

## Propriétés électriques de la matière

La matière montre des propriétés électriques qui ont été observées depuis l'antiquité. Nous allons distinguer les plus fondamentales de ces propriétés.

### 1 Propriétés électriques

#### 1.1 Electrification d'un corps

Les phénomènes d'électrification sont visibles de façon courante dans la vie quotidienne. Par exemple :

- La décharge que l'on ressent dans les doigts lorsqu'on sort d'une voiture en touchant sa carrosserie métallique par temps chaud et sec. Un petit truc pour éviter cette sensation très désagréable : prendre la porte à pleine main AVANT de poser son pied sur le sol. De cette façon, la décharge se répartit sur une plus grande surface et on la sent à peine.
- Les étincelles qu'on observe dans le noir en retirant un pull synthétique ou en laine par temps sec.
- L'attraction de petites poussières que produit un bâton de plastique (une règle) frotté avec de la laine.

Chacun de ces phénomènes est la manifestation de charges électriques qui apparaissent par frottement ou contact. Nous allons voir qu'il n'y a pas à proprement parler "apparition" mais plutôt transfert de charges.

#### Electrification par frottement

Lorsqu'on frotte deux corps isolants l'un avec l'autre, il se produit un transfert de charges de l'un à l'autre : c'est le phénomène de **triboélectricité**.

On dit que le corps isolant est **électrisé** par frottement. Une illustration pratique simple de ce phénomène est le frottement d'une règle en plastique avec un vêtement en laine : la règle attire alors de petits objets très légers comme des morceaux de papier.



#### *Recherche personnelle*

Recherchez ce qu'est une "liste triboélectrique" et déduisez-en des expériences simples que vous pouvez faire.

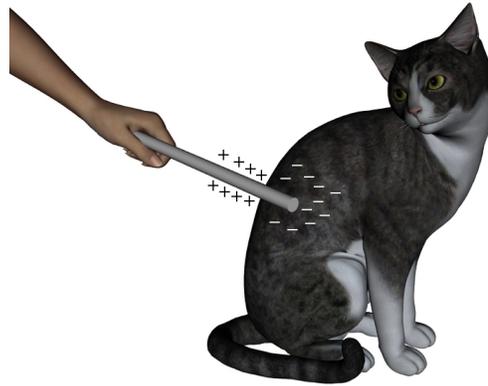


FIGURE 1.1: Electrification d'un bâton de verre par frottement sur une peau de chat (un chat isolé par les coussinets de ses pattes peut se charger sous 50000 Volts...). Le verre se charge positivement, la peau du chat négativement.

### Electrification par influence et par contact

Que se passe-t-il lorsqu'on approche deux corps électrisés l'un de l'autre ? Réalisons l'expérience suivante :

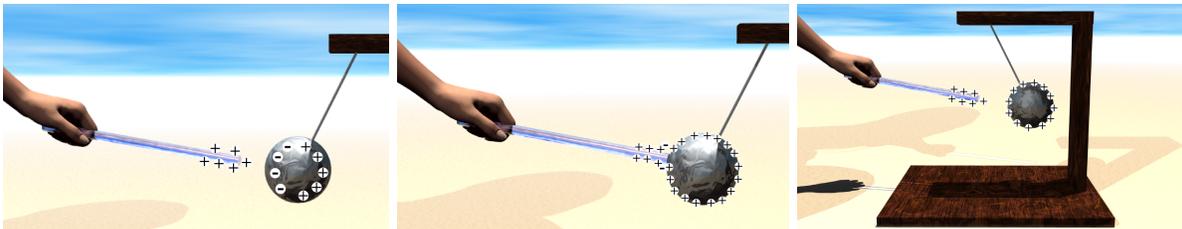


FIGURE 1.2: .

- On approche un objet (bâton) isolant chargé d'un objet isolé conducteur, comme une sphère métallique suspendue à un fil isolant (fil de nylon ou de couture) ; on suppose que la sphère n'est globalement pas chargée, du moins au début.  
Dans un conducteur, les charges négatives présentes (les électrons) peuvent bouger. Lorsque ces charges négatives bougent, elles laissent derrière elles les atomes ionisés du cristal (généralement, les corps métalliques sont formés de grains cristallins). Ces atomes ionisés sont chargés positivement puisque le matériau est neutre au départ.  
Si l'on approche un corps chargé, que l'on va supposer chargé négativement, de la sphère, les électrons présents dans le métal migrent le plus loin possible des charges positives qui s'approchent. La sphère métallique, toujours neutre globalement, voit la répartition des charges en son sein se modifier. Conclusion, le corps qui influence modifie la répartition de charges sur le corps influencé.  
Mais ce n'est pas tout. Comme les charges + sur la sphère sont plus proches des charges – du bâton, il y a une attraction. La sphère et le bâton sont attirés l'un vers l'autre.



#### Recherche personnelle

Que se passe-t-il si le bâton est chargé positivement ?

- Si on établit le contact entre les deux corps, les charges négatives présentes à la surface du bâton vont migrer sur la sphère (il y a un transfert de charges) pour équilibrer l'ensemble.
- Une fois le transfert effectué, la sphère est chargée négativement puisqu'elle était initialement neutre et qu'on lui a globalement apporté des charges négatives. Comme le bâton est encore chargé négativement

(bien que moins qu'avant le contact), les deux corps sont chargés avec le même signe, il y a répulsion une fois le transfert effectué.



### Recherche personnelle

Principe de fonctionnement des machines électrostatiques : Van de Graaf, Wimshurst

## 1.2 Conducteurs et isolants

On peut classer les matériaux selon la capacité qu'ils ont de permettre le passage des charges.

– **Matériaux conducteurs** : les atomes du matériau sont liés entre eux mais les électrons des couches atomiques périphériques n'ont besoin que de très peu d'énergie (fournie par l'agitation thermique) pour se retrouver dans un état où ils sont liés à l'ensemble des noyaux et non à un noyau particulier. On dit qu'ils sont dans la bande d'énergie de conduction. Globalement, chaque atome "voit" en moyenne un nuage d'électrons qui neutralise la charge de son noyau, mais les électrons périphériques peuvent se mouvoir et on peut approximer leur ensemble par un "gaz" d'électrons presque libres.

On parle d'**électrons libres** pour ces électrons qui peuvent se mouvoir et qui sont ceux qui vont permettre la conduction du matériau. Dans un métal, la densité d'électrons libres (= le nombre par unité de volume) est  $\sim 10^{27} \text{ m}^{-3}$ .

– **Matériaux isolants** : les électrons périphériques sont ici très liés aux noyaux et ne peuvent pas former de "gaz". Il leur est très difficile de bouger. La densité d'électrons libres est alors quasi nulle. Un **diélectrique** est un isolant.

– **Matériaux semi-conducteurs** : sans entrer dans le détail, il y a un cas intermédiaire entre conducteur et isolant, on parle de **semi-conducteur**. La densité de porteurs de charge libres y est  $\sim 10^{17}$  à  $10^{23} \text{ m}^{-3}$ . Il peut y avoir dans ce cas des porteurs de charge positives, mais ceci est hors de propos pour ce cours.



### Recherche personnelle

Quelle est la structure d'un semi-conducteur ? Qu'est-ce qu'un dopage, une bande d'énergie, une bande interdite ? Ne vous affolez pas, ce sont des notions difficiles et pas indispensables pour suivre ce cours.

## 2 Charges électriques

Le phénomène d'électrisation est connu depuis l'Antiquité, avec l'ambre. En grec "ambre" se dit "elektron". Comment est-on arrivé à la conclusion qu'il n'y avait que deux types de charges ?

### 2.1 Types de charges électriques

Sur un isolant électrisé par frottement, les charges restent localisées puisque par définition elles ne peuvent pas bouger (voir ci-dessus)

Par contre, dans une tige de métal électrisée par contact, les charges peuvent bouger et se répartissent sur toute la surface de la tige (nous verrons pourquoi uniquement sur la surface un peu plus tard).

Du Fay (1733) a été l'un des premiers à étudier l'électrisation de boules de métal suspendues à un fil isolant. Il a cherché à les électriser avec des bâtons faits de matériaux divers. Les constatations ont été les suivantes :

- si deux boules sont chargées avec le même bâton, elles se repoussent
- si l'une est chargée avec un bâton de verre frotté avec un drap, l'autre avec un bâton d'ébonite frotté avec de la laine, on a attraction entre les deux boules.



Après un grand nombre d'expériences, on en a conclu qu'il y avait deux types de charges électriques et que

- les corps portant le même type de charge se repoussent
- les corps portant des charges de type différent s'attirent

Par *convention*,

- la charge apparaissant sur l'ébonite (frotté avec de la laine) a été appelée **charge négative**
- la charge apparaissant sur le verre (frotté avec un drap) a été appelée **charge positive**

Un corps non chargé est **neutre**

## 2.2 Charges électriques élémentaires

Jusqu'au début du 20<sup>e</sup> siècle, on ne savait pas ce qu'était cette "électricité". L'hypothèse la plus simple était qu'il s'agissait d'un fluide très particulier. En 1908, Robert Andrews Millikan a réalisé une expérience qui a montré que la charge électrique ne peut pas être séparée en éléments plus petits que  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C, où C est le "Coulomb", l'unité de charge dans le système international.



*Recherche personnelle*

Décrire l'expérience de Millikan

Par ailleurs, on a montré que

- l'électron porte une charge négative élémentaire, c'est à dire la plus petite possible
- le proton porte une charge positive élémentaire

## 2.3 Conservation de la charge électrique

Dans les expériences d'électrisation, il y a toujours échange de charges, jamais de création.



Pour un système électriquement isolé, la somme algébrique des quantités de charges électriques se conserve

# 3 Densité de charges électriques

La charge électrique élémentaire est très faible. On considère qu'une charge  $Q$  macroscopique ( $Q = N \cdot e$  avec  $N$  très grand) se répartit de façon continue sur les corps macroscopiques (comme un "fluide", les anciens n'avaient pas complètement tort, leur vision était seulement incomplète). Cette distribution dépend de la géométrie du corps et du problème à traiter. La grandeur qui permet de dire quelle est la "concentration" de charge à un endroit donné est la notion de **densité**, que nous allons développer.

## 3.1 Notion de densité

Imaginons une forêt, avec ses clairières. Pouvons nous attribuer une quantité numérique (un nombre) à la "concentration" d'arbres en un endroit de cette forêt? Oui, il suffit de compter le nombre d'arbres sur une surface donnée autour de l'endroit en question et de diviser ce nombre par la valeur numérique de la surface.

Pouvez-vous estimer ce nombre en  $\text{km}^{-2}$ , ou si l'on veut en nombre d'arbres par  $\text{km}^2$ , c'est équivalent, pour une forêt dans laquelle vous vous êtes promené? Bien sûr, cette valeur sera d'autant plus faible qu'il y a un grand nombre de clairières prises en compte dans le comptage.

Si l'on généralise notre exemple, la densité d'une certaine grandeur est la valeur de la grandeur par unité de l'espace qui la contient. L'espace en question peut être à une ou plusieurs dimensions (ligne, surface, volume)

Quelques exemples :

- la densité d'arbres le long d'une route (bordée d'arbres évidemment) est le nombre d'arbres par km de route, par exemple  $20 \text{ arbres/km} = 0,02 \text{ arbres/m} = 0,02 \text{ m}^{-1}$ . L'unité "arbres/m" est la même que " $\text{m}^{-1}$ " puisqu'un nombre d'arbres n'a pas de dimension.
- la densité d'arbres dans une forêt est le nombre d'arbres par  $\text{km}^2$  ou par hectare. Donner un ordre de grandeur.
- la densité de population sur un territoire est le nombre d'habitants par  $\text{km}^2$ . Par exemple la densité moyenne de population en France peut se calculer :  $d_h = \frac{\text{nombre d'habitants}}{\text{surface du pays en km}^2} \approx 64 \cdot 10^6 / 550000 \approx 116 \text{ km}^{-2}$ . On n'oublie pas que l'unité "habitants/ $\text{km}^2$ " est la même que " $\text{km}^{-2}$ " puisqu'un nombre d'habitants n'a pas de dimension.
- la densité de plancton dans la mer est la quantité (en masse par exemple) de plancton par unité de volume d'eau de mer. Elle s'exprime en  $\text{g/m}^3$  ou  $\text{kg.km}^3$  ou toute unité équivalente.

Le calcul de la densité d'une grandeur est la valeur de cette grandeur divisée par l'extension de l'espace qui la contient. Le calcul pratique dépend de la dimension de l'espace :

- Cas à 1 dimension : soit la grandeur  $A_l$  répartie uniformément sur une courbe de longueur  $L$ , sa **densité linéique** est  $d_l = A_l/L$
- Cas à 2 dimensions : soit la grandeur  $A_s$  répartie uniformément sur une surface  $S$ , sa **densité surfacique** est  $d_s = A_s/S$
- Cas à 3 dimensions : soit la grandeur  $A_v$  répartie uniformément dans un volume  $V$ , sa **densité volumique** est  $d_v = A_v/V$

Comme on le voit, on doit décider de la longueur (ou surface ou volume) intéressante. En choisissant une longueur (ou surface ou volume) infinitésimale, et la valeur de la grandeur correspondante, forcément infinitésimale, on calcule la **densité locale** de cette grandeur. Par exemple, si on veut calculer la densité de poils sur le dos d'un chien, on prendra une petite surface de peau  $dS$  et on comptera le petit nombre de poils qui y poussent  $dN$ . La densité sera  $d\sigma = dN/dS$ . Clairement, cette densité peut varier selon l'endroit considéré...

### 3.2 Densité linéique de charge

Considérons un corps filiforme (un fil), de forme quelconque et de longueur totale  $L$ . Une charge totale  $Q$  est répartie *uniformément* sur le fil, c'est à dire que chaque morceau de fil de même longueur  $l$  porte la même charge. On peut considérer le fil comme n'ayant qu'une dimension et on définit la densité linéique de charge  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad \Rightarrow \quad Q = \lambda L \quad (1.1)$$

L'unité de densité linéique de charge est naturellement le Coulomb par mètre :  $\text{C.m}^{-1}$ .

Si la charge  $Q$  n'est pas répartie uniformément, la densité linéique  $\lambda$  calculée ci-dessus est une densité *moyenne*. Si on veut définir une densité en un point donné  $M$ , il faut considérer une longueur élémentaire  $dl$  et la charge électrique élémentaire qu'elle porte  $dQ$ . Ce sont des quantités infinitésimales. La densité linéique de charge  $\lambda(M)$  en tout point  $M$  est alors :

$$\lambda(M) = \frac{dQ}{dl} \quad \Rightarrow \quad dQ = \lambda dl \quad (1.2)$$

La charge totale est la somme de toutes les charges infinitésimales  $dQ$  le long du fil, c'est à dire l'intégrale :

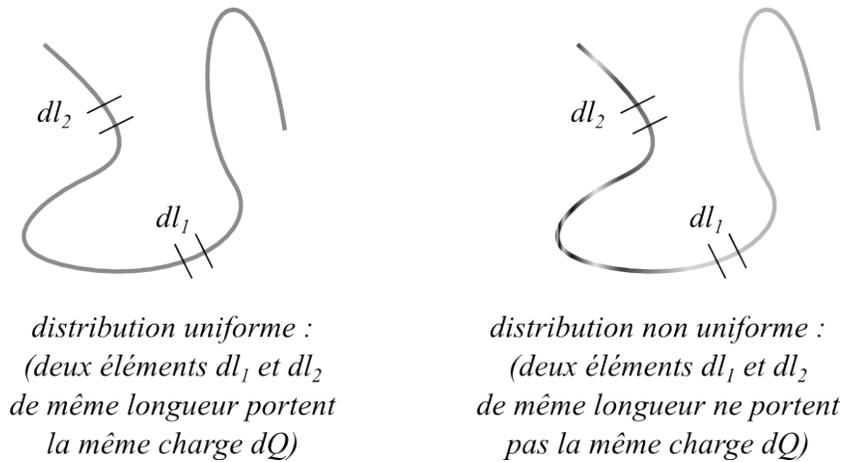


FIGURE 1.3: Illustration de la distribution de charges sur un fil. La densité de charges est symbolisée par le niveau de gris. Figure de gauche : distribution uniforme de charges, à droite : distribution non uniforme.

$$Q = \int_{M \in \text{fil}} dQ = \int_{M \in \text{fil}} \lambda(M) dl \quad (1.3)$$

### 3.3 Densité surfacique de charge

Considérons maintenant un corps matériel de surface totale  $S$ . Si la charge totale  $Q$  est répartie *uniformément* sur la surface, c'est à dire que chaque élément de surface de même valeur  $s$  porte la même charge, on définit la densité surfacique de charge  $\sigma$  :

$$\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma S \quad (1.4)$$

L'unité de densité surfacique de charge est le Coulomb par  $m^2$  :  $C.m^{-2}$ .

Si la charge  $Q$  n'est pas répartie uniformément, la densité surfacique  $\sigma$  définie ci-dessus est une densité *moyenne*. Si on veut définir une densité locale en un point donné  $M$ , il faut considérer une surface élémentaire  $dS$  et la charge élémentaire  $dQ$  qu'elle porte. Ce sont des quantités infinitésimales. La densité surfacique de charge  $\sigma(M)$  en tout point  $M$  de la surface est alors :

$$\sigma(M) = \frac{dQ}{dS} \Rightarrow dQ = \sigma dS \quad (1.5)$$

La charge totale est la somme de toutes les charges infinitésimales  $dQ$  sur la surface, c'est à dire l'intégrale :

$$Q = \int_{M \in \text{surface}} dQ = \int_{M \in \text{surface}} \sigma(M) dS \quad (1.6)$$

### 3.4 Densité volumique de charge

Considérons enfin un corps matériel de volume  $V$ . Si cette fois la charge totale  $Q$  est répartie *uniformément* dans le volume, c'est à dire que chaque élément de volume de même valeur  $v$  porte la même charge, on définit la densité volumique de charge  $\rho$  :

$$\rho = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = \rho V \quad (1.7)$$

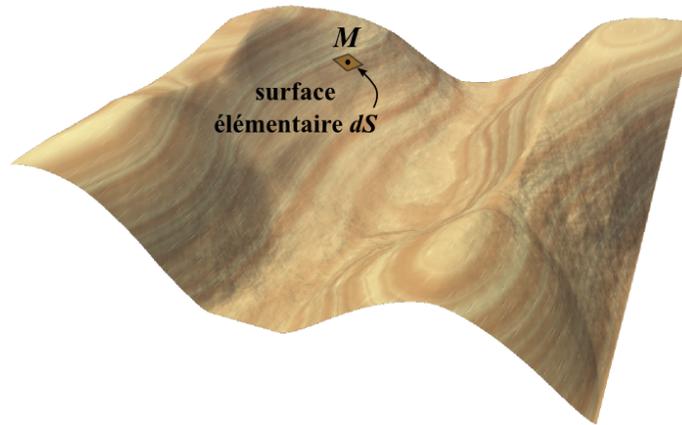


FIGURE 1.4: .

L'unité de densité volumique de charge est le Coulomb par  $\text{m}^3$  :  $\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$ .

Si la charge  $Q$  n'est pas répartie uniformément, la densité volumique  $\rho$  définie ci-dessus est une densité *moyenne*. Si on veut définir une densité locale en un point donné  $M$ , il faut considérer un volume élémentaire  $dV$  et la charge élémentaire  $dQ$  qu'il porte. Ce sont des quantités infinitésimales. La densité volumique de charge  $\rho(M)$  en tout point  $M$  du volume est alors :

$$\rho(M) = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho dV \quad (1.8)$$

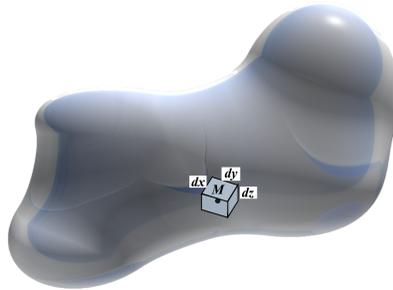


FIGURE 1.5: .

La charge totale est la somme de toutes les charges infinitésimales  $dQ$  dans le volume, c'est à dire l'intégrale :

$$Q = \int_{M \in \text{volume}} dQ = \int_{M \in \text{volume}} \rho(M) dV \quad (1.9)$$

## 4 Loi de Coulomb

### 4.1 Enoncé

Etablie en 1785 par Charles-Augustin Coulomb, elle exprime l'action qui s'exerce entre deux charges électriques ponctuelles.



### Enoncé de la loi de Coulomb :

La force qui s'exerce entre deux charges électriques ponctuelles est :

- proportionnelle à la valeur des charges
- inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare
- portée par la droite qui joint les deux charges
- répulsive si les charges sont de même signe, attractive sinon



### Recherche personnelle

Trouver le principe de fonctionnement d'une "Balance de Coulomb", ainsi que l'historique de la mesure

Soient deux charges ponctuelles  $q_A$  placée au point  $A$  et  $q_B$  placée au point  $B$ .

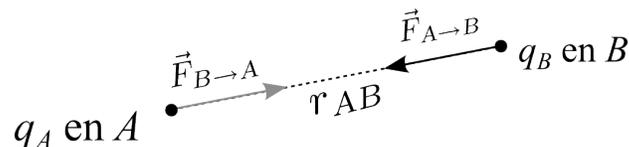


FIGURE 1.6: Loi de Coulomb. Forces s'exerçant sur deux charges en interaction.

En interprétant la loi de Coulomb sous une forme mathématique, la force électrostatique  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$  exercée **par**  $q_A$  **sur**  $q_B$  s'écrit :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = K \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \vec{u}_{AB} \quad (1.10)$$

où :

- $r_{AB}$  est la distance entre les charges
- $\vec{u}_{AB}$  est un vecteur unitaire suivant AB, dirigé de A vers B. On peut écrire ce vecteur comme le vecteur  $\frac{\vec{AB}}{AB}$  divisé par sa norme  $\|\vec{AB}\|$  :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\vec{AB}}{r_{AB}} \quad (1.11)$$

- $K$  est une constante de proportionnalité. Dans le S.I. d'unités, on a dans le vide

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{SI} \quad (1.12)$$

où  $\epsilon_0$  est la **permittivité du vide** ou **constante diélectrique du vide**. Si le milieu n'est pas le vide, on remplace  $\epsilon_0$  par la **permittivité absolue**  $\epsilon$



### Recherche personnelle

trouver ce qu'est la permittivité relative et quelle est son origine. Trouver la valeur de la permittivité relative pour la paraffine, pour l'air

Dans le vide, la force électrostatique  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$  exercée **par**  $q_A$  **sur**  $q_B$  s'écrit donc :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \vec{u}_{AB} \quad (1.13)$$

Question : action de  $B$  sur  $A$ ? lien avec le principe d'action-réaction (3<sup>e</sup> loi de Newton)

## 4.2 Cas de $N$ charges ponctuelles

On va compliquer un peu le problème et considérer maintenant le cas où l'on a plusieurs charges ponctuelles. Soit donc un système de  $N$  charges ponctuelles  $q_i$ , avec  $i = 1..N$  placées en des points  $A_i$ ,  $i = 1..N$ . Intéressons nous à une charge particulière,  $q_k$ . La force  $\vec{F}_k$  exercée sur  $q_k$  est la somme vectorielle des forces individuelles exercées par toutes les autres charges  $q_i$  avec  $i \neq k$ . La charge  $q_k$  n'exerce pas de force sur elle-même. On peut écrire :

$$\vec{F}_k = \sum_{i=1, N \text{ avec } i \neq k} \vec{F}_{A_i \rightarrow A_k} \quad (1.14)$$

$$= \sum_{i=1, N \text{ avec } i \neq k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k q_i}{r_{ik}^2} \vec{u}_{ik} \quad (1.15)$$

$$= \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1, N \text{ avec } i \neq k} \frac{q_i}{r_{ik}^2} \vec{u}_{ik} \quad (1.16)$$

avec  $r_{ik} = \left\| \vec{A}_i \vec{A}_k \right\|$  et  $\vec{u}_{ik} = \vec{A}_i \vec{A}_k / r_{ik}$ .

Exemple : Soient trois charges situées en  $A$ ,  $B$  et  $C$  selon la configuration géométrique illustrée sur la figure 1.7. On supposera toutes les charges positives et les charges en  $A$  et  $B$  égales :  $q_A = q_B$ . On cherche à calculer la force exercée sur la charge  $q_C$  par les deux charges  $q_A$  et  $q_B$  en fonction des coordonnées des charges.

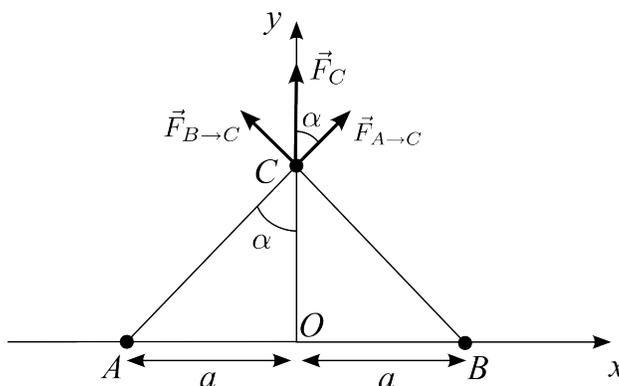


FIGURE 1.7: Configuration géométrique : trois charges en  $A(-a, 0)$ ,  $B(a, 0)$  et  $C(0, y)$

D'après ce qui précède :

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{A \rightarrow C} + \vec{F}_{B \rightarrow C} \quad (1.17)$$

Nous allons utiliser la configuration géométrique particulière du problème pour simplifier le calcul. Comme les deux forces sont symétriques par rapport à l'axe  $Oy$ , on peut écrire

$$\vec{F}_C = 2 \left\| \vec{F}_{A \rightarrow C} \right\| \cdot \cos \alpha \vec{j} \quad (1.18)$$

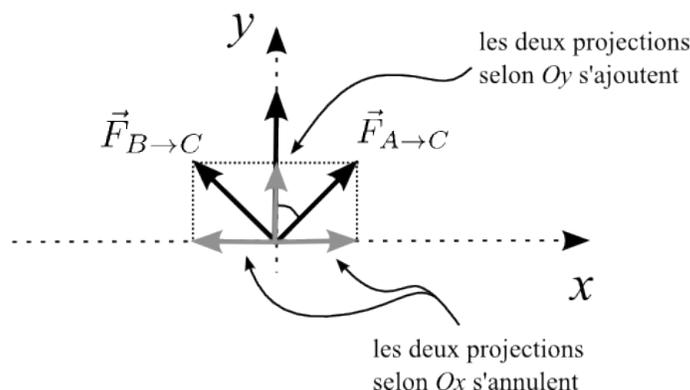


FIGURE 1.8: Dans le cas particulier de cet exercice, les projections selon  $Ox$  s'annulent, celles selon  $Oy$  s'ajoutent.

En effet, la somme des projections selon l'axe  $Ox$  est nulle si les deux vecteurs sont symétriques par rapport à  $Oy$  :

Puisque c'est le but de l'exercice, on détermine  $\cos \alpha$  et  $F_{A \rightarrow C}$  en fonction des coordonnées :

$$\cos \alpha = \frac{y}{r_{AC}} \quad \text{et} \quad F_{A \rightarrow C} = \frac{q_A q_C}{4\pi\epsilon_0 r_{AC}^2}$$

en utilisant  $r_{AC} = (y^2 + a^2)^{1/2}$  on obtient finalement

$$\vec{F}_C = \frac{q_A q_C}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{(y^2 + a^2)^{3/2}} \vec{j} \quad (1.19)$$

### 4.3 Cas d'une distribution continue de charges

La complication suivante consiste à considérer des distributions continues de charges. Si on découpe le domaine (ligne, surface, volume) sur lequel se trouvent les charges, la somme discrète que nous avons considérée pour le cas de  $N$  charges ponctuelles devient une intégrale.

Prenons comme exemple une distribution surfacique de charges. Soit un plan chargé non uniformément. Quelle force s'exerce sur une charge appelée "charge test"  $q$  que nous mettons en un point arbitraire  $M$  du plan ?

Sur la figure 1.9, on illustre une distribution de charges arbitraires par un nuage dont le niveau de gris décrit la densité de charges en un point donné.

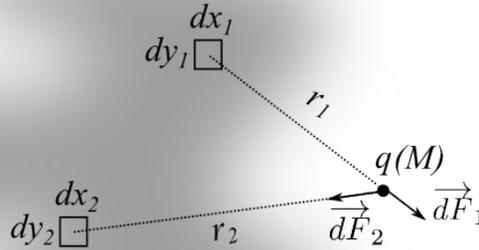
Par exemple la charge totale contenue dans la surface élémentaire  $dS_1 = dx_1 dy_1$  (autour du point  $P_1$ ) va produire sur la charge  $q$  placée en  $M$  une force (elle aussi élémentaire)  $\vec{dF}_1$ . Si on connaît la densité de charges en fonction de la position dans le plan et qu'on la note  $\sigma(P)$ , la charge dans  $dS_1$  sera

$$dq_1 = \sigma(P_1) \times dS_1$$

En appliquant la loi de coulomb, on peut trouver la force élémentaire  $\vec{dF}_1$  :

$$\vec{dF}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot dq_1}{r_1^2} \vec{u}_{P_1 M}$$

Et il faut sommer toutes les forces élémentaires produites par toutes les charges élémentaires situées sur les surfaces élémentaires qui forment la région dans le plan où sont situées ces charges. (Relisez cette phrase plusieurs fois ...).

FIGURE 1.9: Forces exercées par une distribution de charges en 2 dimensions sur une charge test  $q$ .

Une somme de quantités élémentaires est une intégrale. Ici, nous pouvons l'écrire formellement :

$$\vec{F} = \iint_{P \in \text{plan}} \vec{dF}_{\text{créée par les charges dans } dS \text{ autour de } P} = \iint_{P \in \text{plan}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot \sigma(P) \cdot dx dy}{r^2} \vec{u}_{PM} \quad (1.20)$$

Remarquez que l'intégrand (=ce qu'on intègre) est infinitésimal puisqu'il contient un terme  $dx dy$ . On pourrait réécrire cette intégrale

$$\vec{F} = \iint_{P \in \text{plan}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot \sigma(P)}{r^2} \vec{u}_{PM} dx \cdot dy \quad (1.21)$$

Evidemment, ce n'est qu'une question d'écriture. Nous ne pouvons pas résoudre ce problème sans connaître la distribution de charges  $\sigma(P)$  et sans nous être donnés un système de coordonnées qui nous permettrait de faire des calculs.



### Outils mathématiques

#### 4.4 Rappel (ou pas) : système de coordonnées

Le choix d'un système de coordonnées dépend des symétries du problème. Mais avant d'aller plus avant, il nous faut rapeler quelques fondements. Qu'est-ce qu'un système de coordonnées ?

Pour définir la "position" d'un point  $M$ , on introduit

- un point de référence  $O$  qui sera appelé l'**origine**
- le vecteur  $\vec{OM}$ , noté  $\vec{r}$ , qui sera nommé **vecteur position**.

Lorsqu'on définit un vecteur  $\vec{r}$ , on définit aussi généralement un ensemble de courbes le long desquelles on va placer des vecteurs "de base". La projection du vecteur  $\vec{r}$  sur chacune de ces courbes donne les "coordonnées" de  $\vec{r}$ .

En toute généralité, le système de coordonnées fait correspondre à chaque vecteur position un ensemble de  $N$  scalaires qui définissent ce vecteur de façon unique,  $N$  étant la dimension de l'espace. Il existe toujours une relation entre vecteur position d'une part et coordonnées, vecteurs de base d'autre part.

L'une des grandes difficultés de compréhension vient du fait que les vecteurs de base ne sont pas forcément communs à tous les vecteurs position, ils peuvent varier d'un vecteur position à l'autre. Par ailleurs les courbes ne sont pas forcément des droites. Voir par exemple ci-dessous le cas des coordonnées polaires.

Mathématiquement : vecteur  $\vec{r}$   $\Rightarrow$  espace vectoriel  $\Rightarrow$  base de l'espace  $\Rightarrow$  coordonnées du vecteur.

En pratique, les vecteurs de base sont trouvés en faisant varier très légèrement une coordonnée. La variation du vecteur position (infinitésimale) est proportionnelle au vecteur de base cherché.

Exemple : soit un système de coordonnées  $(x, y)$  à deux dimensions, que l'on trace sur un plan (la figure 1.10 représente une carte de ce système). Chaque courbe représente un ensemble de points où l'une des coordonnées varie pendant que l'autre est constante :

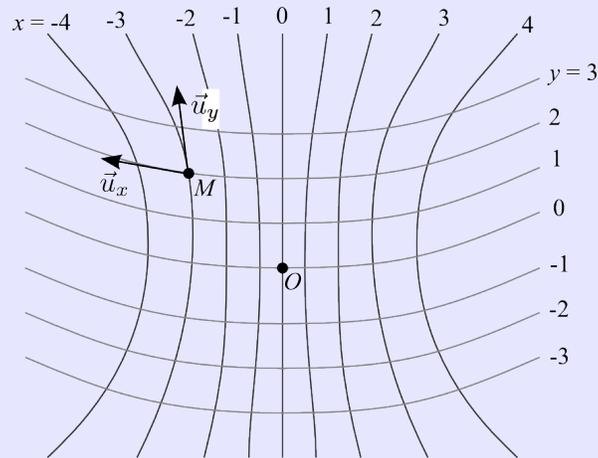


FIGURE 1.10: Système de coordonnées plan en 2D

Si l'on veut trouver la base associée au point  $M$ , on déplace légèrement celui-ci le long de chaque courbe, et on superpose un vecteur unitaire proportionnel à chaque déplacement.

Cas usuels :

### Système de coordonnées cartésiennes

Soit donc un point  $M$  quelconque, que l'on veut repérer dans un espace à 3 dimensions.

On choisit, dans l'espace vectoriel,  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ , des vecteurs unitaires formant une base orthonormée. Ces vecteurs sont indépendants du point  $M$  considéré. Ils sont associés à l'origine  $O$  et définissent trois axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . Le vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  se décompose sur la base :

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad (1.22)$$

(revoquez les projections de vecteurs et les sommes de vecteurs...)

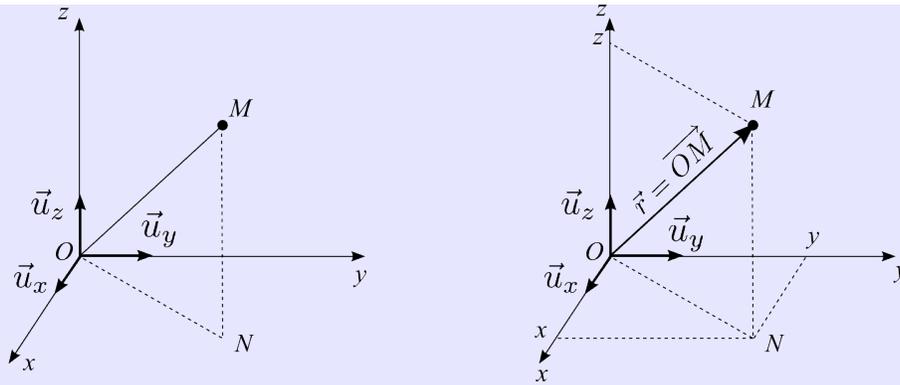


FIGURE 1.11: Système de coordonnées cartésiennes

La position de  $M$  est alors déterminée par les coordonnées de  $\vec{r}$ . Ces coordonnées sont égales à la projection orthogonale de  $M$  sur chacun des axes. Si vous ne le visualisez pas sur le dessin en perspective, commencez par le cas à deux dimensions.

Nous aurons besoin par la suite de la définition du **volume élémentaire** défini par le déplacement du point  $M$ . Imaginons que  $M$  se déplace pour arriver en  $M'$  et que ce déplacement soit très petit (élémentaire). Nous supposons que les coordonnées de  $M$  varient de  $(dx, dy, dz)$ , c'est à dire que le vecteur  $\vec{OM}'$  soit défini par les coordonnées  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ , ou c'est équivalent  $\vec{OM}' = (x + dx) \cdot \vec{u}_x + (y + dy) \cdot \vec{u}_y + (z + dz) \cdot \vec{u}_z$

– le vecteur  $\vec{OM}$  varie de

$$d\vec{OM} = \vec{OM}' - \vec{OM} = (x + dx) \cdot \vec{u}_x + (y + dy) \cdot \vec{u}_y + (z + dz) \cdot \vec{u}_z - x \cdot \vec{u}_x - y \cdot \vec{u}_y - z \cdot \vec{u}_z \quad (1.23)$$

$$= dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z \quad (1.24)$$

$$(1.25)$$

– on peut définir un cube élémentaire de cotés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , dont le volume sera

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad (1.26)$$

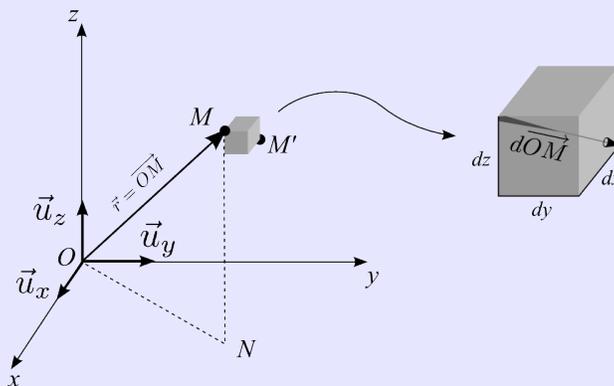


FIGURE 1.12: Volume élémentaire associé à un système de coordonnées cartésiennes

### Système de coordonnées polaires (en 2D)

Faisons un voyage à deux dimensions pour un instant. Soit un plan muni d'un repère cartésien  $(O, x, y)$ . Pour définir la position d'un point  $M$ , il nous faut nous donner deux scalaires (des nombres) représentant le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ . Dans le système de coordonnées polaires, ces deux scalaires, qui seront les **coordonnées** du vecteur, sont

- la norme (ou module) du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , notée  $\rho$  :  $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$
- l'angle que fait le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  avec l'axe  $Ox$ , noté  $\phi$ .

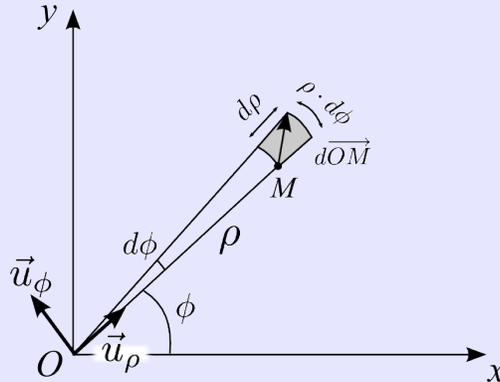


FIGURE 1.13: Système de coordonnées polaire en 2 dimensions

Comme décrit plus haut, on détermine les vecteurs de la base locale (celle qui va dépendre de la position du point  $M$ ) en faisant varier très légèrement chaque coordonnée.

- Si l'on augmente légèrement  $\rho$ , sans changer l'angle  $\phi$  qui est l'autre coordonnée, la direction dans laquelle se déplace le point  $M$  nous donne le vecteur de base locale  $\vec{u}_\rho$ .
- Si l'on augmente légèrement  $\phi$ , sans changer  $\rho$ , la direction dans laquelle se déplace le point  $M$  nous donne le vecteur de base locale  $\vec{u}_\phi$  (voir la figure 1.13)

**ATTENTION** : dans ce cas, les vecteurs de base dépendent du point  $M$  considéré !

Le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , que nous avons également appelé  $\vec{r}$ , s'écrit alors en fonction des vecteurs de la base locale :

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{u}_\rho \quad (1.27)$$

On remarque que le vecteur  $\vec{u}_\phi$  n'intervient pas dans cette expression. C'est normal puisque les vecteurs  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\phi$  "suivent" le point  $M$  si celui-ci se déplace.

Comme précédemment pour le volume élémentaire en cartésien, nous aurons besoin de définir la **surface élémentaire** définie par un petit déplacement du point  $M$ . Imaginons donc que le point  $M$  se déplace en  $M'$ . Essayons d'écrire le déplacement correspondant  $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$  en fonction des coordonnées dans la base locale  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\phi$ . Le problème est que nous avons dit que cette base "suivait" le point considéré. En toute logique, la base n'est pas la même pour  $M$  et pour  $M'$ . On réalise un tour de passe-passe (que l'on peut rendre rigoureux, rassurez-vous) en disant que

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\rho \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot d\theta \vec{u}_\phi \quad (1.28)$$

$$dS = \rho \cdot d\phi \cdot d\rho \quad (1.29)$$

**Système de coordonnées cylindriques**

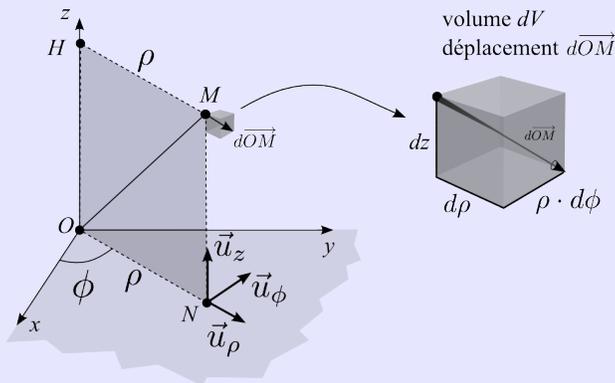


FIGURE 1.14: Système de coordonnées cylindriques

Part dans l'autre sens : définir un axe  $Oz$  et se donner la projection de  $M$  sur cet axe, notée  $H$ , la distance de  $M$  à l'axe et un angle indiquant la position de  $M$  autour de l'axe.  
 D'où vecteurs de base  $\vec{u}_\rho$  radial,  $\vec{u}_\phi$  orthoradial et  $\vec{u}_z$  le long de  $Oz$ . On a

$$\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \tag{1.30}$$

**ATTENTION :** dans ce cas, les vecteurs de base dépendent du point  $M$  considéré !

Lorsque les coordonnées de  $M$  varient de  $(dr, d\phi, dz)$

- le vecteur  $\vec{OM}$  varie de

$$d\vec{OM} = d\rho \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot d\phi \cdot \vec{u}_\phi + dz \cdot \vec{u}_z \tag{1.31}$$

- on peut définir un volume élémentaire

$$dV = \rho \cdot d\phi \cdot d\rho \cdot dz \tag{1.32}$$

**Système de coordonnées sphériques**

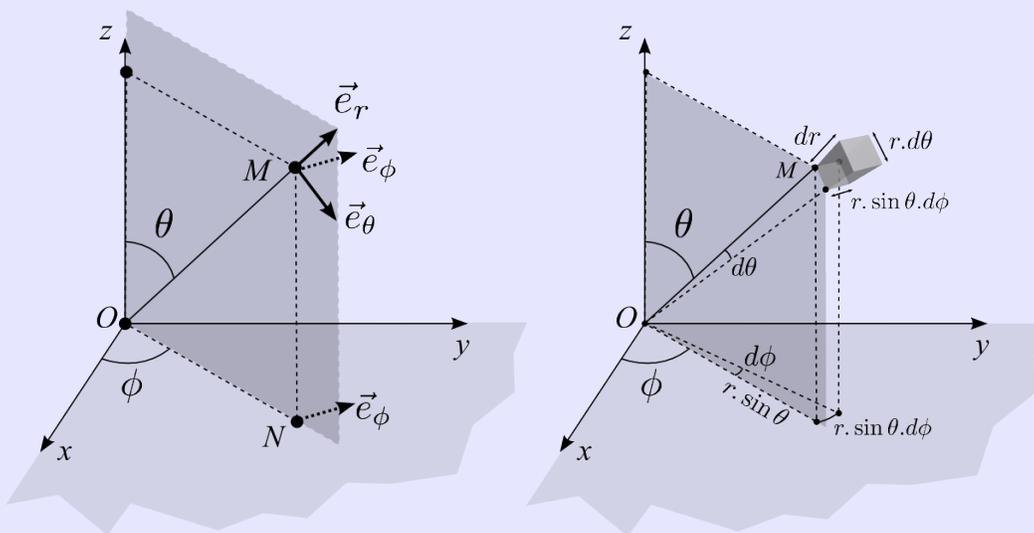


FIGURE 1.15: Système de coordonnées sphérique

A partir d'un système d'axes cartésien, on se donne  $N$  le point projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $Oxy$ .

Les coordonnées sphériques sont

- le module du vecteur  $\vec{OM}$  :  $r = \|\vec{OM}\|$
- l'angle entre l'axe  $Oz$  et le vecteur  $\vec{OM}$  :  $\theta = (\vec{k}, \vec{OM})$
- l'angle entre l'axe  $Ox$  et le vecteur  $\vec{ON}$  :  $\phi = (\vec{i}, \vec{ON})$

D'où vecteurs de base  $\vec{e}_r$  radial,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\phi$ . On a

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad (1.33)$$

**ATTENTION** : dans ce cas, les vecteurs de base dépendent du point  $M$  considéré !

Lorsque les coordonnées de  $M$  varient de  $(dr, d\theta, d\phi)$

- le vecteur  $\vec{OM}$  varie de

$$d\vec{OM} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi.\vec{e}_\phi \quad (1.34)$$

- on peut définir un volume élémentaire

$$dV = r^2 \sin \theta . dr . d\theta . d\phi \quad (1.35)$$

## 5 Electro-”statique”

Dans ce cours, nous ne parlerons que de situations ”statiques”, c'est à dire que les charges ne bougeront pas ou bien les courants seront constants. Ceci a quelques conséquences, comme le fait que les charges soient réparties sur la surface d'un conducteur si celui-ci est chargé



*Recherche personnelle*

Pourquoi ?