordre de 1 atm $\approx 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa} = 1013\,\mathrm{hPa}$.

1.4 Autres grandeurs

On peut définir plusieurs autres grandeurs relatives au fluide, sa température, son degré d'humidité, etc. Nous ne nous intéressons ici qu'aux quantités directement reliées aux forces exercées par le fluide. Vous verrez en thermodynamique que la masse volumique et la pression d'un gaz dépendent de la température, ces trois quantités étant reliées par une équation d'état.

2 Équation de la statique des fluides

2.1 Distribution volumique des forces de pression

Nous nous intéressons maintenant aux forces subies par un corps plongé dans un fluide. Ce corps subit un force de pression sur l'ensemble de sa surface. Découpons-le en surfaces planes. Considérons pour commencer deux surfaces parallèles aux plans xOy, séparées d'une petite distance δz. Ce système est soumis à deux forces,

$$d\vec{F}_p = p(z)\vec{u}_z dS - p(z+\delta z)\vec{u}_z dS \tag{5.3}$$

ce qui peut se développer en

$$d\vec{F}_p = p(z)\vec{u}_z dS - \left[p(z) + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right]\vec{u}_z dS = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta z \vec{u}_z dS = -\frac{\partial p}{\partial z}\vec{u}_z dV \tag{5.4}$$

car $dV = dS\,\delta z$. Pour un cube constitué de 6 surfaces dS, le même raisonnement montre que la force $d\vec{F}$ a pour composantes

$$d\vec{F}_p = -\begin{pmatrix} \partial p/\partial x \\ \partial p/\partial y \\ \partial p/\partial z \end{pmatrix} \times dV \tag{5.5}$$

On est donc en présence d'une distribution volumique de force. On peut écrire cette relation en faisant intervenir le vecteur gradient, introduit au chapitre précédent.

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p = \vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \partial p/\partial x \\ \partial p/\partial y \\ \partial p/\partial z \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

et donc finalement

$$d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p \times dV = -\vec{\nabla}p\,dV \tag{5.7}$$

La force subie par un système de taille finie s'en déduit alors,

$$\vec{F}_p = -\iiint \overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p \times dV \tag{5.8}$$

Le vecteur $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p$ représente donc une densité volumique de force. On remarque que cette force est nulle si la pression est homogène. Ce sont les différences de pression qui peuvent mettre en mouvement un corps.

2.2 Équation fondamentale

Si l'on considère un fluide au repos et soumis à la gravité, cette dernière se traduit par une force. Plus précisément, si l'on s'intéresse à un élément de fluide de masse dm, que l'on isole par la pensée, la force subie s'écrit

$$d\vec{F}_g = dm \times \vec{g} \tag{5.9}$$

où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur. En écrivant que $dm = \rho\, dV$ et qu'au repos, la somme des forces subies par chaque élément de fluide est nulle, on a

$$d\vec{F}_g + d\vec{F}_p = 0 = \rho\, dV \times \vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p \times dV \tag{5.10}$$

et l'on arrive finalement à

$$\boxed{\rho\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p} \tag{5.11}$$

Le gradient de la pression est toujours dirigé selon $\vec{g}$. Les courbes d'égale pression, appelées les **isobares** sont donc horizontales. (remarquons que dans un référentiel non galiléen ce ne serait pas nécessairement le cas). On peut alors projeter cette relation sur l'axe vertical, ce qui donne, en orientant positivement cet axe vers le haut,

$$-\rho g = \frac{dp}{dz} \tag{5.12}$$

2.3 Application aux fluides incompressibles

On dit que le fluide est **incompressible** si sa densité est constante. C'est le cas, en bonne approximation, des liquides. On peut alors intégrer l'équation fondamentale entre deux altitudes z_1 et z_2, ce qui donne

$$p(z_2) = p(z_1) - \rho g \times (z_2 - z_1) \tag{5.13}$$

La pression diminue avec l'altitude, ou augmente quand l'on descend, et ce d'autant plus fortement que la masse volumique du milieu est importante. Ainsi, l'augmentation de pression est environ 1000 fois plus élevée à un mètre de profondeur dans l'eau que dans l'air.

2.4 Calcul typique

Tube en U, contenant un liquide de masse volumique ρ_1, et dans une des branches un liquide de masse volumique $\rho_2 < \rho_1$ qui flotte sur le premier. Calculer les propriétés de l'équilibre ($\rho_1\ell_1 = \rho_2\ell_2$).

2.5 Exemples

Pression dans une colonne d'eau ($\rho = 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) et de mercure ($\rho = 13{,}6 \times 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) dans le cas où le haut est soumis au vide.

Conséquence : a priori il est impossible de pomper de l'eau à plus de 10 mètres de hauteur en aspirant. On y arrive toutefois en utilisant plusieurs pompes successives, en replaçant l'eau pompée sous la pression atmosphérique au niveau de chacune d'entre elles, ou en poussant l'eau par le bas.

On peut aussi se placer dans des conditions dynamiques, le bélier hydraulique permet ainsi d'atteindre des hauteurs de pompage de 100 mètres.

Expérience du tonneau de pascal.

2.6 Force sur les parois d'un récipient

La force de pression sur une surface étant indépendante de son orientation, et ne dépendant que de l'altitude z, on en déduit que la force subie par les parois d'un récipient contenant un fluide ne dépend pas de la forme du récipient. En particulier, la force subie par le fond est donnée par $F = \rho g h S$. Chaque unité de surface est donc soumise à une force égale au poids du liquide contenu dans une colonne de hauteur h, qui peut être supérieur au poids du liquide qui le surplombe directement.

Considérons la paroi d'un barrage, soumise à l'action d'une hauteur h de fluide. La résultante des forces auxquelle est soumis le barrage à la hauteur z s'écrit

$$dF(z) = \rho g z \, dS = \rho g z \, dz \, L \tag{5.14}$$

en choisissant l'origine $z = 0$ à la surface de l'eau et où L est la largeur de l'élément de surface considéré. En intégrant sur la hauteur du barrage, on trouve

$$F = \frac{1}{2}\rho g h^2 L \tag{5.15}$$

Cette force a la même norme que le poids d'une colonne d'eau de hauteur $h/2$ pesant sur la surface hL du barrage. Pour déterminer le point d'application de cette force, calculons son moment par rapport au point O,

$$d\mathcal{M}_o(z) = \rho g z^2 \, dz \, L \tag{5.16}$$

et donc en intégrant

$$\mathcal{M}_o(z) = \frac{1}{3}\rho g h^3 L \tag{5.17}$$

Pour que le moment de la force F soit donnée par cette expression, elle doit s'appliquer à une profondeur $z = 2h/3$. Ce point est appelé **centre de poussée**.

2.7 Cas d'un fluide compressible

Pour un gaz, l'hypothèse du fluide incompressible est en général manifestement violée. L'équation fondamentale s'écrit toujours sous la forme 5.11, mais la masse volumique ρ peut dépendre de l'altitude. Pour un gaz, la masse volumique dépend de deux autres caractéristiques, la température T et la pression p. Vous verrez en thermodynamique que la relation entre ρ, p et T est appelée **équation d'état**, il en existe plusieurs selon les gaz, mais dans un très grand nombre de situations on peut utiliser la **loi des gaz parfaits**. On la connaît mieux en faisant intervenir le volume V,

$$pV = nRT \tag{5.18}$$

où n est le nombre de moles de gaz et R est la constante des gaz parfaits, valant $R = 8,314472\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$. En divisant la relation précédente par le volume et en multipliant par la masse molaire M, on arrive à

$$\rho = \frac{pM}{RT} \tag{5.19}$$

En écrivant la relation 5.11, on obtient la **loi barométrique**. [Aparté sur la résolution de ce type d'équation différentielle]. Elle s'écrit

$$p = p_0 e^{-z/z_0} \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{RT}{Mg} \tag{5.20}$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la température, M la masse molaire et p_0 la pression à l'altitude $z = 0$.

On peut remarquer que cette expression s'écrit aussi, en utilisant le fait que $R = \mathcal{N}_A k_B$,

$$p = p_0 \times e^{-mgz/k_B T} \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{RT}{Mg} \tag{5.21}$$

où m est la masse de chaque constituant du gaz. Vous verrez plus tard que cette expression est une forme de la **distribution de Maxwell-Boltzmann**, qui indique comment les constituants d'un systèmes à l'équilibre à la température T se distribuent en énergie (ici, mgz est l'énergie potentielle de pesanteur).

3 Poussée d'Archimède

3.1 Énoncé

Considérons un fluide au repos, soumis à la pesanteur $\vec{g}$ que l'on suppose constante. Si l'on isole par la pensée un volume de fluide, celui-ci est soumis à des forces dont la résultante et le moment sont nuls. Il s'agit des forces de pression et de la pesanteur. La résultante des forces de pression est donc égale à l'opposé de la force de pesanteur. Comme les forces de pression sont des forces de surface, si l'on remplace ce volume par un corps de même forme et de même taille, il est soumis aux *mêmes* forces que le fluide qu'il remplace. Ceci constitue le théorème d'Archimède.

Un corps plongé dans un fluide est soumis à une force égale en norme au poids du liquide dont il occupe le volume, appliquée au centre de gravité de ce volume

Cette force est appelée **poussée d'Archimède**, elle s'écrit

$$\vec{F}_A = -m_{\text{fluide}}\vec{g} \tag{5.22}$$

3.2 Premières conséquences

La densité moyenne du corps détermine le sens de la force totale (pression plus pesanteur) à laquelle il est soumis. La résultante de forces subies s'écrit

$$\vec{F}_A + \vec{F}_g = (m_{\text{corps}} - m_{\text{fluide}})\vec{g} = (\rho_{\text{corps}} - \rho_{\text{fluide}})\, V\, \vec{g} \tag{5.23}$$

Un corps moins dense que le fluide dans lequel il est plongé subit une force dirigée vers le haut. On se sent léger dans l'eau, et plus léger dans l'eau salée. Le corps peut éventuellement finir par atteindre la surface et flotter.

3.3 Applications

Corps flottant, exemple de la boîte rectangulaire. Remarque sur la stabilité dans le cas d'un fond lourd, puis dans le cas d'un couvercle lourd.

FIGURE 5.1: thermomètre de Galilée. La densité du liquide, et donc la flottaison d'un corps de densité donnée, dépend la température. En calibrant correctement les corps, on obtient un thermomètre.