2

Champ et potentiel électrostatique

Les effets électriques peuvent être décrits par deux grandeurs que nous allons étudier dans ce chapitre : le champ électrostatique (grandeur vectorielle) et le potentiel électrostatique (grandeur scalaire).

1 Cas d'une distribution de charges ponctuelles

Outils mathématiques

1.1 Rappel (ou pas) : notion de champ

On utilise de façon naturelle et très commune la notion de **champ** en physique : un champ électrostatique, un champ gravitationnel, un champ de pression atmosphérique, un champ de vitesses dans un fluide par exemple.

Définition : un champ est un ensemble de grandeurs mathématiques définies et existant en tout point d'une surface ou d'un volume. Ces grandeurs peuvent être

– des **scalaires**, par exemple la température dans l'atmosphère, qui varie en fonction de la position géographique (x, y) et de l'altitude z :
$$T(x, y, z)$$

– des **vecteurs**, par exemple la vitesse du vent en fonction de la position géographique (x, y) et de l'altitude z :
$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

– d'autres grandeurs qu'on appelle des **tenseurs**... que vous verrez bien plus tard dans vos études.

Attention, les vecteurs que vous manipuliez jusqu'à présent n'étaient pas forcément attachés à un point, à un corps ou plus généralement à l'objet considéré, vous les manipuliez dans leur propre espace vectoriel, qui n'était pas l'espace physique. Dans un champ, on associe à chaque point de l'espace un vecteur différent. Autrement dit, il y a une infinité d'espaces vectoriels, un pour chaque point de l'espace physique... C'est un peu abstrait, mais ça explique la complexité des calculs qui suivent.

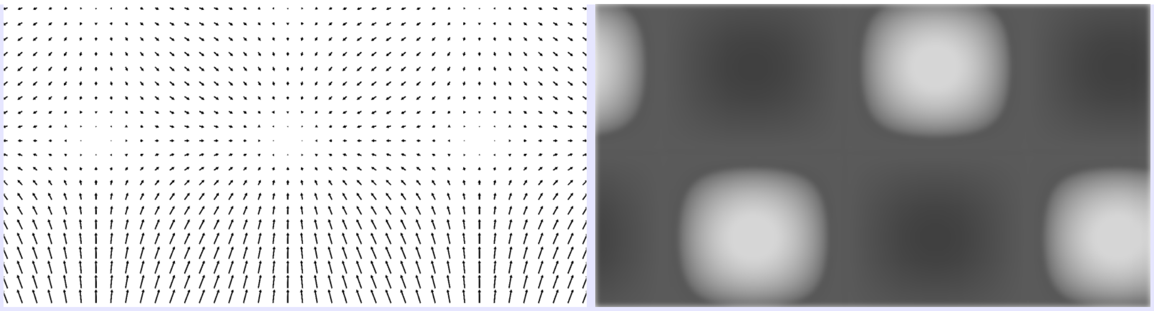


Figure 2.1: Champ vectoriel et scalaire (la valeur du niveau de gris indique la valeur de la fonction)

Recherche personnelle

Trouver des exemples de représentation graphique de champs, en 2D et 3D

1.2 Champ électrostatique d'une charge ponctuelle

Définition

On remarque dans l'expression de la force qui s'exerce sur une charge q en M de la part d'une charge Q en O que l'on peut isoler q :

$$\vec{F}_{Q\to q} = q\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_{OM}^2}\vec{u}_{OM}\right)$$

Où $\vec{u}_{OM}$ est le vecteur unitaire porté par le segment OM. L'expression entre parenthèses ne dépend que de Q et des coordonnées du point M.

On peut définir un champ produit par une charge Q placée en O en tout point M de l'espace, champ que nous appelerons **champ électrostatique** :

$$\vec{E}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_{OM}^2}\vec{u}_{OM} \tag{2.1}$$

Ce champ n'est pas seulement un outil de calcul, il existe en lui-même. Autrement dit, on peut le considérer comme un objet physique qui va interagir avec les charges.

Lignes de champ

Une ligne de champ électrostatique est une courbe tangente en chaque point au vecteur champ électrostatique défini en ce point

L'ensemble des lignes de champ définit une cartographie du champ.

Propriétés :

– Deux lignes de champ ne se croisent jamais en un point M sauf si le champ $\vec{E}$ en nul en M ou il existe une charge en M (auquel cas $\vec{E}$ n'est pas défini en M).

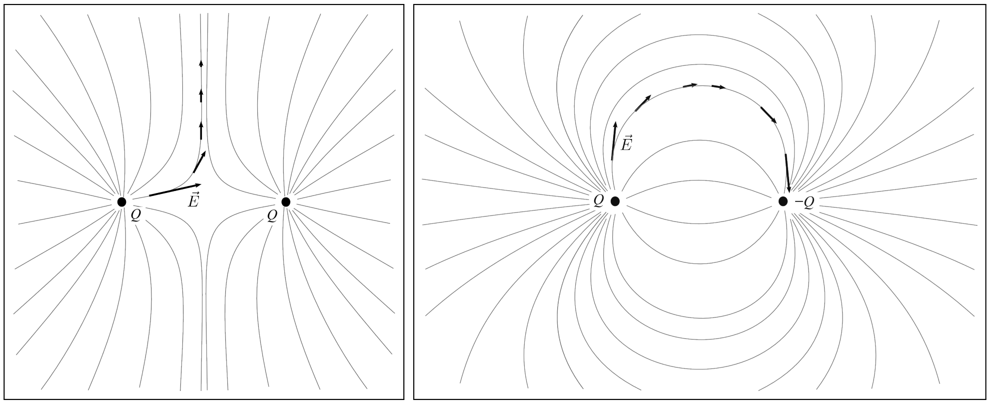


FIGURE 2.2: Exemples de lignes de champ : 2 charges égales (gauche) et deux charges opposées (droite)

- Une ligne de champ électrostatique n'est pas fermée. Elle part à l'infini ou part d'une charge q et se termine sur une charge de signe opposé.
- Pour savoir quelle est la direction du champ en un point M d'une ligne de champ, il faut y placer une charge **positive** et regarder la direction et le sens de la force électrostatique qu'elle subit. Ces direction et sens sont les mêmes que celles du champ.

Tube de champ

Un tube de champ est une surface formée par toutes les lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé. Comme les lignes de champ ne se croisent pas, celles qui s'appuient sur le contour sont contigües et forment un “tube”.

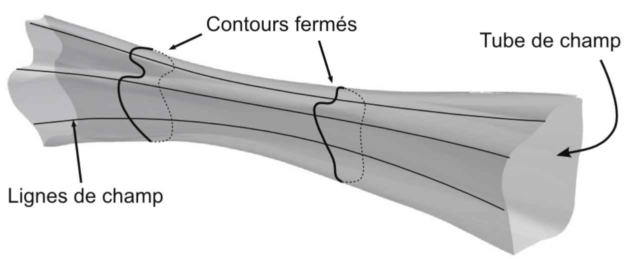


FIGURE 2.3: Exemples de tube de champ : ensemble de lignes de champ reposant sur un contour fermé

1.3 Rappel (ou pas) : dérivée partielle, circulation et gradient

Outils mathématiques

Dérivée partielle

Soit une fonction $f(x)$ à une seule variable. La différentielle de cette fonction peut s'écrire

$$df = \frac{df}{dx}.dx \tag{2.2}$$

Cette différentielle indique la variation df de la fonction lorsque la variable x subit une variation infinitésimale dx.

Considérons le cas d'une fonction à plusieurs variables, par exemple $f(x, y, z)$. Si l'on fait varier l'une des variables, la fonction f va varier. On définit une **différentielle partielle** selon x par la variation de f si on fait varier x de dx en laissant les autres variables fixes :

$$\partial_x f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z \text{ constantes}} .dx \tag{2.3}$$

La dérivée partielle de f par rapport à x est alors : $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z \text{ constantes}}$

Dans la suite, on ne marquera plus les variables qui restent constantes.

La même opération peut être faite selon y (avec x et z fixés) et z (avec x et y fixés). La **différentielle totale** est alors la somme des différentielles partielles :

$$df = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z \text{ constantes}} .dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z \text{ constantes}} .dy + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y \text{ constantes}} .dz \tag{2.4}$$

C'est aussi la variation de la fonction f lorsque le point $M = (x, y, z)$ se déplace jusqu'en $M' = (x + dx, y + dy, z + dz)$, autrement dit lorsqu'on réalise un déplacement élémentaire $d(\overrightarrow{OM}) = (dx, dy, dz)$. Ceci ne fonctionne que parce qu'on réalise une variation infinitésimale.

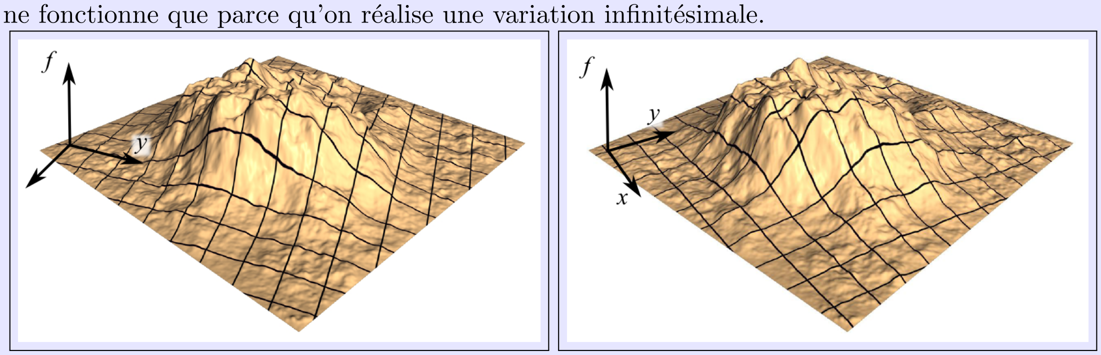


FIGURE 2.4: Exemples de systèmes de coordonnées sur la même fonction

En somme, une dérivée partielle est une dérivée, donc une pente, dans une direction particulière correspondant à la variation d'une seule variable.

Pour donner un exemple physique, supposons que l'on trace sur une montagne, dont l'altitude représente la valeur de la fonction f, un ensemble de lignes nord-sud (représentant par exemple l'axe x) et un ensemble de lignes est-ouest (représentant l'axe y), de sorte que l'ont ait un quadrillage qui suit les variations d'altitude du terrain. Si, à partir d'un point M, on se déplace vers le nord en mesurant la pente, on mesure en réalité la valeur de la dérivée partielle selon x. Si on se déplace d'est en ouest, on mesure la dérivée partielle selon y. Il n'y a aucune raison que ces deux valeurs soient égales.
De plus, comme il est illustré sur la figure 2.4, le choix du système de coordonnées, de son orientation, mais aussi de son type (cartésien, polaire, cylindrique, sphérique...) déterminent également la valeur des dérivées partielles calculées.

Outils mathématiques

Gradient

Le gradient est un vecteur qui définit la valeur, la direction et le sens de variation d'une fonction à plusieurs variables. Il est défini (en coordonnées cartésiennes) par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}.\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}.\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}.\vec{u}_z \tag{2.5}$$

où $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont les vecteurs de la base cartésienne.

Le vecteur gradient donne la direction de plus grande variation de la fonction ou, si l'on veut, la direction de plus grande pente. Si on se déplace perpendiculairement (toujours de façon infinitésimale) au vecteur gradient, la variation de la fonction est nulle. En ski, soit on va "droit dans la pente", et l'on suit le vecteur gradient, soit on avance perpendiculairement à la plus grande pente et vous savez peut-être pour l'avoir expérimenté, qu'on ne descend pas. On suit alors les courbes de niveau (courbes de même atitude).

Recherche personnelle

Essayez de trouver le lien avec un développement en série de Taylor au 1er ordre de la fonction f.

Si on considère un vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ tel que

$$d\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dx.\vec{u}_x + dy.\vec{u}_y + dz.\vec{u}_z \tag{2.6}$$

il est aisé de voir (equation 2.5) que l'on peut écrire la différentielle totale de f (equation 2.4) comme un produit scalaire :

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy + \frac{\partial f}{\partial z}.dz = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot d\overrightarrow{OM}$$

soit

$$df = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot d\overrightarrow{OM} \tag{2.7}$$

Cette équation est une équation intrinsèque, elle ne dépend pas du système de coordonnées. On l'utilise parfois pour donner une définition du gradient.

Le vecteur gradient dépend du système de coordonnées choisi (comme $d\overrightarrow{OM}$ d'ailleurs). En coordonnées cylindriques, en utilisant l'équation intrinsèque 2.7 (voir TD), on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}.\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}.\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}.\vec{u}_z \tag{2.8}$$

Outils mathématiques

Circulation

Si on a un champ de vecteurs $\vec{E}(M)$ et une courbe quelconque (AB), on définit la circulation élémentaire de $\vec{E}$ selon un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ par $\delta\mathcal{C} = \vec{E}.\vec{dl}$ (la notation δ indique une quantité élémentaire ou infinitésimale, qui n'est pas forcément une variation de quelque chose).

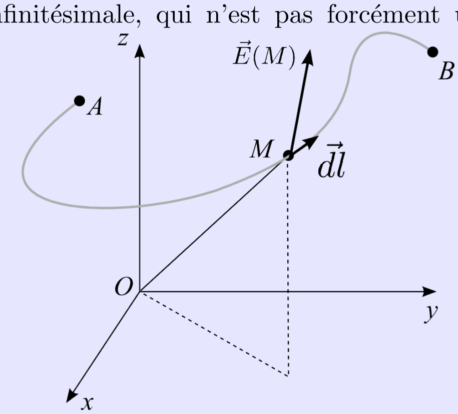


FIGURE 2.5: Configuration pour le calcul de la circulation d'un champ de vecteurs $\vec{E}$ le long d'une courbe (AB)

On peut donc considérer la circulation de $\vec{E}$ le long de la courbe (AB) comme

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} \tag{2.9}$$

1.4 Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

Définition du potentiel électrostatique

Soit une charge Q en un point O de l'espace et une courbe quelconque (AB). Le calcul de la circulation du champ $\vec{E}$ créé par Q le long de (AB) donne un résultat très intéressant.

On calcule d'abord la circulation élémentaire sur un élément de longueur $\vec{dl}$ au point M de la courbe :

$$\delta\mathcal{C} = \vec{E}(M).\vec{dl} \tag{2.10}$$

$\vec{E}(M)$ se calcule simplement, puisqu'on a une seule charge Q en O. On note $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire le long de OM et $r = \left\|\vec{OM}\right\|$ la distance OM :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r \tag{2.11}$$

On va utiliser le fait que $\vec{E}$ est selon $\vec{u}_r$ (une seule charge ponctuelle). On décompose $\vec{dl}$ selon $\vec{u}_r$ et selon une direction perpendiculaire (on peut toujours le faire) :

$$\vec{dl} = dr\vec{u}_r + \vec{dl}_\perp \tag{2.12}$$

En tenant compte du fait que $\vec{dl}_\perp.\vec{u}_r = 0$ (vecteurs perpendiculaires) et $\vec{u}_r.\vec{u}_r = 1$ (vecteur unitaire), la circulation élémentaire devient alors

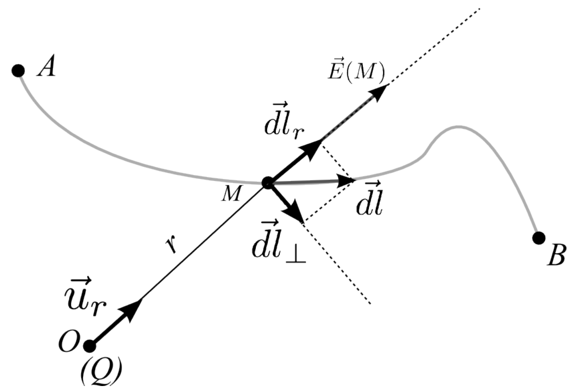


FIGURE 2.6: Décomposition du vecteur déplacement élémentaire $\vec{dl}$ selon $\vec{u}_r$ et selon une direction perpendiculaire

$$\delta\mathcal{C} = \vec{E}(M).\vec{dl} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r.\left(dr\vec{u}_r + \vec{dl}_\perp\right) \tag{2.13}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} \tag{2.14}$$

Puisqu'on va vouloir intégrer ce résultat sur toute la courbe (AB), on peut tout de suite remarquer que, puisque $\frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right)$, on peut écrire

$$\delta\mathcal{C} = d\left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \tag{2.15}$$

la circulation du champ électrostatique entre A et B sur la courbe donne :

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl} = \int_A^B d\left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \left[-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} \tag{2.16}$$

Cette circulation ne dépend pas du chemin suivi puisqu'elle ne dépend que des points de départ A et d'arrivée B, nulle part dans le résultat final on ne voit apparaître de mention d'un point qui serait sur le chemin. (Ca ne vous rappelle rien ? et l'énergie potentielle ?...).

Recherche personnelle

Trouver un lien avec l'énergie potentielle. Partir du lien champ électrostatique-force.

On définit naturellement le potentiel électrostatique comme la quantité $V(M)$ dont la variation est l'opposé de la circulation du champ :

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl} = V(A) - V(B) = -\Delta V \tag{2.17}$$

Avec

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte \tag{2.18}$$

En pratique, on utilise toujours des différences de potentiel, donc la constante est choisie arbitrairement. On choisit souvent de la prendre nulle à l'infini : $V(\infty) = 0$. Alors, pour une charge ponctuelle, la constante devient nulle : $V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Attention toutefois, ce n'est pas une généralité, "souvent" ne veut pas dire "toujours". Nous verrons un peu plus loin les cas où l'on est obligé de faire un choix différent.

Relation entre le champ et le potentiel électrostatique

Pour trouver la relation entre le champ et le potentiel électrostatique, on utilise les relations (2.10) et (2.15). Il y a plusieurs relations :

– **Relation différentielle** C'est la définition au niveau élémentaire :

$$dV(M) = -\vec{E}(M).\vec{dl} \tag{2.19}$$

– **Relation locale** D'après le paragraphe de rappel sur le gradient, la différentielle de V peut s'écrire

$$dV(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\, V(M).\vec{dl} \tag{2.20}$$

et puisque $dV(M) = -\vec{E}(M).\vec{dl}$, on a

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M) \tag{2.21}$$

On dit que le champ électrostatique dérive du potentiel V. Si on se place à une dimension (une seule variable x), le gradient est la dérivée totale exacte, donc

$$\vec{E}(M) = -\frac{dV(M)}{dx}\vec{u}_x \tag{2.22}$$

– **Relation intégrale** On remarque que la relation (2.17) est une relation importante champ-potentiel.

Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est l'ensemble des points M se trouvant au même potentiel : $V(M) = cte$.

Cas particuliers :

– à deux dimensions, on a des lignes équipotentielles

– pour une charge ponctuelle,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = cte \quad \Rightarrow \quad r = cte$$

les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge.

Propriété importante : on a vu qu'un gradient est perpendiculaire aux lignes ou surfaces telles que $f = cte$ (voir § 1.3). Comme le champ électrostatique $\vec{E}$ dérive du potentiel sous la forme d'un gradient, $\vec{E}$ **est toujours perpendiculaire aux surfaces equipotentielles**.

1.5 Généralisation et principe de superposition

Ensemble de charges ponctuelles : champ électrostatique

Nous avons vu le principe de superposition dans le cas d'un ensemble de charges ponctuelles (§ 4.2). Soient N charges ponctuelles q_i, $i = 1..N$ placées en des points A_i, $i = 1..N$. Soit une charge test q placée en un point M. Chaque charge q_i crée en M un champ $\vec{E}_i(M)$, la force exercée sur q s'écrit :

$$\vec{F}(M) = \sum_{i=1}^{N}\left[q\vec{E}_i(M)\right] = q\left[\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i(M)\right] \tag{2.23}$$

On peut écrire la somme vectorielle $\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M)$ des champs $\vec{E}(M)$ et la force s'écrit

$$\vec{F}(M) = q\vec{E}(M) \tag{2.24}$$

Tout se passe comme si la charge test q subissait un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ somme ***vectorielle*** des champs $\vec{E}_i(M)$ générés par chacune des charges individuelles.

Théorème de superposition du champ électrostatique :
le champ électrostatique total en un point M est la somme ***vectorielle*** des champs élémentaires créés par chacune des charges élémentaires présentes.

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \tag{2.25}$$

avec $r_i = \left\| A_i\vec{M} \right\|$ et $\vec{u}_i$ vecteur unitaire dirigé selon $A_i\vec{M}$

La somme vectorielle peut s'effectuer par construction géométrique ou algébriquement en utilisant une base de vecteurs.

Ensemble de charges ponctuelles : potentiel électrostatique

On part du lien entre $\vec{E}$ et le potentiel V, plus exactement de la relation différentielle $dV = -\vec{E}(M).\vec{dl}$. Pour un ensemble de charges q_i, comme dans le paragraphe précédent et en utilisant le théorème de superposition :

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{E}(M).\vec{dl} = -\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{E}_i(M)\right].\vec{dl} = \sum_{i=1}^{N} \left[-\vec{E}_i(M).\vec{dl}\right] && (2.26) \\ &= \sum_{i=1}^{N} dV_i && (2.27) \end{aligned}$$

La somme d'un ensemble de différentielles étant la différentielle de la somme

$$dV = \sum_{i=1}^{N} dV_i = d\left(\sum_{i=1}^{N} V_i\right) \tag{2.28}$$

on définit

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} \tag{2.29}$$

C'est une somme algébrique, attention aux signes des charges.

2 Energie électrostatique

2.1 Définition

Energie potentielle = énergie qui ne dépend que de la position d'un corps, toutes choses égales par ailleurs.

Définition : l'énergie potentielle est égale au travail que fournit un expérimentateur pour amener le corps à sa position.

2.2 Cas d'une charge ponctuelle dans un champ

Soit un champ $\vec{E}(M)$ et V son potentiel associé, définis en tout point M de l'espace. On veut calculer l'énergie potentielle d'une charge q située en un point P. C'est, d'après la définition, la même chose que le travail d'un expérimentateur qui ammènerait la charge en P, en partant d'un point initial. Comme l'énergie potentielle de gravitation, l'énergie potentielle électrostatique est définie à une constante près. On choisit l'énergie potentielle nulle à l'infini, là où il n'y a pas de charges (du moins dans la plupart des cas). C'est donc de l'infini que l'on va ammener la charge q.

A tout instant, la charge est soumise à une force électrostatique $\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$. On va supposer qu'un expérimentateur va faire se déplacer la charge en appliquant une force $\vec{F}_{exp}$ de telle sorte qu'elle compense la force électrostatique :

$$\vec{F}(M) + \vec{F}_{exp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{exp} = -q\vec{E}(M) \tag{2.30}$$

Le travail de l'expérimentateur est alors la somme des travaux élémentaires de $\vec{F}_{exp}$ le long du chemin qui mène la charge de l'infini à P. Le travail élémentaire de $\vec{F}_{exp}$ est $dW_{exp} = \vec{F}_{exp} \cdot \overrightarrow{dl}$, où $\overrightarrow{dl}$ est un petit élément de longueur du chemin. Le travail total s'écrit :

$$W_{exp} = \int_{\infty}^{P} \vec{F}_{exp} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\infty}^{P} (-q)\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl} = (-q) \int_{\infty}^{P} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dl} \tag{2.31}$$

On obtient, à une constante $(-q)$ près, la circulation de $\vec{E}$ (voir un peu plus haut la définition de la circulation) le long du chemin pris par la charge pour aller de l'infini à P.

Nous avons déjà fait le calcul de cette circulation, on trouve donc l'énergie potentielle électrostatique, en tenant compte du fait que le potentiel a été pris nul à l'infini :

$$\mathcal{E}_p = W_{exp} = (-q)(V(\infty) - V(P)) = q(V(P) - 0) \tag{2.32}$$

Soit

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge q située en un point P dans un champ électrostatique dont le potentiel est V est :

$$\mathcal{E}_p = qV(P) \tag{2.33}$$

Remarque : Pour accélérer la charge au début, il a fallu mettre une force légèrement plus grande que pour juste compenser la force électrostatique. De même pour arrêter la charge en P. On montre très rigoureusement que le travail supplémentaire au départ est compensé par le travail récupéré à la fin.

2.3 Cas de plusieurs charges ponctuelles

Soit un ensemble de charges ponctuelles q_i placées en des points A_i. Calculons l'énergie potentielle du système de charges. Pour ce faire, nous allons le construire charge par charge.

Première charge

On suppose d'abord que les charges sont toutes à l'infini, et infiniment loin les unes des autres, elles n'interagissent pas entre elles. On apporte la charge q_1 à sa place en A_1. Il n'y a pas encore de champ extérieur, donc le travail de l'expérimentateur (l'énergie potentielle électrostatique) pour cette charge est :

$$\mathcal{E}_{p1} = W_{exp} = q_1 V(A_1) = 0 \tag{2.34}$$

car le potentiel en A_1 est nul (pas de champ électrostatique pour l'instant...)

Deuxième charge

Si on ammène maintenant la deuxième charge à sa place en A_2, on va faire le déplacement dans le champ créé par q_1, la première charge, qui est déjà à sa place. Le travail de l'expérimentateur, et donc l'énergie potentielle à ajouter, est alors

$$\mathcal{E}_{p2} = q_2 V_{1\to 2}(A_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \tag{2.35}$$

Bien entendu, l'expression serait la même si nous avions d'abord ammené q_2 et ensuite q_1 à leurs places respectives. Pour simplifier l'expression finale, il convient de symétriser l'expression ci-dessus, c'est à dire :

$$\mathcal{E}_{p2} = \frac{1}{2}\left(q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(q_1 V_{2\to 1}(A_1) + q_2 V_{1\to 2}(A_2)\right) \tag{2.36}$$

Si on appelle V_1 le potentiel créé par q_2 au point A_1 et V_2 le potentiel créé par q_1 au point A_2, on peut écrire celà

$$\mathcal{E}_{p2} = \frac{1}{2}\left(q_1 V_1 + q_2 V_2\right) \tag{2.37}$$

Troisième charge et généralisation

Supposons maintenant que l'on ammène une troisième charge q_3 de l'infini à son point final A_3. Elle va voyager dans le champ créé par les deux premières charges. Le travail total fourni par l'expérimentateur pour la déplacer sera $E_{p3} = q_3 V(A_3)$ où $V(A_3)$ est le potentiel créé en A_3 par les deux charges q_1 et q_2.

Nous avons vu (théorème de superposition des potentiels) que les potentiels créés en un point M par des charges différentes se sommaient : $V(A_3) = V_{1\to 3}(A_3) + V_{2\to 3}(A_3)$. On peut donc écrire

$$\mathcal{E}_{p3} = q_3 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + q_3 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \tag{2.38}$$

L'énergie potentielle totale, c'est à dire la somme de tous les travaux que l'expérimentateur a du fournir pour ammener toutes les charges de l'infini, est la somme des travaux pour chacune des charges successives :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p1} + \mathcal{E}_{p2} + \mathcal{E}_{p3} = 0 + \frac{1}{2}\left(q_1 V_{2\to 1} + q_2 V_{1\to 2}\right) + q_3 V_{1\to 3} + q_3 V_{2\to 3} \tag{2.39}$$

On a noté ici $V_{i\to j}$ le potentiel créé en j par la charge q_i.

L'expression ci-dessus n'est pas suffisamment symétrique pour pouvoir la généraliser. Aussi, on va la rendre symétrique en remarquant que si l'on ne considère que deux charges, $r_{ij} = r_{ji}$ et

$$q_i \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = q_j \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ji}} = q_i V_{j\to j} = q_j V_{i\to j} \tag{2.40}$$

on peut alors écrire

$$q_j V_{i\to j} = \frac{1}{2}\left(q_j V_{i\to j} + q_i V_{j\to i}\right) \tag{2.41}$$

Ce qui permet d'écrire $\mathcal{E}_{p3}$ et donc $\mathcal{E}_p$:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\left(q_1 V_{2\to 1} + q_2 V_{1\to 2}\right) + \frac{1}{2}\left(q_3 V_{1\to 3} + q_1 V_{3\to 1}\right) + \frac{1}{2}\left(q_3 V_{2\to 3} + q_2 V_{3\to 2}\right) \tag{2.42}$$

En regroupant les termes selon la charge :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\left(q_1\left(V_{2\to 1} + V_{3\to 1}\right) + q_2\left(V_{1\to 2} + V_{3\to 2}\right) + q_3\left(V_{2\to 3} + V_{1\to 3}\right)\right) \tag{2.43}$$

Cette expression se généralise pour un nombre quelconque de charges :

L'énergie potentielle d'un ensemble de N charges q_i placées en A_i est

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \cdot V(A_i) \tag{2.44}$$

où $V(A_i)$ est le potentiel créé en A_i par toutes les charges autres que q_i.

Une charge ne crée pas de potentiel à l'endroit même où elle se trouve, ce potentiel serait infini...

2.4 Cas d'une distribution continue de charges

3 Propriétés de symétrie

Symétrie (ou invariance) d'une distribution de charges = le fait que si l'on regarde cette distribution selon des points de vue (angles de vue) différents, la distribution parait identique. Autre manière de le dire : si l'on effectue une opération de symétrie particulière sur la distribution de charges (si on la modifie physiquement d'une certaine manière), celle-ci ne change pas.

Exemple : soit une distribution de charges répartie uniformément sur la surface d'une sphère. Quelle que soit la direction de laquelle on regarde la sphère, on a la même image de la distribution. Si l'on fait faire une rotation d'un angle quelconque autour de son centre à la sphère, on voit de nouveau toujours la même chose. Evidemment, ça a des conséquences sur le champ électrostatique créé...

Par contre, si on déplace la sphère (translation), on ne voit plus la même chose. Il n'y a pas de symétrie de translation.

3.1 Principe de Curie

Tel qu'explicité par Pierre Curie (1894) :

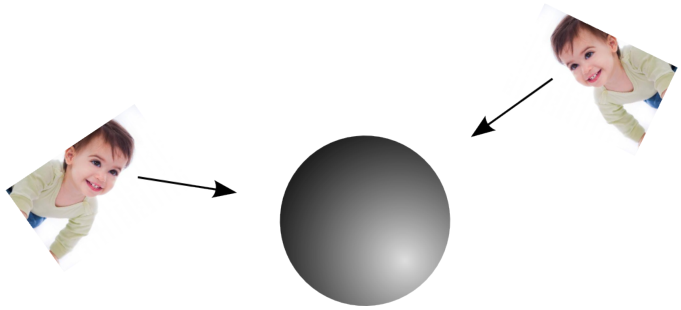


FIGURE 2.7: Symétrie sphérique d'une distribution de charges. Les observateurs voient la même distribution quelque soit la direction d'observation.

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.
Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.

Très utile en électrostatique. Par exemple lorsque la distribution de charges (les causes) produit un champ électrostatique et un potentiel électrostatique (les effets), les éléments de symétrie de la distribution de charges se retrouvent dans le champ électrostatique produit, ainsi que dans le potentiel.

3.2 Opérations de symétrie

Les opérations de symétrie que nous utiliserons le plus sont

- Symétrie par rapport à un plan (symétrie miroir)
- Antisymétrie par rapport à un plan
- Invariance par translation le long d'un axe
- Invariance par rotation autour d'un axe
- Invariance par rotation autour d'un point

Nous les introduirons au fur et à mesure, mais voici un exemple :

Supposons une distribution de charges répartie uniformément le long d'un fil infini. Nous nous demandons quelles sont les caractéristiques du champ électrostatique produit.

La symétrie de la distribution est multiforme. Il y a une symétrie miroir par rapport à tous les plans qui contiennent le fil. Il y a également un symétrie de rotation autour de l'axe que constitue le fil.

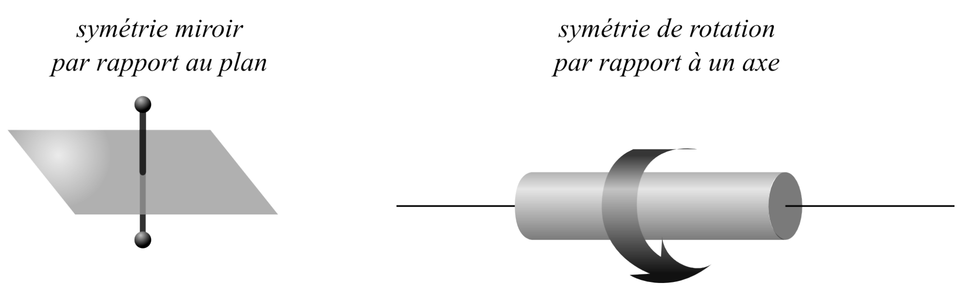
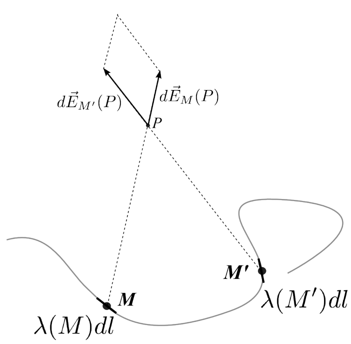


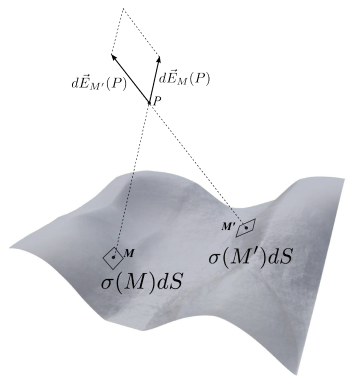
FIGURE 2.8: Exemples de symétries de distributions de charges.

4 Cas continu

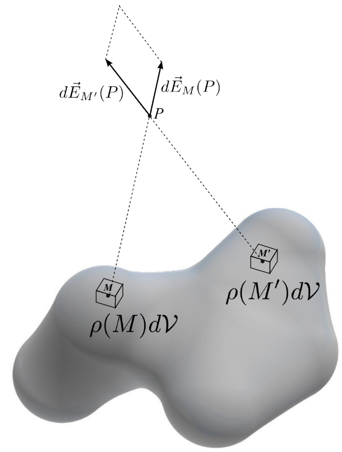
Décompose une distribution continue de charge en éléments de charge infinitésimale. Considère chaque élément de ligne/surface/volume avec sa charge associée comme une charge élémentaire et transforme somme en intégrale.



Elément de longueur $= dl$
Charge λdl
Superposition :
$\vec{E}(P) = \int_{M \in ligne} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda(M) \vec{u}_{MP} dl$



Elément de surface $= dS$
Charge σdS
Superposition :
$\vec{E}(P) = \int_{M \in S} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma(M) \vec{u}_{MP} dS$



Elément de volume $= d\mathcal{V}$
Charge $\rho d\mathcal{V}$
Superposition :
$\vec{E}(P) = \int_{M \in \mathcal{V}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(M) \vec{u}_{MP} d\mathcal{V}$