LAPP-T-99/02

Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules

Thèse

présentée à

l'Université de Savoie

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences,

Spécialité : Physique des Particules

par

Laurent DEROME

Le système de détection de l'expérience VIRGO dédiée à la recherche d'ondes gravitationnelles

Soutenue le 21 avril 1999 devant le jury composé de

M.	DAVIER	Rapporteur
D.	DECAMP	Président
F.	FIDECARO	Rapporteur
R.	FLAMINIO	Directeur de Thèse
B.	MOURS	
D.	VIGNAUD	

A Cécile et à Jean,

Remerciements

Je remercie Michel Yvert de m'avoir accueilli dans le laboratoire et Benoît Mours pour son accueil dans l'équipe VIRGO et son soutien constant.

Je remercie Michel Davier et Francesco Fidecaro qui ont accepté la charge de rapporteur ; Daniel Décamp et Daniel Vignaud pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie chaleureusement Raffaele Flaminio qui a encadré cette Thèse. Sa disponibilité fut, au cours de ces trois ans, constante et nos nombreuses discussions m'ont ouvert le domaine de la détection des ondes gravitationnelles.

Je voudrais remercier l'ensemble des membres de l'équipe VIRGO du LAPP pour ces trois années passées dans un esprit de solidarité et d'échanges. Merci donc aux mécaniciens et en particulier à Laurent Giacobone, Jean-Claude Le Marec, Pierre Mugnier et Ricco Sottile pour leur disponibilité. J'ai beaucoup appris auprès du service électronique, merci donc à Daniel Boget, Geneviève Daguin, Pierre-Yves David, Richard Hermel, Jean-Claude Lacotte et Reynald Boula-Picard. Merci aux informaticiens, Fatih Bellachia et Alain Masserot pour leur aide constante. Je voudrais enfin remercier l'ensemble des physiciens de l'équipe, Damir Buskulic, Davide Castellazzi, Raffaele Flaminio, Frédérique Marion, Louis Massonet, René Morand, Benoît Mours, Paola Puppo, Virginio Sannibale et Didier Verkindt pour l'aide que chacun d'entre eux m'a apportée au cours de ces trois ans.

J'aimerais enfin saluer les membres du laboratoire que j'ai croisés au cours de ces trois années et remercier en particulier Nicole Berger qui a corrigé mes innombrables fautes d'orthographe.

Sommaire

Introduction

Très vite après l'élaboration de la théorie de la relativité générale, Einstein a mis en évidence qu'une perturbation de la métrique de l'espace-temps pouvait se propager à la vitesse de la lumière.

Cette onde “gravitationnelle” est produite par des mouvements de matière. Mais l'amplitude de la perturbation créée est tellement faible que personne jusqu'en 1960 n'a envisagé de la détecter. Seules une meilleure connaissance de la violence de nombreux phénomènes dans notre univers et l'amélioration de la sensibilité des instruments de mesure ont permis d'envisager la détection directe d'ondes gravitationnelles.

Les premiers détecteurs mis en place furent les barres résonantes où l'énergie déposée par l'onde gravitationnelle est mesurée à la fréquence de résonance de la barre. Un nouveau type de détecteur a ensuite été proposé : les antennes interférométriques. Mais encore aucun signe tangible d'un signal d'onde gravitationnelle n'a été perçu par ces deux types de détecteur.

Pourtant, Taylor et Weisberg [1] ont montré, grâce à une mesure très précise des temps d'arrivée des signaux provenant d'un pulsar en orbite avec une étoile compagnon (PSR1913+16), que la décroissance du rayon orbital de ce système était due à la perte d'énergie par émission d'ondes gravitationnelles.

Aujourd'hui deux collaborations, LIGO [2] aux Etats-Unis et VIRGO [3] en Europe, ont entrepris la construction d'interféromètres kilométriques ayant une sensibilité deux à trois ordres de grandeur meilleure que celle des détecteurs existants.

La détection du passage de l'onde gravitationnelle repose sur la mesure du mouvement de masses “libres” disposées à plusieurs kilomètres l'une de l'autre. Cette mesure est faite grâce à un interféromètre de type Michelson. La puissance transmise par le détecteur permet alors de mesurer le mouvement relatif de ces masses et donc l'onde gravitationnelle.

Ce travail de thèse porte sur l'étude et la mise au point du système de détection du faisceau transmis par l'interféromètre VIRGO. Il s'achève par l'analyse des performances de ce système.

Dans le premier chapitre, le concept d'onde gravitationnelle est brièvement présenté ainsi que les sources de rayonnement les plus prometteuses pour un détecteur terrestre.

Le principe de détection interférométrique est ensuite exposé.

Dans le chapitre suivant, différentes configurations optiques d'un interféromètre sont étudiées en fonction de leur sensibilité par rapport au bruit de photon et aux caractéristiques optique de l'instrument. La dépendance de la sensibilité par rapport au contraste de l'interféromètre est discutée.

Dans le troisième chapitre, le détecteur VIRGO est présenté : les suspensions des masses tests du détecteur, la configuration optique et plus particulièrement, le système de détection.

le quatrième chapitre est consacré à une simulation de l'interféromètre. Son but est de déterminer la forme et la puissance du faisceau transmis par le détecteur. L'amélioration du contraste de l'interféromètre grâce à un filtrage de ce faisceau est étudiée. Deux types de filtrage sont considérés : un filtrage spatial grâce à des diaphragmes et un filtrage optique grâce à une cavité “mode cleaner”.

Dans le cinquième chapitre, les tests de la cavité “mode cleaner” sont décrits. En particulier, on étudie ses capacités de filtrage grâce à un petit interféromètre de test. Une procédure d'accrochage automatique de la résonance est ensuite présentée.

La puissance du faisceau transmis par l'interféromètre et filtrée par la cavité “mode cleaner” doit ensuite être détectée. Dans le sixième chapitre, l'étude du système de mesure de la puissance de ce faisceau est présentée. Il est constitué des photodiodes et de leur électronique associée. On présente les solutions mises en place pour gérer la puissance et la grande dynamique du signal.

Dans le septième chapitre, le système de numérisation des signaux venant des photodiodes est exposé ainsi que le système de calibration associé.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du bruit de l'ensemble du système de détection. L'étude du bruit non Gaussien du détecteur est faite en filtrant les données produites par le système grâce à un algorithme de détection de signaux d'ondes gravitationnelles provenant d'une coalescence d'étoiles binaires. L'algorithme mis en place est d'abord présenté et testé grâce à une simulation du détecteur VIRGO. L'influence du système de détection sur la recherche de ce type d'événement est ensuite caractérisée.

Chapitre 1

Les ondes gravitationnelles

Quelques mois après l'élaboration de la théorie de la relativité générale, Einstein a montré que la linéarisation en champ faible de l'équation liant la métrique de l'espace-temps et son contenu énergétique aboutissait à une équation de propagation des perturbations de la métrique que l'on interprète comme une onde gravitationnelle.

Depuis une trentaine d'années, des équipes développent des détecteurs interférométriques pour mettre en évidence de manière directe ces ondes. Seuls des événements violents de l'univers peuvent générer des ondes d'amplitudes détectables avec ces détecteurs.

Dans ce chapitre, après avoir rappelé quelques notions de relativité générale, nous présentons les principales sources d'ondes gravitationnelles ainsi que le principe de leur détection à l'aide d'un interféromètre.

1.1 Relativité générale

1.1.1 Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence est basé sur l'égalité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle. Ainsi, pour un système de N particules de coordonnées $\mathbf{x_n}$, soumises à une force $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)$ et à un champ de gravitation externe $\mathbf{g}$. L'équation du mouvement d'une des particules est donnée par :

$$m_n^i \frac{d^2\mathbf{x}_n}{dt^2} = m_n^g \mathbf{g} + \sum_m \mathbf{F}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m). \tag{1.1}$$

Après le changement de coordonnées (non-galiléen)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1.2}$$

l'équation 1.1 s'écrit (avec $m_n^i = m_n^g$) :

$$m_n \frac{d^2\mathbf{x'}_n}{dt'^2} = \sum_m \mathbf{F}(\mathbf{x'}_n - \mathbf{x'}_m) \tag{1.3}$$

Pour un observateur lié au repère ($\mathbf{x}$', t') (repère en chute libre), les équations du mouvement sont maintenant celles d'un système ne subissant aucun champ externe. Le principe d'équivalence suppose l'équivalence entre ces deux systèmes ; un observateur lié à un repère ne peut donc pas déterminer s'il est soumis à un champ gravitationnel ou s'il est dans un repère accéléré.

Ici le champ $\mathbf{g}$ est homogène et statique, si on a un champ $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, on ne peut pas avoir un changement de coordonnées du type (1.2) qui élimine $\mathbf{g}$ dans tout l'espace. Par contre, on peut l'éliminer localement : en tout point $(\mathbf{x}, t)$ il existe un voisinage pour lequel un changement de repère permet d'écrire l'équation du mouvement sous la forme (1.3). Dans ce repère, les lois de la physique [1] s'écrivent comme dans un repère Cartésien non accéléré. On dit que ce repère est "localement inertiel". Le principe d'équivalence peut donc s'énoncer comme "l'existence d'un repère où la matière satisfait les lois de la relativité restreinte" [4].

1.1.2 Interprétation Géométrique

Le principe d'équivalence peut être rapproché de l'axiome de Gauss qui a servi de base à la géométrie non euclidienne où l'on suppose qu'en tout point d'une surface, on puisse choisir un système de coordonnées dans lequel l'espace soit localement plat.

C'est grâce à cette analogie que l'on peut utiliser la géométrie Riemannienne pour décrire la théorie de la relativité générale. En particulier, on sait que les propriétés d'une surface Riemannienne peuvent être décrites grâce aux dérivées $\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}$ où x^μ est le système de coordonnées qui couvre tout l'espace et $\xi^\mu(x)$ est le système de coordonnées où l'espace est localement plat.

En relativité restreinte, c'est-à-dire en l'absence de champ gravitationnel, la métrique est donnée par

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

que l'on écrit

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.4}$$

[1]Ici, on entend par lois de la physique les lois de la relativité restreinte.

avec :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette métrique correspond à un espace plat.

Dans un espace soumis à un champ gravitationnel, les lois de la relativité restreinte ne sont pas respectées dans un système de coordonnées quelconque x_μ. Mais d'après le principe d'équivalence, localement il existe un système de coordonnées ξ^μ tel que dans ce repère, on retrouve les lois de la relativité restreinte. Dans ce repère local, la métrique est celle d'un espace plat :

$$ds^2 = \eta_{\sigma\rho}(x) d\xi^\sigma d\xi^\rho.$$

qui s'écrit dans le système de coordonnées x^μ:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\sigma\rho}(x) \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\nu} dx^\nu. \\ &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \tag{1.5}$$

où

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\sigma\rho} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

est le tenseur métrique.

Le principe de covariance générale est une extension du principe d'équivalence. Il permet d'écrire les équations sous une forme invariante par changement de repère. Le principe de générale covariance dit qu'une équation est vérifiée dans un champ gravitationnel général si

- elle est vérifiée dans le repère inertiel local.
- elle est covariante (invariante par changement de repère).

Pour écrire les équations sous une forme invariante on utilise les tenseurs. Des tenseurs du même ordre se transforme de la même façon par changement de repère.

A partir de la métrique, de ses dérivés premières et secondes, on peut construire le tenseur de Riemann [5]:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\eta} \tag{1.6}$$

où $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ est la connexion affine :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)$$

Le tenseur de Ricci et le scalaire de courbure sont obtenus en contractant le tenseur Riemann :

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad \text{et} \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

1.1.3 Equation d'Einstein

L'équation d'Einstein lie la métrique de l'espace à la matière : "La géométrie dit à la matière comment elle se déplace et la matière dit à la géométrie comment elle se courbe". La matière est représentée par le tenseur Energie-Impulsion $T_{\mu\nu}$ qui représente le contenu énergétique de l'espace [5]:

- T_{00} = la densité de masse.
- T_{j0} = la densité de quantité de mouvement selon j.
- T_{ij} = le tenseur (3x3) des contraintes.

L'équation d'Einstein s'écrit alors

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \;=\; -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

où G est la constante de gravitation. Dans cette équation, la grandeur à gauche de l'égalité est construite à partir de la géométrie alors que la grandeur à droite est construite à partir du contenu énergétique de l'espace-temps. En contractant cette équation avec $g^{\mu\nu}$, on obtient

$$R \;=\; \frac{8\pi G}{c^4}T$$

où $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. On peut donc écrire l'équation d'Einstein sous une forme équivalente :

$$R_{\mu\nu} \;=\; -\frac{8\pi G}{c^4}S_{\mu\nu} \tag{1.8}$$

$$\text{où} \quad S_{\mu\nu} \;=\; T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T$$

1.2 Ondes Gravitationnelles

1.2.1 Linéarisation de l'équation d'Einstein

Si le champ de gravitation est faible, c'est-à-dire dans l'hypothèse où la métrique est proche de celle d'un espace plat, on peut écrire :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

avec $h_{\mu\nu} \ll 1$. La connexion affine et le tenseur de Riemann peuvent alors s'écrire au premier ordre en $h_{\mu\nu}$. L'équation d'Einstein (1.8) prend alors la forme :

$$\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial h^{\beta}{}_{\nu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h^{\alpha}{}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h^{\alpha}{}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \tag{1.9}$$

où $\Box^2 \equiv \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ est l'opérateur de propagation d'une onde à la vitesse de la lumière.

1.2.2 Transformation de jauge

Par analogie aux équations du champ électromagnétique, on peut appliquer une transformation de jauge à l'équation 1.9. En relativité générale, une transformation de jauge est un choix d'un système (ou d'une famille de système) de coordonnées. En effet l'équation 1.9 est covariante et donc valable dans tout système de coordonnées. On peut choisir une transformation de jauge pour simplifier l'écriture de cette équation. Les systèmes de coordonnées harmoniques sont les systèmes de coordonnées où :

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$$

Ils peuvent être obtenus par un changement de repère à partir d'un système de coordonnées quelconque[4]. Au premier ordre en h, on obtient alors :

$$\frac{\partial h^{\alpha}{}_{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2}\frac{\partial h^{\alpha}{}_{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \tag{1.10}$$

L'équation de propagation de la perturbation de la métrique s'écrit dans ce système de coordonnées :

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} \tag{1.11}$$

1.2.3 Propagation des ondes planes

L'équation de propagation d'une onde dans le vide est obtenue directement à partir de l'équation 1.11 :

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = 0 \tag{1.12}$$

qui admet pour solution les ondes planes monochromatiques de la forme :

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{\jmath k_\alpha x^\alpha}$$

où l'amplitude $e_{\mu\nu}$ et le vecteur d'onde k_α doivent vérifier l'équation de jauge (1.10) et l'équation de propagation (1.12) :

$$\begin{aligned} k_\alpha k^\alpha &= 0 && (1.13) \\ k_\mu e^\mu{}_\nu &= \frac{1}{2} k_\nu e^\mu{}_\mu && (1.14) \end{aligned}$$

Cette solution correspond à une onde de pulsation k_0 se propageant à la vitesse de la lumière. L'amplitude de l'onde $e_{\mu\nu}$ est une matrice 4x4 symétrique et a donc à priori 10 éléments indépendants. L'équation 1.14 réduit le nombre de composants indépendants à $10 - 4 = 6$. De plus, il existe un changement de coordonnées $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$ qui reste à l'intérieur de la jauge moyennant $\Box^2 \epsilon_\mu = 0$. Ce changement de repère transforme l'amplitude $e_{\mu\nu}$ selon :

$$e_{\mu\nu} \rightarrow e_{\mu\nu} + k_\mu \epsilon_\nu + k_\nu \epsilon_\mu$$

Le choix des ϵ_μ réduit le nombre de composantes indépendantes à $6 - 4 = 2$ coefficients indépendants. Dans le cas d'une onde se propageant suivant l'axe Oz, le choix des ϵ_μ permet alors de trouver un repère où [4]:

$$\begin{aligned} e_{\mu 0} &= 0 \\ e_{3\mu} &= 0 \\ e_{22} &= -e_{11} \end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde gravitationnelle s'écrit donc dans ce repère :

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{21} & 0 \\ 0 & e_{21} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce repère est appelé la jauge TT (Transverse, Traceless). Une onde gravitationnelle plane et monochromatique (de pulsation ω) a donc deux composantes d'amplitude h_+ et $h_\times$:

$$\begin{aligned} h &= \left(h_+ e_+ + h_\times e_\times\right) e^{\jmath\omega(t-\frac{z}{c})} \\ e_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_\times &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les tenseurs e_+ et $e_\times$ représentent les deux polarisations de l'onde gravitationnelle. On passe d'une polarisation à l'autre grâce à une rotation de 45° autour de l'axe de propagation de l'onde. La figure 1.1 représente l'évolution de la métrique au passage d'une onde gravitationnelle. La solution générale de l'équation de propagation (1.12) est donc une superposition de ces ondes planes.

1.3 Source d'ondes gravitationnelles

La solution de l'équation d'Einstein linéarisée (équation 1.11) admet une solution de type potentiel retardé :

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x},t) = \frac{4G}{c^4}\int_{\text{source}} d\mathbf{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{1.15}$$

On peut interpréter l'équation 1.15 comme l'onde gravitationnelle produite par la source $S_{\mu\nu}$. La conservation de l'énergie de la source exclue le rayonnement dipôlaire car la quantité de mouvement et le moment angulaire de la source sont conservés [5]. Pour générer des ondes gravitationnelles on doit donc considérer le moment quadrupôlaire de la source :

$$I_{ij} = \int_{source} d\mathbf{x}\left(x_i x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}|\mathbf{x}|^2\right)\rho(\mathbf{x})$$

En se plaçant assez loin de la source on obtient dans l'approximation Newtonnienne [6]:

$$h_{ij}(t) = \frac{2G}{Rc^4}\ddot{I}_{ij}\left(t - \frac{R}{c}\right)$$

Chaque source peut être caractérisée par la fréquence d'émission et l'amplitude de son rayonnement gravitationnel, l'amplitude étant inversement proportionnelle à la distance

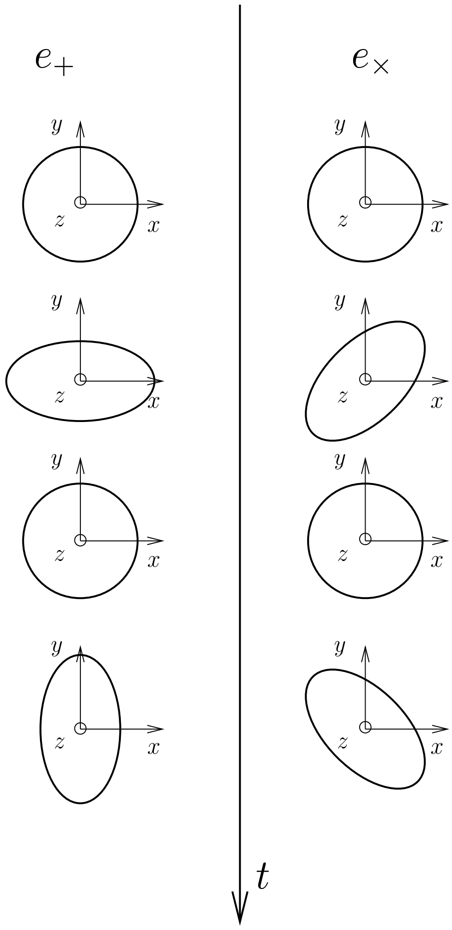


Figure 1.1: Déformation de la métrique au passage d'une onde de polarisation e_+ ou $e_\times$ se propageant dans la direction Oz.

de la source. De même, un détecteur d'ondes gravitationnelles est caractérisé sa sensibilité en fonction de la fréquence du signal.

Compte tenu du très faible facteur $\frac{G}{c^4}$ (de l'ordre de 10^{-44} $\mathrm{m^{-1}kg^{-1}s^2}$), c'est dans l'univers que se trouvent les sources les plus prometteuses de rayonnement gravitationnel. La bande passante des détecteurs étant limitée à basse fréquence, on s'intéresse particulièrement aux événements violents dans l'univers : ils peuvent générer des rayonnements jusqu'à quelques kilohertzs.

1.4 Sources Astrophysiques

1.4.1 Les supernovae de type II

Les supernovae de type II sont créées à la fin de vie d'une étoile massive lors de son effondrement en étoile à neutrons ou en trou noir. L'effondrement de l'étoile sur elle-même puis l'éjection d'une partie de la masse de l'étoile peuvent générer des ondes gravitationnelles lorsque les mouvements de masse associés à l'explosion sont asymétriques. Pour évaluer l'amplitude de l'onde, il faut donc connaître l'asymétrie sphérique de l'événement. Les modélisations effectuées ne permettent d'avoir qu'un ordre de grandeur lui-même très dépendant des modèles générant l'asymétrie. L'amplitude du signal pour une source située à 10 kpc (dans notre galaxie) est de l'ordre de 10^{-20} ; c'est un signal très court (quelque millisecondes) à des fréquences de l'ordre du kilo-hertz.

Le nombre d'événements, bien connu dans notre galaxie grâce à l'observation de leur contrepartie optique, est d'environ 3 par siècle. Pour avoir un taux d'événements raisonnable (plusieurs par an), on doit détecter ces événements jusqu'à l'amas de la Vierge (10 Mpc).

1.4.2 Pulsar

Les pulsars sont comme leur nom l'indique des sources qui émettent dans la gamme radio des pulses avec une période qui va de quelques millisecondes jusqu'à quelques secondes. Le premier pulsar a été découvert en 1968. On a alors mis en évidence que ces rayonnements provenaient d'étoiles à neutrons tournant rapidement sur elles-mêmes et émettant dans un cône un rayonnement radio. Plusieurs centaines de pulsars sont aujourd'hui identifiés. Ces objets peuvent émettre des ondes gravitationnelles si l'axe de rotation n'est pas confondu avec l'axe de symétrie de l'étoile. Ces déformations peuvent être des résidus de la formation de l'étoile et persister chez les jeunes étoiles à neutrons (moins de quelques milliers d'années), elles peuvent aussi être produites par le champ magnétique intense de l'étoile. Le signal attendu est périodique, à la fréquence et au double de la fréquence de rotation de l'étoile. L'amplitude attendue est [6] :

$$h \sim \frac{4\pi^2 G}{Rc^4}\epsilon I f^2$$

où R est la distance de la source, I le moment d'inertie de l'étoile et ϵ l'excentricité équatoriale de l'étoile. Le facteur ϵ qui représente l'asymétrie de l'étoile est la grande inconnue mais des valeurs de l'ordre de $10^{-3} - 10^{-5}$ semblent raisonnables [7].

En supposant que l'étoile a une masse de 1.4 $M_\odot$ et un rayon de 10 km, le moment d'inertie I est de l'ordre de 10^{40} kg m^2 l'amplitude est alors :

$$h \sim 7\ 10^{-20}\epsilon \left(\frac{10\ \mathrm{kpc}}{R}\right)\left(\frac{f}{1\ \mathrm{kHz}}\right)^2$$

Ces amplitudes étant très faibles, pour les détecter il est nécessaire d'intégrer le signal sur une longue période (de quelques mois à plusieurs années).

1.4.3 Coalescences d'étoiles binaires

Le système formé par un couple d'étoiles tournant l'une autour de l'autre est hautement asymétrique et est donc un générateur idéal d'ondes gravitationnelles. La perte d'énergie par émission d'ondes gravitationnelles entraîne une diminution de la distance entre les deux étoiles et une augmentation de la vitesse de rotation. Par conséquent, la fréquence du signal augmente aussi bien que son amplitude. C'est dans la phase finale de la coalescence que la fréquence d'émission rentre dans la bande passante d'un détecteur de type interférométrique ($f > 50$Hz). Seul des corps compacts tels que des étoiles à neutrons ou des trous noirs peuvent se rapprocher suffisamment pour atteindre ces fréquences. Pour deux étoiles à neutrons de 1.4 Masse solaire, l'amplitude et la fréquence du signal en fonction du temps sont données par [6]:

$$\begin{aligned} h(t) &= 1.5\ 10^{-23}\left(\frac{10\ \mathrm{Mpc}}{R}\right)\left(\frac{1\mathrm{jour}}{t_c - t}\right)^{1/4} \\ f(t) &= 1.8\ \mathrm{Hz}\left(\frac{1\mathrm{jour}}{t_c - t}\right)^{3/8} \end{aligned}$$

où t_c l'instant où les deux étoiles se rencontrent. C'est donc un signal quasi-sinusoidal d'amplitude suffisante pour observer ces événement jusquà l'amas de la Vierge. L'inconnu ici est le nombre d'événements attendus, les évaluations les plus optimistes sont de quelques événements par an.

1.5 Détection des ondes gravitationnelles

1.5.1 Historique

Jusqu'en 1960, personne n'avait étudié les possibilités techniques d'une détection des ondes gravitationnelles, Weber fut le premier à construire un détecteur mesurant l'énergie déposée dans une barre résonante [8]. En 1969 il annonça une détection simultanée dans deux barres, l'une à Washington et l'autre à Chigago, 15 autres groupes à travers le monde se lancèrent alors dans la construction de barres résonantes sans jamais, malgré des améliorations constantes de leur sensibilité mettre en évidence de tels phénomènes. Ces détecteurs sont limités par leur bande passante : quelques Hz autour de la fréquence de résonance de la barre, de l'ordre du kHz.

La première suggestion d'utiliser un détecteur interféromètre a été faite par Gertsenshtein et Pustovoit en 1962 [9], mais ce n'est qu'en 1970 que Weiss établit un descriptif précis d'un détecteur interférométrique sans pour autant obtenir les fonds pour le réaliser. L'intérêt de ces détecteurs est qu'ils peuvent avoir une bande passante beaucoup plus large.

Le premier détecteur interférométrique fut construit en 1972 par Forward [10], ce prototype atteint alors une sensibilité en h de l'ordre de $2\ 10^{-16}\sqrt{\mathrm{Hz}}$ au-dessus de 3 kHz. Ce n'est qu'à la fin des année 70 que les groupes de Glasgow (Drever) et de Munich (Winkler) commencèrent à réaliser des détecteurs interférométriques. Au milieu des année 90, il existe des détecteurs à Munich, Glasgow, à Caltech, au MIT et au Japon, ce sont de petits détecteurs (jusqu'à 40 mètres) qui servent de prototype pour les détecteurs kilométriques actuellement en construction. Le prototype de Caltech a atteint une sensibilité en h de l'ordre de $10^{-20}\ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$ au-dessus de 300 Hz.

La dernière génération de détecteurs interférométriques actuellement en cours de construction vise à atteindre des sensibilités de l'ordre de quelques $10^{-23}\ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$.

1.5.2 Détection Interférométrique

Le passage d'une onde gravitationnelle perturbe la métrique et donc courbe l'espace-temps. Le principe de la détection interférométrique est de mesurer le temps mis par la lumière pour aller d'un point à un autre.

Le détecteur est constitué de trois masses suspendues. Ces masses sont disposées aux deux bouts et au coin d'un L droit (figure 1.2). Les masses sont suspendues pour qu'au-dessus de la fréquence du pendule, elles puissent être considérées comme des masses libres dans le plan Oxy. Pour une onde gravitationnelle d'amplitude $h(t)$ ayant une incidence parallèle à l'axe Oz et une polarisation selon les axes Ox et Oy (Polarisation +). L'intervalle

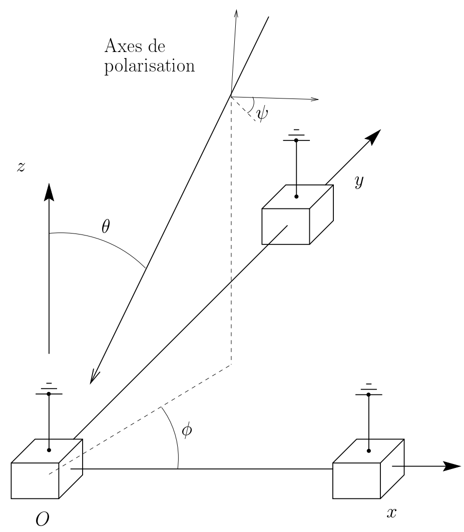


Figure 1.2: Schéma d'un détecteur interférométrique de type Michelson.

entre deux points de l'espace infiniment proche est donné par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= 0 \\ &= -c^2dt^2 + (1+h(t))dx^2 + (1-h(t))dy^2 \end{aligned}$$

Si l'onde gravitationnelle incidente est monochromatique de fréquence f :

$$h(t) = h\cos(2\pi f t),$$

le temps mis par la lumière pour faire un aller retour entre deux masses séparées d'une distance L selon les axes Ox et Oy est donné par [11] :

$$\tau_x(t) = \frac{2L}{c} + h\frac{L}{c}\frac{\sin\frac{2\pi fL}{c}}{\frac{2\pi fL}{c}}\cos\left(2\pi f\big(t-\frac{L}{c}\big)\right)$$
$$\tau_y(t) = \frac{2L}{c} - h\frac{L}{c}\frac{\sin\frac{2\pi fL}{c}}{\frac{2\pi fL}{c}}\cos\left(2\pi f\big(t-\frac{L}{c}\big)\right).$$

Lorsque la longueur de l'onde gravitationnelle est faible devant la taille du détecteur $\frac{2\pi fL}{c} \ll 1$, on a :

$$\tau_x(t) = \frac{2L}{c} + h\frac{L}{c}\cos\left(2\pi f\big(t-\frac{L}{c}\big)\right)$$
$$\tau_y(t) = \frac{2L}{c} - h\frac{L}{c}\cos\left(2\pi f\big(t-\frac{L}{c}\big)\right).$$

Les temps mis par la lumière selon les deux axes sont donc modulés par l'onde gravitationnelle, la nature quadrupôlaire fait que cet effet est en opposition de phase selon les deux axes Ox et Oy du détecteur. Pour une longueur d'onde faible devant la taille des bras, l'amplitude de cette modulation est $h\frac{L}{c}$. La différence de temps mis par la lumière pour faire un aller retour selon les deux axes est donc :

$$\begin{aligned}\Delta\tau(t) &= \tau_x - \tau_y \\ &= \frac{2L}{c}h\left(t - \frac{L}{c}\right)\end{aligned}$$

Dans un repère rigide lié à la séparatrice, le passage d'une onde gravitationnelle s'interprète comme une dilatation ou une contraction des longueurs L_x et L_y des deux bras de l'interféromètre :

$$\begin{aligned}\Delta L_x &= c\frac{\Delta\tau_x(t)}{2} \\ &= \frac{L}{2}h\left(t - \frac{L}{c}\right) \\ \Delta L_y &= c\Delta\tau_y(t) \\ &= -\frac{L}{2}h\left(t - \frac{L}{c}\right)\end{aligned}$$

Pour mesurer ce délai, où de manière équivalente, cette variation de longueur des deux bras, on utilise un interféromètre de Michelson. La masse du coin du L est remplacée par une séparatrice et les masses des extrémités sont remplacées par des miroirs réfléchissants. Un faisceau laser est envoyé dans l'interféromètre par une des portes de la séparatrice. Les faisceaux interfèrent après un aller retour dans chaque bras. La mesure de la puissance transmise par l'autre porte de la séparatrice donne alors une mesure du déphasage :

$$\Delta\phi(t) = \frac{4\pi}{\lambda}(\Delta L_x - \Delta L_y) \tag{1.16}$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda}Lh\left(t - \frac{L}{c}\right) \tag{1.17}$$

où λ est la longueur d'onde du faisceau lumineux (voir chapitre 2). Pour une amplitude h donnée, la réponse du détecteur est donc proportionnelle à la longueur des bras.

Dans le cas plus général où l'onde gravitationnelle arrive depuis la direction (θ, ϕ) avec des axes de polarisation tournés d'un angle ψ par rapport au plan ϕ-constant (figure 1.2),

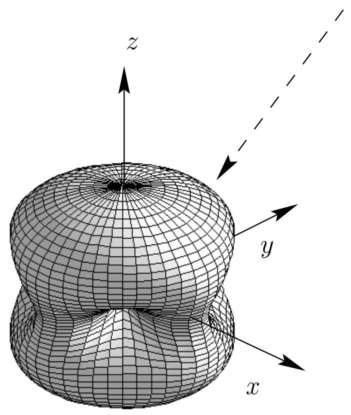


Figure 1.3: Sensibilité d'un interféromètre en fonction de la direction de propagation d'une onde gravitationnelle non polarisée. Les bras de l'interféromètre sont parallèles aux axes Ox et Oy.

la réponse du détecteur est toujours donnée par la formule (1.17) mais avec [7]:

$$\begin{aligned} h(t) &= F_+(\theta,\phi,\psi)h_+(t) + F_\times(\theta,\phi,\psi)h_\times(t) \qquad (1.18) \\ \text{où} & \\ F_+(\theta,\phi,\psi) &= \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\cos 2\phi\cos 2\psi - \cos\theta\sin 2\phi\sin 2\psi \\ F_\times(\theta,\phi,\psi) &= \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\cos 2\phi\cos 2\psi + \cos\theta\sin 2\phi\sin 2\psi \end{aligned}$$

Les fonction F_+ et $F_\times$ représentent la sensibilité du détecteur en fonction de la direction et de la polarisation de l'onde incidente (figure 1.3). La sensibilité d'un détecteur interférométrique est maximale lorsque la source du rayonnement gravitationnel est à la verticale du détecteur. Elle est minimale lorsque la direction incidente de l'onde est dans le plan du détecteur et à 45° par rapport aux bras. Mais globalement, un détecteur interférométrique a une bonne couverture de l'ensemble des directions incidentes.

Chapitre 2

Détection Interférométrique

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, la détection des ondes gravitationnelle peut se faire à l'aide d'un interféromètre de Michelson. Pour évaluer les performances d'un tel détecteur (sa sensibilité) on doit étudier les bruits qui limitent cette mesure. Dans ce chapitre on étudie les configurations qui permettent d'optimiser la sensibilité d'un détecteur interférométrique par rapport au bruit de photon. Ceci permet aussi d'établir les équations donnant la puissance des faisceaux transmis par l'interféromètre.

2.1 Le bruit de photon

Le bruit ultime est le bruit de comptage des photons lors de la détection du signal lumineux : le bruit de photon. Pour quantifier ce bruit, on doit exprimer sa densité spectrale :

$$S_{sn} = \sqrt{\frac{1}{T}(|\tilde{P}(f)|^2 + |\tilde{P}(-f)|^2)}$$

où T est le temps de mesure et $\tilde{P}(f)$ est la transformée de Fourier de la puissance détectée en fonction du temps qui s'écrit :

$$P(t) = h\nu \sum_i \delta(t - t_i),$$

où t_i est le temps d'arrivée du i-ème photon. La puissance continue du faisceau est donnée par :

$$P_{DC} = h\nu \frac{N}{T},$$

où N est le nombre de photons arrivés pendant le temps T. La transformée de Fourier de P(t) s'écrit donc :

$$\tilde{P}(f) = h\nu \sum_i e^{-\jmath 2\pi f t_i}.$$

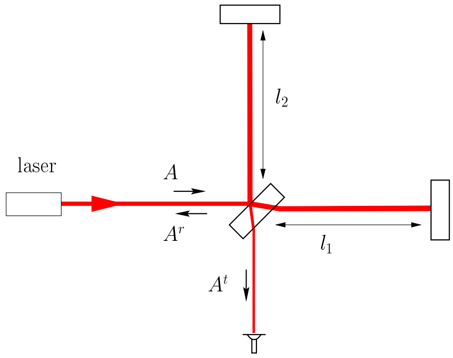


Figure 2.1: Interféromètre de Michelson.

Comme les temps d'arrivée t_i des photons sont distribués aléatoirement, pour $i \neq j$, on a :

$$\begin{aligned} < e^{\jmath 2\pi f(t_i - t_j)} > &= 0 \\ |\tilde{P}(f)|^2 &= (h\nu)^2 N \end{aligned}$$

La densité spectrale est donc donnée par :

$$S_{sn} = \sqrt{2h\nu P_{DC}}\ \mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}. \tag{2.1}$$

Le bruit de photon est donc un bruit blanc dont la densité spectrale est proportionnelle à la racine carrée de la puissance continue détectée.

2.2 Interféromètre de Michelson

Dans un interféromètre de Michelson, un faisceau est séparé dans deux bras par une séparatrice. Au bout de chaque bras, un miroir renvoie les faisceaux sur la séparatrice où ils interfèrent (figure 2.1). Si A est l'amplitude du champ incident sur la séparatrice supposée idéale ($r = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$), les faisceaux réfléchis A^r et transmis A^t par la séparatrice s'écrivent :

$$\begin{aligned} A^r &= \frac{A}{2}(r_1 e^{\jmath 2kl_1} + r_2 e^{\jmath 2kl_2}) \\ A^t &= \frac{A}{2}(r_1 e^{\jmath 2kl_1} - r_2 e^{\jmath 2kl_2}) \end{aligned}$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et les longueurs des deux bras sont l_1 et l_2 . r_1 et r_2 sont les réflectivités des deux miroirs de renvoi. Avec $l_- = l_2 - l_1$ la différence de longueur et $l_+ = l_2 + l_1$ la somme des longueurs des deux bras, les champs réfléchies et transmis par l'interféromètre peuvent alors se mettre sous la forme :

$$A^r = Ae^{\jmath\frac{\omega l_+}{c}}(r\cos(kl_-) + \jmath\Delta r\sin(kl_-)) \tag{2.2}$$

$$A^t = -Ae^{\jmath\frac{\omega l_+}{c}}(\jmath r\sin(kl_-) + \Delta r\cos(kl_-)) \tag{2.3}$$

où $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ est la réflectivité moyenne alors que $\Delta r = \frac{r_2-r_1}{2}$ représente l'asymétrie entre les réflectivités des deux bras. La puissance transmise par l'interféromètre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} P_t &= A^t\overline{A}^t \\ &= \frac{P_{max}}{2}(1 - C\cos(2kl_-)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

où :

$$P_{max} = P_0(r^2 + \Delta r^2) \quad \text{et} \quad C = \frac{r^2 - \Delta r^2}{r^2 + \Delta r^2}.$$

C est appelé le contraste de l'interféromètre. Lorsque $2kl_- = (2q+1)\pi$, la puissance transmise est maximale $P_t = P_{max}$, on dit alors que l'interféromètre est sur la frange blanche. Lorsque $kl_- = q2\pi$, la puissance transmise est minimale $P_t = P_{min}$, l'interféromètre est sur la frange noire.

$$\frac{P_{min}}{P_{max}} = \frac{1-C}{1+C}$$

Le contraste d'un interféromètre est une mesure de la qualité de l'interférence. Pour avoir un contraste de 1, les deux bras de l'interféromètre doivent avoir la même réflectivité et les deux faisceaux doivent avoir la même géométrie pour que l'interférence soit la même sur tout le front d'onde.

Si les réflectivités des deux miroirs de renvoi sont proches de 1 et $\Delta r \ll 1$, on a :

$$P_{max} \simeq P_0 \quad \text{et} \quad C \simeq 1 - 2\Delta r^2$$

La réponse de ce détecteur à une variation de la longueur l_- est alors donnée par :

$$\frac{dP_t}{dl_-} = CP_0k\sin(2kl_-)$$

Pour exprimer la sensibilité du détecteur en terme de longueur, on divise le bruit de photon (équation 2.1) (en W/$\sqrt{\text{Hz}}$) par la réponse de l'interféromètre en (W/m):

$$\tilde{l}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{h\nu}{P_{max}}}\frac{\sqrt{1 - C\cos(2kl_-)}}{C\sin(2kl_-)} \ \text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

La sensibilité $\tilde{l}_-^{sn}$ correspond à la densité spectrale de l_- provoquant un bruit équivalent au bruit de photon. Lorsque l'interféromètre est parfaitement symétrique ($r_1 = r_2$) le contraste est égal à 1 et la sensibilité est maximale lorsque l'interféromètre est sur la frange noire ($l_- = q\frac{\lambda}{2}$ avec q entier) et vaut :

$$\tilde{l}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}} \ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}.$$

La sensibilité de l'interféromètre est donc inversement proportionnelle à la puissance incidente sur la séparatrice.

Mais en pratique, l'interféromètre a toujours un défaut de symétrie, la sensibilité est alors maximale lorsque l'on est légèrement décalé de la frange noire. Dans ce cas, on peut montrer que la puissance transmise est donnée par :

$$P_t = \frac{P_0}{2}\sqrt{1-C^2}$$

et la sensibilité optimale est :

$$\tilde{l}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}}\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-C^2}}} \ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

Mais comme la puissance transmise sur la frange noire n'est plus nulle, on devient sensible au bruit de puissance du laser. Pour que ce bruit soit plus faible que le bruit de photon, on doit avoir :

$$\frac{\partial P_0}{P_0} < \sqrt{\frac{h\nu}{P_0}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-C^2}}$$

soit avec un défaut de contraste de 10^{-4} et une puissance incidente de 10 W :

$$\frac{\partial P}{P} < \ 1.4\ 10^{-9} \ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

dans la bande de fréquence où l'on cherche les ondes gravitationnelles (en dessous de quelques kHz) ce niveau de stabilisation est deux à trois ordres de grandeur en dessous de ce que l'on sait faire actuellement et même avec un très bon contraste, on reste dominé par le bruit en puissance du laser. Le bruit en puissance du laser diminue avec la fréquence, pour que la détection ne soit limitée que par le bruit de photon, il faut porter la mesure à haute fréquence c'est-à-dire faire de la détection synchrone.

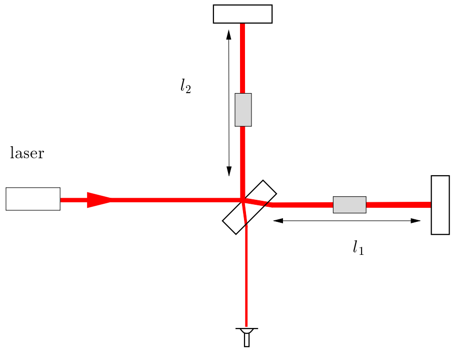


Figure 2.2: Interféromètre de Michelson avec modulation interne.

2.3 Détection synchrone

2.3.1 Modulation interne

Pour déplacer la mesure de l_- à haute fréquence, on doit moduler la phase du faisceau. Pour le faire, on utilise des cristaux dont l'anisotropie, et donc l'indice vu par le faisceau, varie en fonction de la tension appliquée sur le cristal. Ces cristaux sont appelés des cellules de Pockels. Si un champ traverse le cristal et si la tension appliquée au cristal a une pulsation Ω, le déphasage introduit par la cellule est égal à $m\sin(\Omega t)$ où m (la profondeur de modulation) dépend du cristal utilisé et de l'amplitude de la tension appliquée. On place une cellule de Pockels dans chaque bras de l'interféromètre (figure 2.2) à laquelle est appliquée une tension à haute fréquence. La puissance transmise par l'interféromètre s'écrit (équation 2.4):

$$P_t = \frac{P_0}{2}\Big[1 - C\cos\big(2kl_- + (m_2 - m_1)sin(\Omega t)\big)\Big]$$

où m_1 et m_2 sont respectivement la profondeur de modulation produite par les cellules de Pockels des bras 1 et 2 et Ω la pulsation de la modulation. Si les tensions appliquées aux cellules de Pockels sont en opposition de phase ($m_2 = -m_1 = m$), on a :

$$P_t = \frac{P_0}{2}\Big[1 - C\cos(2kl_-)\cos(4m\sin(\Omega t)) + C\sin(2kl_-)\sin(4m\sin(\Omega t))\Big]$$

On peut développer $\sin(4m\sin(\Omega t))$ et $\cos(4m\sin(\Omega t))$ grâce aux fonctions de Bessel. Lorsque m est faible, on peut se limiter au deux premières composantes :

$$P_t = \frac{P_0}{2}\Big[1 - CJ_0(4m)\cos(2kl_-) + C2J_1(4m)\sin(2kl_-)\sin(\Omega t)\Big]$$

La puissance transmise est donc la somme d'une composante continue :

$$P_{DC} = \frac{P_0}{2}\Big[1 - CJ_0(4m)\cos(2kl_-)\Big] \tag{2.5}$$

et d'une composante à la fréquence de modulation :

$$P_\Omega = P_0 C J_1(4m)\sin(2kl_-) \tag{2.6}$$

Cette composante dépend de la différence de longueur entre les deux bras. Avec une fréquence de modulation suffisante (typiquement de l'ordre de 10 MHz) le bruit à cette fréquence est dominé par le bruit de photon. La densité spectrale du bruit de photon après démodulation est

$$\tilde{S}_{sn} = \sqrt{2}\sqrt{2P_{DC}h\nu}\ \mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

où le facteur $\sqrt{2}$ vient du processus de démodulation : on a addition incohérente du bruit de photon aux fréquences $\Omega - 2\pi f$ et $\Omega + 2\pi f$.

La sensibilité de l'interféromètre s'écrit alors :

$$\tilde{l}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}}\frac{\sqrt{1 - CJ_0(4m)\cos(2\frac{\omega l_-}{c})}}{CJ_1(4m)\cos(2\frac{\omega l_-}{c})}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

et elle est maximale lorsque l'interféromètre est réglé sur la frange noire :

$$\tilde{l}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}}\frac{\sqrt{1 - CJ_0(4m)}}{CJ_1(4m)}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

Pour optimiser la sensibilité de l'interféromètre, on doit choisir une profondeur de modulation telle que $\tilde{l}_-^{sn}$ soit minimal. Si le contraste est égal à 1, la modulation optimale tend vers zéro et la sensibilité optimale devient ;

$$\tilde{l}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

On retrouve la même sensibilité que celle (théorique) obtenue en détection continue.

Lorsque le contraste est plus petit que 1, la puissance transmise, et donc le bruit de photon augmentent. La profondeur de modulation optimale résulte alors d'un compromis entre l'augmentation de la réponse de l'interféromètre ($J_1(4m)$ croît avec m) et l'augmentation de la puissance transmise ($J_0(4m)$ décroît avec m). La figure 2.3 montre la sensibilité en fonction de la profondeur de modulation pour différentes valeurs du contraste. La meilleure sensibilité est alors obtenue en augmentant la modulation du faisceau entrant dans l'interféromètre.

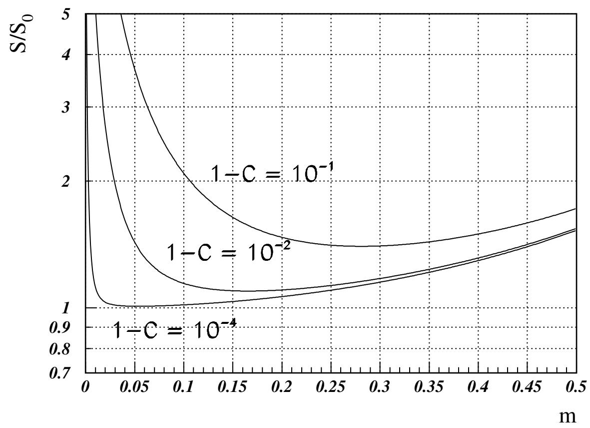


Figure 2.3: Sensibilité d'un interféromètre avec modulation interne en fonction de la profondeur de modulation pour différent contraste normalisée par la sensibilité d'un interféromètre ayant un contraste parfait.

2.3.2 Modulation frontale

Les Cellules de Pockels sont des éléments optiques qui absorbent de la puissance et qui altèrent le front d'onde des faisceaux. Avec une Cellule dans chaque bras, ces déformations seront différentes dans chaque bras ce qui va dégrader le contraste de l'interféromètre. On préfère donc la modulation frontale (figure 2.2) qui consiste à moduler la phase du faisceau avant qu'il n'entre dans l'interféromètre, les déformations du front d'ondes ne dégradent alors plus le contraste.

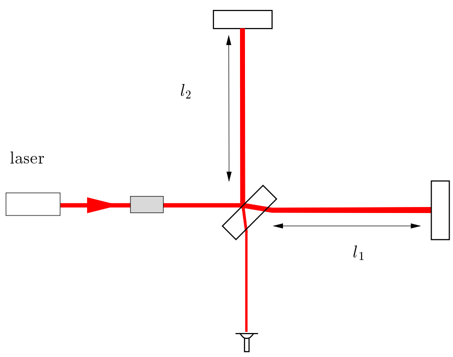


Figure 2.4: Interféromètre de Michelson avec modulation frontale.

Le champ transmis par la cellule et entrant dans l'interféromètre s'écrit :

$$E(t) = Ae^{\jmath\omega_0 t}e^{\jmath m\sin(\Omega t)} \tag{2.7}$$

Le terme $e^{\jmath m\sin(\Omega t)}$ peut être développé grâce aux fonctions de Bessel :

$$e^{\jmath m\sin(\Omega t)} = J_0(m) + J_1(m)e^{\jmath\Omega t} - J_1(m)e^{-\jmath\Omega t} + \text{termes d'ordre supérieur.} \tag{2.8}$$

En ne gardant que les termes au premier ordre, le champ E s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E(t) &= AJ_0(m)e^{\jmath\omega_0 t} + AJ_1(m)e^{\jmath(\omega_0+\Omega)t} - AJ_1(m)e^{\jmath(\omega_0-\Omega)t} \\ &= A_0e^{\jmath\omega_0 t} + A_+e^{\jmath(\omega_0+\Omega)t} + A_-e^{\jmath(\omega_0-\Omega)t} \end{aligned} \tag{2.9}$$

et est la superposition d'une onde de pulsation ω_0 que l'on appelle la porteuse et de deux ondes de pulsation $\omega_0 \pm \Omega$ que l'on appelle les bandes latérales. L'amplitude des ces ondes dépend de la profondeur de modulation. Les champs transmis par l'interféromètre s'écrivent alors (en appliquant l'équation (2.3) à la porteuse et aux bandes latérales):

$$\begin{aligned} A_0^t &= -A_0^i e^{\jmath\frac{\omega_0 l_+}{c}}(\jmath r\sin(\frac{\omega_0 l_-}{c}) + \Delta r\cos(\frac{\omega_0 l_-}{c})) \\ A_\pm^t &= -A_\pm^i e^{\jmath\frac{(\omega_0\pm\Omega)l_+}{c}}(\jmath r_{bl}\sin(\frac{(\omega_0\pm\Omega)l_-}{c}) + \Delta r_{bl}\cos(\frac{(\omega_0\pm\Omega)l_-}{c})) \end{aligned}$$

où r_{bl} et Δr_{bl} représente respectivement la réflectivité moyenne et l'asymétrie des deux bras pour les bandes latérales[1]. Comme dans le schéma de modulation interne, on doit minimiser le bruit de photon et donc minimiser la puissance continue. La porteuse doit donc être sur la frange noire ($l_- = \Delta l_- + \lambda q$ avec q entier). On a donc :

$$\begin{aligned} A_0^t &= -A_0 e^{\jmath\frac{\omega_0}{c}l_+}(\jmath r\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l_- + \Delta r) \\ A_\pm^t &= -A_\pm e^{\jmath\frac{\omega_0\pm\Omega}{c}l_+}(\pm\jmath r_{bl}\sin(\frac{\Omega l_-}{c}) + \Delta r_{bl}\cos(\frac{\Omega l_-}{c})) \end{aligned}$$

Pour avoir un signal à la fréquence de modulation, les bandes latérales ne doivent pas être sur la frange noire ($\frac{\Omega l_-}{c} \neq q2\pi$), on néglige donc le terme $\Delta r_b\cos(\frac{\Omega l_-}{c})$ par rapport à $r_b\sin(\frac{\Omega l_-}{c})$:

$$\begin{aligned} A_0^t &= -A_0 e^{\jmath\frac{\omega_0 l_+}{c}}(\jmath r\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l_- + \Delta r) \\ A_\pm^t &= -A_\pm e^{\jmath\frac{\omega_0\pm\Omega}{c}l_+}\jmath r_{bl}\sin(\frac{\Omega l_-}{c}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

[1] On se place ici dans un cas plus général : dans le cas d'un interféromètre simple la réflectivité des bandes latérales est la même que celle de la porteuse.

La puissance transmise par l'interféromètre est la somme d'un terme continu, d'un terme à la fréquence de modulation et d'un terme à deux fois la fréquence de modulation. Avec $T = \sin^2(\frac{\Omega l_-}{c})$, facteur de transmission des bandes latérales, et $r \sim r_{bl} \sim 1$, la puissance continue transmise est donnée par :

$$P_{DC} = P_0 \left(J_0^2(m) \frac{1-C}{2} + 2J_1^2(m)T \right)$$

où $1 - C = 2\Delta r^2$ est le défaut de contraste. La puissance à la fréquence de modulation est donnée par :

$$P_\Omega = 4P_0 J_0(m) J_1(m) \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{T} \Delta l_-$$

et la sensibilité par :

$$\tilde{l}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}} \frac{\sqrt{J_0^2(m)(1-C) + 4TJ_1^2(m)}}{2J_0(m)J_1(m)\sqrt{T}} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

Pour optimiser la sensibilité, on doit donc maximiser T, le facteur de transmission des bandes latérales, il est égal à 1 lorsque $\frac{\Omega l_-}{c} = \frac{\pi}{2} + q\pi$. Les longueurs des deux bras doivent donc être différentes pour que l'on puisse avoir en même temps la porteuse sur la frange noire et les bandes latérales sur la frange blanche.

La sensibilité s'écrit alors :

$$\tilde{l}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}} \frac{\sqrt{J_0^2(m)(1-C) + 4J_1^2(m)}}{2J_0(m)J_1(m)} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

Dans le cas d'un contraste parfait $C = 1$, la sensibilité optimale est obtenue avec une profondeur de modulation nulle

$$\tilde{l}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

soit la même sensibilité que celle obtenue avec le schéma de modulation interne. La figure 2.5 représente la sensibilité de l'interféromètre en fonction de la profondeur de modulation pour différents défauts de contraste.

Lorsque le contraste diminue il faut augmenter la profondeur de modulation pour obtenir la meilleure sensibilité. Par rapport au schéma de modulation interne, la profondeur de modulation optimale est à peu près 4 fois plus importante. Ceci vient essentiellement du fait que dans le schéma de modulation interne, on a deux modulateurs dans lesquels le faisceau passe deux fois.

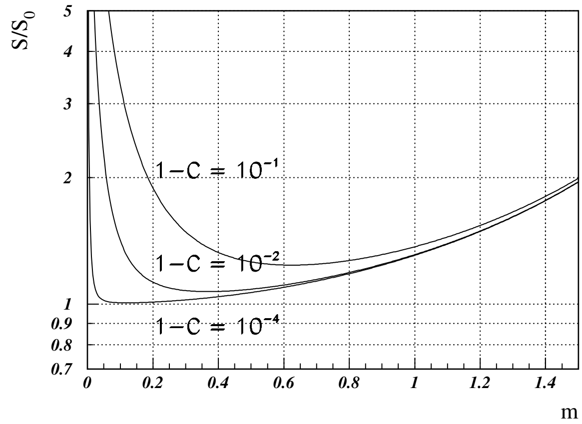


Figure 2.5: Sensibilité d'un interféromètre avec modulation frontale en fonction de la profondeur de modulation pour différent contraste normalisée par la sensibilité d'un interféromètre ayant un contraste parfait.

2.4 Cavité Fabry-Perot

Pour limiter la taille des bras et améliorer la sensibilité d'un interféromètre, on peut faire faire aux faisceaux plusieurs allers retours entre la séparatrice et les miroirs de renvoi. Mais cette solution (ligne à retard) nécessite des optiques de grande dimension. Une solution élégante consiste à utiliser des cavités Fabry-Perot (voir annexe B) dans les bras de l'interféromètre.

Lorsque la cavité est résonante, le nombre moyen d'allers retours que fait le faisceau avant de ressortir vers la séparatrice est $\frac{2F}{\pi}$ où F, la finesse de la cavité, dépend uniquement des réflectivités du miroir d'entrée r_e et du miroir de renvoi de la cavité. Avec un miroir de renvoi parfaitement réfléchissant, elle est donnée par (équation B.3) :

$$F = \frac{\pi\sqrt{r_e}}{1-r_e}$$

Les cavités Fabry-Perot sont équivalentes à des miroirs ayant une réflectivité (équation B.6):

$$r_{FP} = \rho_{FP} e^{j\phi_{FP}}$$

où ρ_{FP} représente les pertes dans la cavité Fabry-Perot et ϕ_{FP} représente le déphasage du faisceau réfléchi par la cavité par rapport au faisceau incident (équation B.8):

$$\phi_{FP} = \pi + 2\arctan\left(\frac{2F}{\pi}\tan(2\pi\frac{L}{\lambda})\right)$$

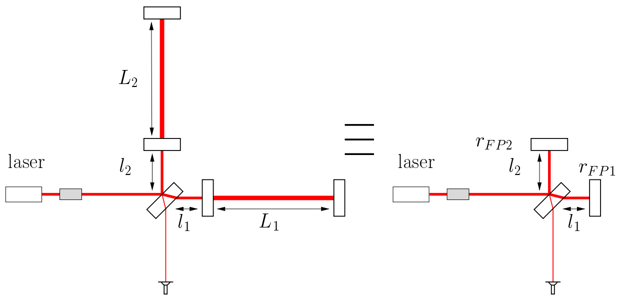


Figure 2.6: Interféromètre avec des cavité Fabry-Perot dans chaque bras

où L est la longueur de la cavité Fabry-Perot. Lorsque la cavité est résonante $L = q\frac{\lambda}{2} + \Delta L$, on a au premier ordre en ΔL :

$$\phi_{FP} = \pi + \frac{2F}{\pi}\frac{4\pi}{\lambda}\Delta L \tag{2.11}$$

alors que lorsque la cavité est antirésonante, $L = \frac{\lambda}{4} + q\frac{\lambda}{2} + \Delta L$, on a au premier ordre en ΔL :

$$\phi_{FP} = \frac{\pi}{2F}\frac{4\pi}{\lambda}\Delta L$$

Lorsque la cavité est résonante, le déphasage du faisceau provoqué par un mouvement ΔL du miroir de renvoi de la cavité est amplifié d'un facteur $\frac{2F}{\pi}$ alors que lorsque la cavité est antirésonante, le déphasage est atténué par ce même facteur.

On place donc dans les deux bras de l'interféromètre des cavités Fabry-Perot de finesse F (figure 2.6). Les champs transmis par l'interféromètre s'écrivent alors (figure 2.10):

$$\begin{aligned} A_0^t &= -A_0 e^{\jmath\frac{\omega_0 l_+}{c}}(\jmath r\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l_- + \Delta r) \\ A_\pm^t &= -A_\pm e^{\jmath\frac{\omega_0 \pm \Omega}{c}l_+}\jmath r_{bl}\sin(\frac{\Omega l_-}{c}) \end{aligned}$$

mais avec :

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_{FP2} + r_{FP1}}{2} \\ \Delta r &= \frac{r_{FP2} - r_{FP1}}{2} \end{aligned}$$

où r_{FP1} et r_{FP2} sont les réflectivités des Fabry-Perot pour la porteuse et avec :

$$r_{bl} = \frac{r_{FP1}^{bl} + r_{FP2}^{bl}}{2}$$

où r_{FP1}^{bl} et r_{FP2}^{bl} sont les réflectivités des Fabry-Perot pour les bandes latérales. On peut choisir la longueur des cavités pour que lorsque la porteuse est résonante $L = n\frac{\lambda}{2}$, les bandes latérales soient antirésonantes $L = (2m+1)\frac{2\pi c}{\Omega}$ avec n et m entiers. On a alors (équation 2.11):

$$\begin{aligned}\Delta r &= \Delta\rho + \jmath\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2F}{\pi}\Delta L_- \\ r_{bl} &= 1\end{aligned}$$

où $\Delta\rho = \frac{\rho_{FP2}-\rho_{FP1}}{2}$ représente la différence de réflectivité des Fabry-Perot et où $\Delta L_- = \Delta L_2 - \Delta L_1$ représente la différence de déplacement entre les deux Fabry-Perot. Pour maximiser la sensibilité on doit avoir des cavités les plus grandes possible, les miroirs d'entrées sont donc proches de la séparatrice. Une onde gravitationnelle d'amplitude h va donc créer un mouvement des deux bras $\Delta L_- = Lh \gg \Delta l_-$. Les puissances transmises par l'interféromètre s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}P_{DC} &= P_0\left(J_0^2(m)\frac{1-C}{2} + 2J_1^2(m)T\right) \\ P_\Omega &= 4P_0 J_0(m)J_1(m)\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2F}{\pi}\sqrt{T}\Delta L_-\end{aligned}$$

où $1 - C = 2\Delta\rho^2$ et la sensibilité par :

$$\tilde{\Delta L}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\pi}{2F}\sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}}\frac{\sqrt{J_0^2(m)(1-C)+4TJ_1^2(m)}}{J_0(m)J_1(m)\sqrt{T}} \ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

Cette technique améliore donc la réponse de l'interféromètre d'un facteur $\frac{2F}{\pi}$ en faisant faire au faisceau plusieurs allers retours dans les cavités. Mais la détection du mouvement est intégrée sur plusieurs allers retours, la cavité filtre donc les mouvements des miroirs. Un calcul exact montre que la réponse de la cavité Fabry-Perot est donnée par [12]:

$$\tilde{\phi}_{FP} = \pi + \frac{2F}{\pi}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta\tilde{L}}{\sqrt{1+\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2\sin^2(\pi\frac{2Lf}{c})}} \tag{2.12}$$

où f est la fréquence d'un mouvement ΔL. A basse fréquence, l'effet des cavités Fabry-Perot s'apparente à un filtre de type passe-bas du premier ordre avec une fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{c}{4FL} \tag{2.13}$$

La figure 2.7 représente la sensibilité d'un interféromètre avec des cavités dans chaque bras pour différentes valeurs de la finesse normalisée par la sensibilité d'un interféromètre sans cavité Fabry-Perot. En continu, la sensibilité est augmentée d'un facteur $\frac{2F}{\pi}$ mais à plus haute fréquence on ne peut pas augmenter la sensibilité au-dessus d'un facteur $\frac{c}{2\pi Lf}$.

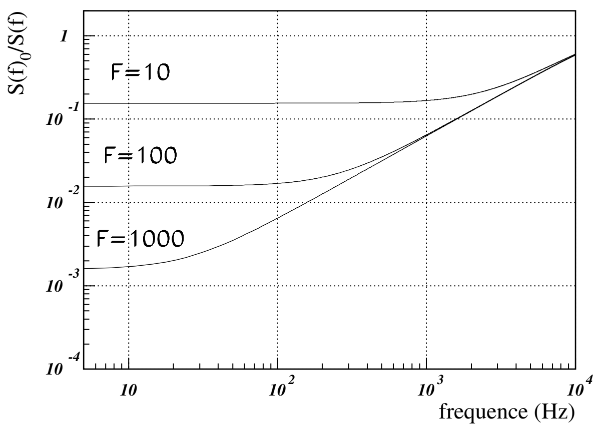


Figure 2.7: Rapport entre la sensibilité d'un interféromètre avec des cavités Fabry-Perot et d'un interféromètre sans cavité en fonction de la fréquence et pour différentes valeurs de finesse.

2.5 Recyclage de la lumière

Pour optimiser sa sensibilité, l'interféromètre est donc réglé pour que la porteuse soit sur la frange noire. La proportion de la puissance incidente qui est transmise dans le faisceau de frange noire est $\frac{1-C}{2}$ alors que la proportion réfléchie vers le laser est $\frac{1+C}{2} \sim 1$. Pour augmenter la puissance sur la séparatrice, on peut ajouter un miroir entre le laser et la séparatrice (miroir de recyclage) qui renvoie la puissance réfléchie par la séparatrice dans l'interféromètre (figure 2.8). On forme ainsi une cavité (cavité de recyclage) ayant le miroir de recyclage comme miroir d'entrée et l'interféromètre comme miroir de renvoi.

Les champs réfléchis par la séparatrice peuvent s'écrire en fonction du champ incident au niveau du miroir de recyclage A_{rec} (formule 2.2):

$$A^r(\omega) = A^{rec}(\omega)e^{\jmath\frac{\omega l_0}{c}}e^{\jmath\frac{\omega l_+}{c}}(\jmath r(\omega)\cos(\frac{\omega l_-}{c}) + \Delta r(\omega)\sin(\frac{\omega l_-}{c}))$$

où $\omega = \omega_0, \omega_0 \pm \Omega$ et où l_0 est la distance entre le miroir de recyclage et la séparatrice. Les champs dans la cavité de recyclage s'écrivent donc :

$$A^{rec}(\omega) = t_r A^i(\omega) - r_r A^r(\omega)e^{\jmath\frac{\omega}{c}l_0}$$

et on a finalement :

$$A^{rec}(\omega) = A^i(\omega)\frac{t_r}{1 - r_r e^{\jmath\frac{\omega}{c}(2l_0+l_+)}(r(\omega)\cos(\frac{\omega l_-}{c}) + \jmath\Delta r(\omega)\sin(\frac{\omega l_-}{c}))}$$

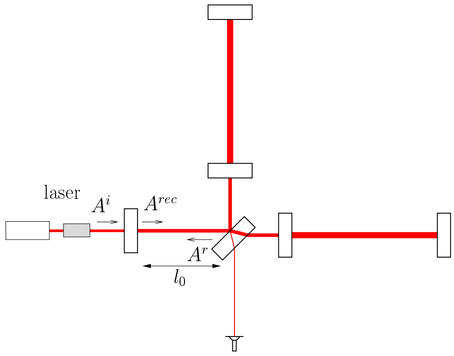


Figure 2.8: Interféromètre recyclé

La porteuse est sur la frange noire on a donc :

$$
\begin{aligned}
A_0^{rec} &= A_0^i \frac{t_r}{1 - r_r \rho e^{\jmath \frac{\omega_0}{c}(2l_{rec})}} \\
A_\pm^{rec} &= A_\pm^i \frac{t_r}{1 + r_r r_{bl} e^{\jmath \frac{\omega_0 \pm \Omega}{c}(2l_{rec})} \cos(\frac{\Omega l_-}{c})}
\end{aligned}
$$

où $l_{rec} = l_0 + \frac{l_+}{2}$ est la longueur de la cavité de recyclage et ρ la réflectivité des Fabry-Perot pour la porteuse.

Pour maximiser le puissance incidente sur la séparatrice, la position du miroir de recyclage doit être asservie pour que la cavité de recyclage soit résonante pour la porteuse :

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega_0}{c} 2l_{rec} &= 2n\pi \text{ soit} \\
l_{rec} &= n\frac{\lambda}{2}
\end{aligned}
$$

Dans ces conditions, la puissance incidente sur la séparatrice est amplifiée d'un facteur $R = \frac{P_{rec}}{P_0}$ appelé facteur de recyclage et égal à :

$$
R = \left(\frac{t_r}{1 - r_r \rho} \right)^2 \tag{2.14}
$$

La figure 2.9 montre le facteur de recyclage en fonction de la réflectivité r_r. on voit que la puissance stockée dans la cavité est maximale quand la réflectivité du miroir de recyclage est égale à la réflectivité de l'interféromètre ($r_r = \rho$). Le facteur de recyclage est alors donné par :

$$
R = \frac{1}{p} \tag{2.15}
$$

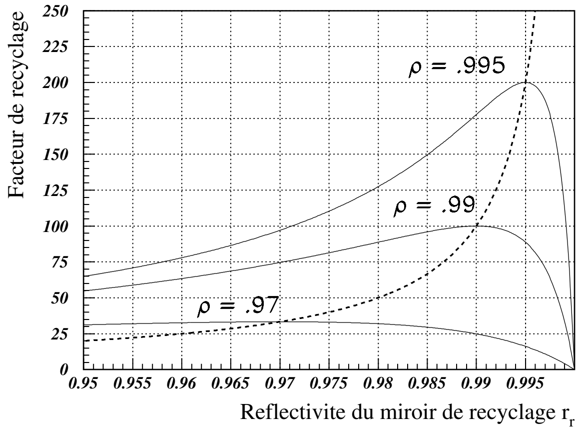


Figure 2.9: Facteur de recyclage en fonction de la réflectivité du miroir de recyclage r_r et pour différentes valeurs de ρ.

où $p = 1 - \rho^2$ représente les pertes dans les cavités Fabry-Perot de l'interféromètre. Pour maximiser le facteur de recyclage, on doit donc avoir dans l'interféromètre les pertes les plus faibles possibles.

Pour maximiser la puissance des bandes latérales, elles doivent être elles aussi résonantes dans la cavité de recyclage, la taille de la cavité de recyclage doit être telle que :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0 \pm \Omega}{c} 2l_{rec} &= (2m+1)\pi \text{ soit} \\ l_{rec} &= (2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{c}{\Omega} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Les champs transmis par l'interféromètre s'écrivent alors (équation 2.10):

$$\begin{aligned} A_0^t &= A_0^i \sqrt{R} e^{\jmath \frac{\omega_0 l_0}{c}} (\Delta\rho + \jmath \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2F}{\pi} \Delta L_-) \\ A_\pm^t &= A_\pm^i \sqrt{T} e^{\jmath \frac{\omega_0 \pm \Omega}{c} l_0} \end{aligned} \tag{2.17}$$

où T est appelé facteur de transmission des bandes latérales et vaut :

$$T = \left(\frac{t_r r_{bl} \sin(\frac{\Omega l_-}{c})}{1 - r_r r_{bl} \cos(\frac{\Omega l_-}{c})} \right)^2$$

Comme dans l'interféromètre sans recyclage on choisit l'asymétrie l_- pour maximiser T :

$$\cos(\frac{\Omega l_-}{c}) = r_r r_{bl} \tag{2.18}$$

on a alors

$$T = \frac{r_{bl}^2 t_r^2}{1 - r_{bl}^2 r_r^2}$$

Avec $r_{bl} = 1$ et pas de perte dans le miroir de recyclage ($t_r^2 + r_r^2 = 1$), on alors $T = 1$.

La puissance continue et la puissance à la fréquence de modulation transmise peuvent être calculées à partir des équations 2.17 :

$$P_{DC} = P_0 \left(J_0^2(m) R \frac{1-C}{2} + 2 J_1^2(m) T \right) \tag{2.19}$$

$$P_\Omega = 4 P_0 J_0(m) J_1(m) \frac{2F}{\pi} \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{RT} \Delta L_- \tag{2.20}$$

on voit que la réponse de l'interféromètre à l'onde gravitationnelle est augmentée d'un facteur $\sqrt{R}$. La sensibilité est donc donnée par :

$$\tilde{\Delta L}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\pi}{2F} \sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}} \frac{\sqrt{R J_0^2(m)(1-C) + 4T J_1^2(m)}}{2 J_0(m) J_1(m) \sqrt{RT}} \ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \tag{2.21}$$

Un interféromètre sans défaut de contraste a donc une sensibilité :

$$\tilde{\Delta L}_-^{sn} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\pi}{2F} \sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}} \frac{1}{\sqrt{R}} \ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \tag{2.22}$$

elle est améliorée d'un facteur $\sqrt{R}$.

Le facteur de recyclage est déterminé par les pertes dans l'interféromètre et en particulier par les pertes dans les cavités Fabry-Perot. Ces pertes sont proportionnelles à la finesse des cavités :

$$p = \frac{2F}{\pi} \epsilon$$

où ϵ sont les pertes pour un aller retour dans une cavité. Le facteur de recyclage maximal est donc donné par (équation 2.15) :

$$R = \frac{\pi}{2F\epsilon}$$

La figure 2.10 représente la sensibilité d'un interféromètre avec un recyclage optimum (les pertes sur les miroirs de renvoi des Fabry-Perot sont égales à 100 ppm) pour différentes valeurs de la finesse. On voit que le choix de la fréquence de coupure de la cavité résulte d'un compromis entre la bande passante du détecteur et la sensibilité à basse fréquence.

Comme dans les autres configurations, l'interféromètre n'a pas un contraste parfait. La figure 2.11 représente la sensibilité de l' interféromètre recyclé (avec R=50) pour différents

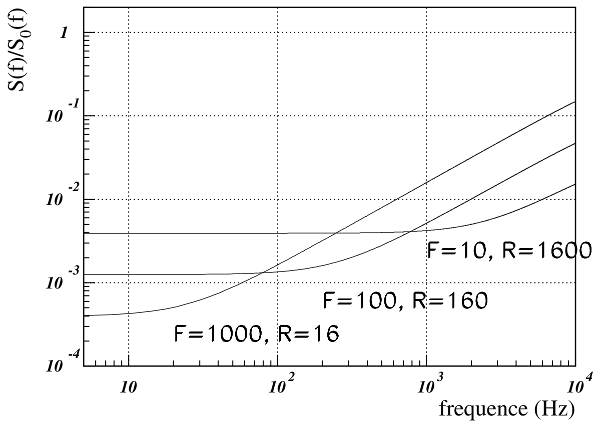


Figure 2.10: Sensibilité d'un interféromètre (à basse fréquence) avec des cavités Fabry-Perot et recyclage optimal pour différentes valeurs de finesse normalisée avec la sensibilité d'un interféromètre simple. La longueur des bras est de 3 km et les pertes sur les miroirs de renvoi des Fabry-Perot sont de 10^{-4}.

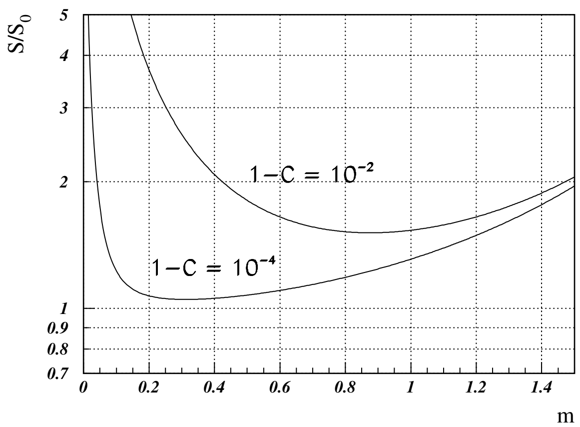


Figure 2.11: Sensibilité d'un interféromètre recyclé ($R = 50$ et $T = 1$) en fonction de la profondeur de modulation pour différentes valeurs du contraste normalisée par la sensibilité sans défaut de contraste.

contrastes normalisée par la sensibilité du même interféromètre sans défaut de contraste. Par rapport à l'interféromètre sans recyclage, la puissance continue provenant de la porteuse est amplifiée par le recyclage d'un facteur R. Pour un contraste donné le bruit de photon est donc amplifié d'un facteur $\sqrt{R}$. La sensibilité est donc beaucoup plus sensible au défaut de contraste que dans le cas d'un interféromètre non recyclé. De plus la profondeur de modulation que l'on doit appliquer sur les cellules de Pockels pour obtenir la sensibilité optimale doit être plus importante.

2.6 Conclusion

La sensibilité d'un interféromètre aux ondes gravitationnelles par rapport au bruit de photon augmente linéairement avec la distance parcourue par les faisceaux et est proportionnelle à la racine carrée de la puissance incidente sur la séparatrice.

Pour améliorer cette sensibilité on peut faire faire au faisceau plusieurs allers retours dans les bras (cavité Fabry-Perot) avant qu'ils n'interfèrent sur la séparatrice, ce qui amplifie la distance parcourue par les faisceaux sans augmenter la taille des bras. Pour augmenter la puissance sur la séparatrice, on recycle la lumière en renvoyant dans l'interféromètre la puissance qu'il réfléchit.

Mais la sensibilité obtenue dépend aussi du défaut de contraste de l'interféromètre. Pour un interféromètre avec un contraste donné, la puissance transmise dans la frange noire est amplifiée elle aussi par le recyclage. Un interféromètre recyclé est donc beaucoup plus sensible au défaut de contraste. Pour être proche de la sensibilité optimale, un interféromètre recyclé doit avoir un défaut de contraste de l'ordre de 10^{-4}.

Or le défaut de contraste est essentiellement dû aux imperfections des optiques utilisées. Dans les cavités Fabry-Perot, on multiplie les réflexions et donc les déformations des faisceaux, ce qui dégrade le contraste. Pour atteindre un défaut de contraste de 10^{-4}, le faisceau transmis par l'interféromètre doit donc être filtré avant la détection de la puissance lumineuse.

Chapitre 3

Le détecteur VIRGO

VIRGO est un projet Franco-Italien dont le but est la détection directe des ondes gravitationnelles. Cette expérience est aussi destinée à devenir un observatoire, étudiant la contrepartie gravitationnelle des phénomènes violents de l'univers.

VIRGO est un détecteur interférométrique mesurant la position de masse distante de 3 km. La sensibilité attendue en h est de l'ordre de $3\ 10^{-23}\ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$ soit deux à trois ordres de grandeur mieux que les détecteurs interférométriques actuels. De plus le système de suspension des miroirs permet de repousser le "mur" sismique en dessous de quelques Hz.

La partie centrale du détecteur est actuellement en cours d'installation à Cascina, près de Pise (Italie).

3.0.1 Interféromètre

La partie centrale de l'interféromètre est composée de la source laser, de la séparatrice, des miroirs d'entrées des Fabry-Perot et du miroir de recyclage.

Laser

Le laser de VIRGO est un NdYAG fournissant un faisceau de 20 W de longueur d'onde 1.06 μm. Ce laser doit être à la fois très stable en puissance et en fréquence. A la fréquence de modulation, le bruit en puissance du laser doit être dominé par le bruit de photon. De plus, le bruit en puissance du laser à basse fréquence peut être transmis sur la frange noire si l'interféromètre n'est pas exactement sur la frange noire. Avec un décalage correspondant à 10^{-12} m, on doit avoir [13]:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{P} < 3\ 10^{-7}\ /\sqrt{\mathrm{Hz}} \quad \text{à 100 Hz}$$

Le bruit en fréquence du laser peut être transmis par le signal de frange noire si le temps de stockage de la lumière dans chaque bras n'est pas le même. Cette asymétrie est

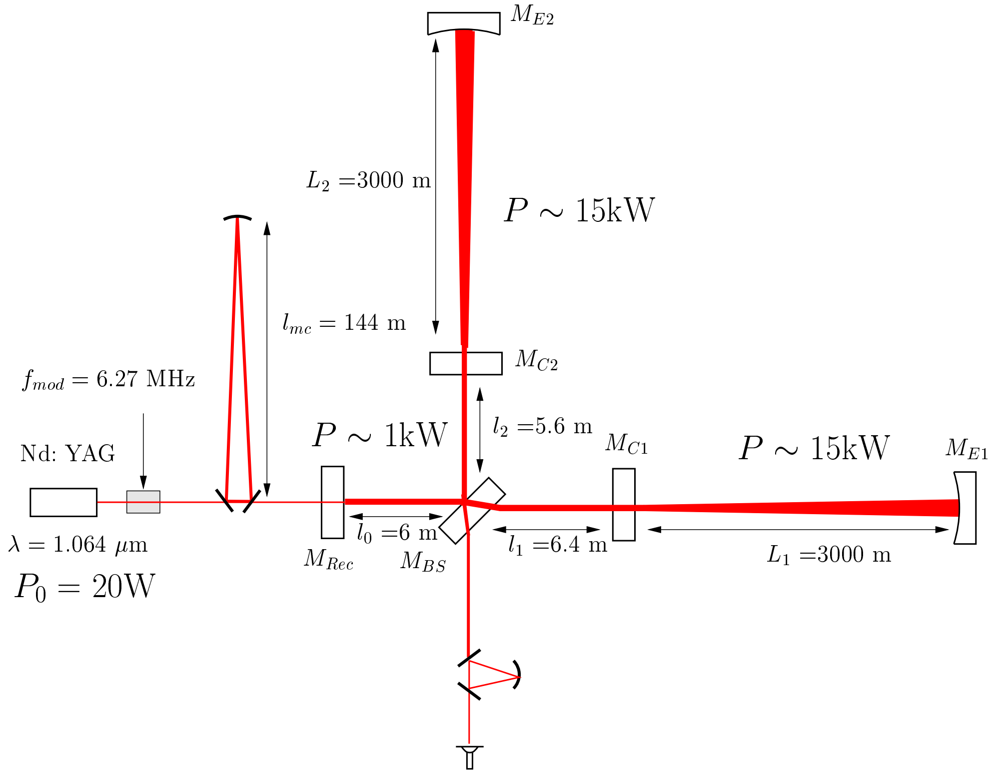


Figure 3.1: Vue schématique de la configuration optique de VIRGO.

essentiellement due à la différence de finesse entre les deux cavités Fabry-Perot, avec une différence de 1 % entre les finesses, la stabilité en fréquence du laser doit être de [13]:

$$\partial\tilde{\nu} < 10^{-6}\ \mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \quad \text{à } 100\ \mathrm{Hz}$$

Avant d'entrer dans l'interféromètre, le faisceau est filtré grâce à une cavité optique triangulaire (figure 3.1) de finesse 1000 : le mode cleaner d'entrée. Cette cavité de 144 mètres de long permet d'éliminer les défauts géométriques du faisceau et le bruit en position et en angle du laser.

Configuration optique

VIRGO est un détecteur interférométrique recyclé avec des Fabry-Perot de 3 km dans chaque bras (figure 3.1). Le waist du faisceau, de 2 cm de large, est situé sur le miroir d'entrée des Fabry-Perot. La zone de Rayleigh est donc de 1200 mètres (formule A.4). Dans la partie centrale de l'interféromètre, le faisceau peut donc être considéré comme parallèle. Par contre, la taille du faisceau au bout des trois kilomètres (au niveau des miroirs de renvoi des cavités Fabry-Perot) est de 5 cm (formule A.5).

Miroirs

L'interféromètre VIRGO est recyclé, pour maximiser la puissance sur la séparatrice, on doit donc minimiser les pertes. Pour éviter les effets de bord, le diamètre des miroirs doit être d'au moins 5 fois la taille du faisceau (10 cm dans la zone centrale et 28 cm pour les miroirs de renvoi des Fabry-Perot). Pour atteindre des hautes réflectivités la surface des miroirs est traitée avec un revêtement multicouche. Pour ne pas déformer le front d'onde, les déformations de surface des miroirs doivent être de l'ordre d'un centième de longueur d'onde. De plus, pour éviter les pertes mais surtout l'échauffement et la déformation du miroir, les pertes dans le substrat doivent être très faibles, de l'ordre de quelques ppm. Ces miroirs sont actuellement en cours de fabrication et de traitement [14].

Bruit de photon

La finesse des Fabry-Perot est de 50, leur fréquence de coupure est donc à 500 Hz (formule 2.13). A partir des spécifications sur les optiques, on peut estimer que les pertes dans l'interféromètre seront pour la porteuse d'environ 2 %. On pourra donc atteindre un recyclage de $R = 50$ (formule 2.15) avec un miroir de recyclage ayant une réflectivité en amplitude de $r_r = .99$.

Avec un contraste parfait, le niveau du bruit de photon est alors de (formule 2.22) :

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{sn} &= \frac{1}{L}\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\pi}{2F}\sqrt{\frac{h\nu}{2RP_0}}\ 1/\sqrt{\mathrm{Hz}} \\ &= 1.7\ 10^{-23}\ 1/\sqrt{\mathrm{Hz}} \end{aligned}$$

à basse fréquence. La contribution du bruit de photon à la sensibilité de VIRGO est représentée sur la figure 3.2, elle remonte au-dessus de la fréquence de coupure de la cavité qui avec une finesse de 50 est à 500 Hz (formule 2.12).

Fréquence de modulation

La taille de la cavité de recyclage (la distance entre le miroir de recyclage et les miroirs d'entrée dans les Fabry-Perot) étant de 12 mètres, la fréquence de modulation du faisceau doit donc être (formule 2.16) :

$$\begin{aligned} f_{mod} &= (2k+1)\frac{c}{4l_{rec}} \\ &= (2k+1)6.27\ \mathrm{MHz} \end{aligned}$$

Dans VIRGO, la fréquence de modulation choisie est de 6.27 MHz.

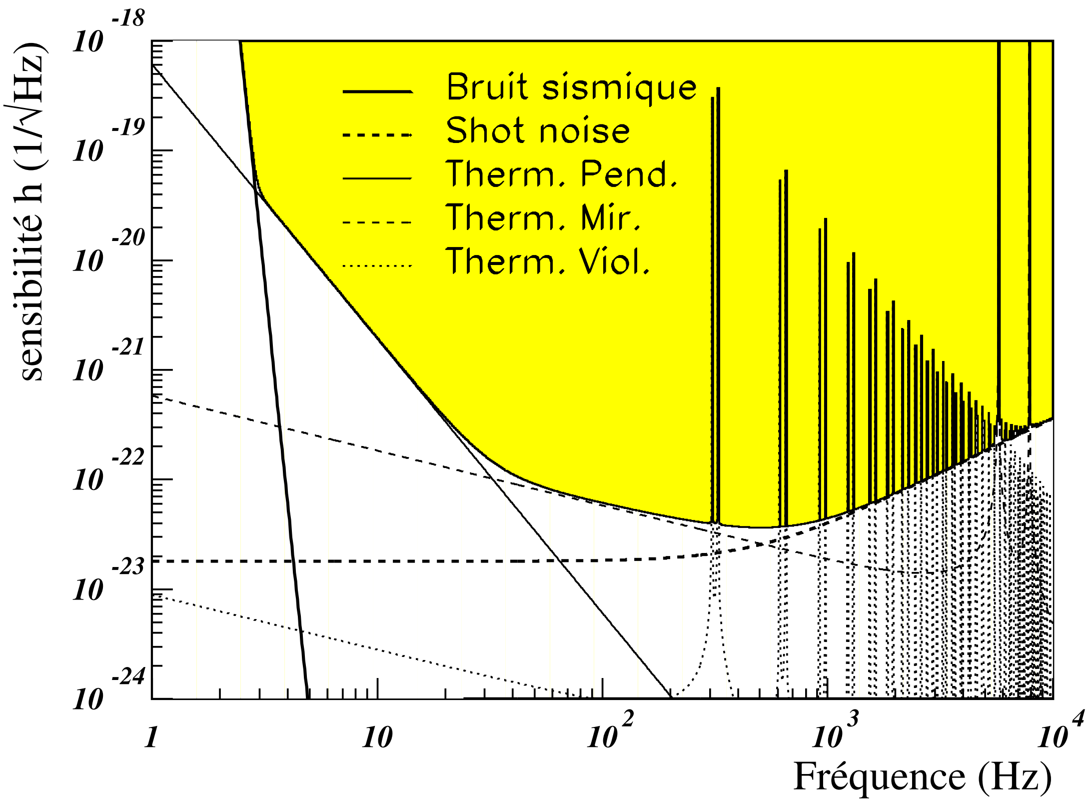


Figure 3.2: Contribution des différents bruits à la sensibilité du détecteur VIRGO en fonction de la fréquence. La partie grisée représente la zone accessible par le détecteur VIRGO, cette zone est limitée par la somme quadratique des différents bruits.

Asymétrie de l'interféromètre

L'estimation des pertes de l'interféromètre et le choix de la fréquence de modulation donne l'asymétrie optimale de l'interféromètre pour transmettre les bandes latérales (On suppose ici que les pertes des bandes latérales sont négligeables) (formule 2.18) :

$$
\begin{aligned}
l_- &= \arccos(r_r)\frac{c}{2\pi f_{mod}} \\
&\sim 1 \text{ m}
\end{aligned}
$$

L'asymétrie choisie dans VIRGO est de 0.8 m.

3.1 Bruit de position

3.1.1 Isolation sismique

Pour avoir des masses libres, les miroirs doivent être suspendus. Mais un simple pendule ne suffit pas pour isoler le miroir du bruit sismique du point de suspension. En effet le bruit de photon correspond à un mouvement des miroirs de l'ordre de $6\ 10^{-20}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. Or, à la surface de la terre, le bruit sismique correspond à une densité spectrale de position donnée par :

$$\tilde{x}(f) \;=\; \begin{cases} 10^{-9}\ \mathrm{m}/\sqrt{Hz}, & \text{de 1 a 10 Hz} \\ \left(\frac{10\mathrm{Hz}}{f}\right)^2 10^{-9}\ \mathrm{m}/\sqrt{Hz}, & \text{au dessus de 10 Hz} \end{cases}$$

A 10 Hz, le bruit sismique est donc 10 ordres de grandeur (200 dB) au-dessus de la sensibilité. On doit donc isoler l'interféromètre du bruit sismique.

Pour atténuer les mouvements latéraux, on utilise l'effet pendule ; la fonction de transfert d'un pendule idéal (facteur de qualité infinie) est donnée par :

$$\begin{aligned} G(f) &= \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} \\ &= \frac{f_0^2}{f_0^2 - f^2} \end{aligned}$$

où $\tilde{x}_1$ est la densité spectrale de bruit du point de suspension, $\tilde{x}_2$ la densité spectrale de bruit de la masse suspendue et f_0 la fréquence de résonance du pendule. Lorsque $f \gg f_0$ un pendule atténue les mouvements de translation d'un facteur $\frac{f_0^2}{f^2}$. Avec un fil d'un mètre ($f_0 = .5$ Hz), l'atténuation à 10 Hz est de 50 dB.

L'atténuateur de VIRGO comprend 7 pendules en cascades (figure 3.3), chaque pendule a une fréquence de résonance voisine de 0.5 Hz. Les pendules permettent d'atténuer le bruit de position latérale, mais il faut aussi atténuer les mouvements verticaux. En effet, les directions verticales aux deux extrémités d'un des Fabry-Perot (de longueur L) ne sont pas parallèles mais forment un angle $\alpha = L/R_\oplus$, où $R_\oplus$ est le rayon de la terre. Le faisceau parcourant le Fabry-Perot n'est donc pas parallèle aux axes des suspensions. Par ce seul effet, le bruit sismique vertical est couplé avec les mouvements dans l'axe du faisceau d'un facteur $\alpha/2 \sim 2\ 10^{-4}$.

Pour atténuer les mouvements verticaux, 6 masses intermédiaires de la chaîne de suspension agissent comme des ressorts grâce à des lames (figure 3.3). Ces lames sont solidaires de chaque masse et le point de suspension du pendule suivant est fixé à l'extrémité des lames. La fréquence propre de ce ressort est abaissée à 0.5 Hz grâce à des aimants qui agissent comme des anti-ressorts [15]. Le super atténuateur permet d'éliminer la contribution du bruit sismique dans VIRGO au-dessus de quelques hertzs (figure 3.2).

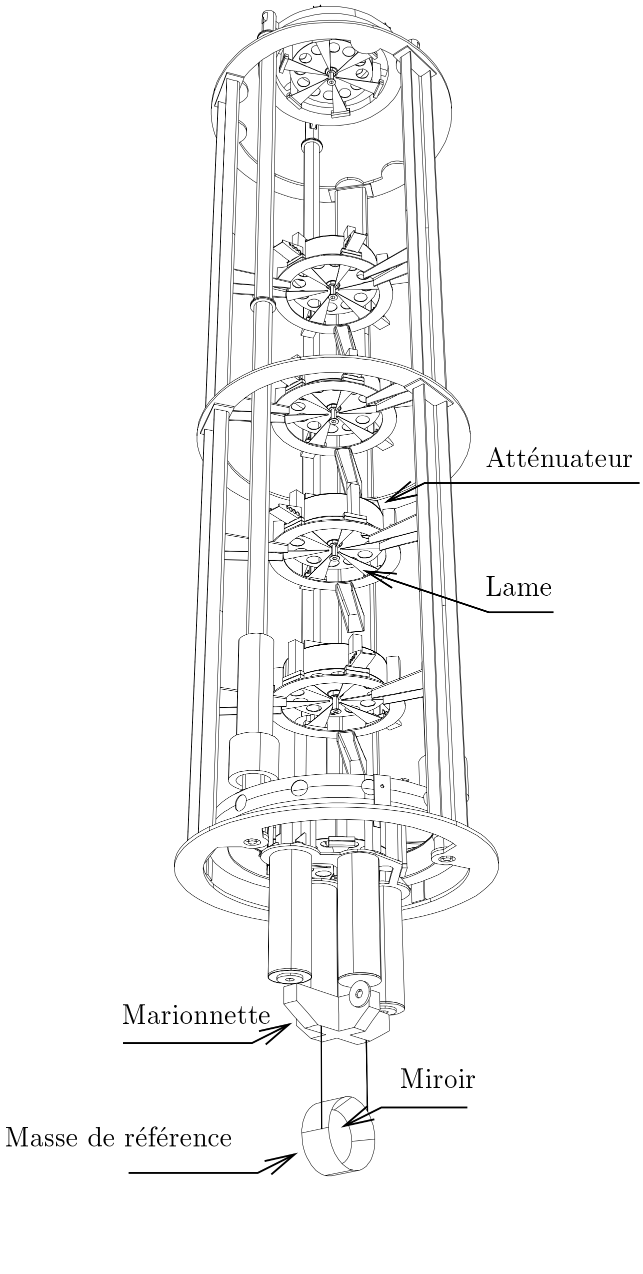


Figure 3.3: Vue en trois dimensions du super atténuateur de VIRGO.

Chaque pendule de la suspension permet d'atténuer le bruit sismique à haute fréquence mais introduit des mouvements de grande amplitude à sa fréquence de résonance. Pour éliminer ces résonances on doit réduire au maximum le facteur de qualité des pendules ; ceci est réalisé grâce à un système actif de contrôle local de la suspension. Ce système utilise des accéléromètres placés sur chaque suspension et des bobines en contre réaction.

Le miroir est suspendu à une “marionnette” elle-même suspendue au dernier étage de la suspension. Le contrôle de la position du miroir se fait grâce à la marionnette et à la masse de référence placée juste derrière le miroir et équipée de bobines.

3.1.2 Bruit Thermique

Vers 1928, Robert Brown découvrit le mouvement aléatoire de particules (grain, poussière) en suspension dans l'eau. Cette fluctuation, le mouvement Brownien, a été décrit en 1951 dans le cadre beaucoup plus général du théorème de fluctuation-dissipation [16] qui établit la correspondance entre le caractère dissipatif d'un système et ses fluctuations à l'équilibre.

Théorème Fluctuation-Dissipation

La réponse d'un système mécanique à une force extérieure $F(f)$ est représentée par son impédance $Z(f)$:

$$F(f) = Z(f)v(f) \tag{3.1}$$

où $v(f)$ est l'amplitude de la vitesse du système. Le théorème Fluctuation dissipation établit une relation entre la densité spectrale de la force ”thermique” et la partie réelle (dissipative) de l'impédance [6]:

$$\tilde{F}^2_{therm}(f) = 4k_BT\mathcal{R}(Z(f)) \tag{3.2}$$

La densité spectrale du bruit en position due à cette force thermique est donnée par :

$$\tilde{x}^2_{therm} = \frac{k_BT}{\pi^2 f^2}\frac{\mathcal{R}(Z(f))}{|Z(f)|^2}$$

L'ensemble de suspension comprend trois principaux systèmes dissipatifs : le pendule, le miroir et les fils de suspension. Les forces dissipatives qui vont s'exercer sur ces systèmes peuvent être externes ; force de frottement avec l'air ambiant, friction des matériaux ou courant de Foucault dans les conducteurs. Ces forces sont proportionnelles à la vitesse $F_{ext} = fv$.

Avec un vide de l'ordre de 10^{-6} mbar et un bouclier magnétique, les effets dissipatifs sont dominés par l'inélasticité des matériaux utilisés [6]. La force résultant de cette

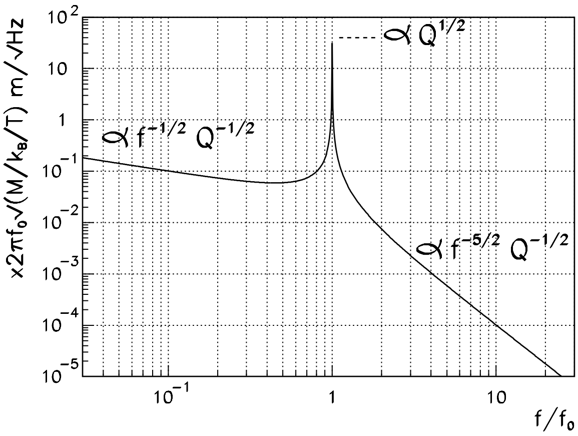


Figure 3.4: Densité spectrale du bruit thermique pour un oscillateur harmonique ayant un angle de perte indépendant de la fréquence $\phi = \frac{1}{Q} = 10^{-3}$.

inélasticité peut être modélisée par $F_{int} = -k(1 + i\phi(f))$. $\phi(f)$ représente la partie dissipative dans la force de rappel kx et il est appelé angle de perte. Dans la plupart des matériaux, l'angle de perte est, sur de larges bandes de fréquences, indépendant de la fréquence [17].

Chacun de ces systèmes peut donc être modélisé par un oscillateur harmonique d'impédance :

$$Z(f) = i2\pi fm - i\frac{k(1 + i\phi(f))}{2\pi f} \tag{3.3}$$

La densité spectrale du bruit thermique est alors donnée par :

$$\tilde{x}^2_{therm} = \frac{4k_BT}{m(2\pi f_0)^2 2\pi f\phi(f)} \frac{1}{1 + \left(\frac{f^2 - f_0^2}{\phi(f) f_0^2}\right)^2} \tag{3.4}$$

avec $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{km}$. La figure 3.4 représente la densité spectrale du bruit thermique avec un angle de perte indépendant de la fréquence. Le facteur de qualité est par définition :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

ou Δf est la largeur de la résonance mesurée à la moitié de la puissance maximale et donc, d'après 3.4 $Q = \phi(f_0)^{-1}$. La densité spectrale en dessous de la fréquence de résonance est en $f^{-1/2}$, et au-dessus en $f^{-5/2}$. Lorsque on augmente le facteur de qualité, la puissance à la fréquence de résonance augmente mais la densité spectrale en dessous et au-dessus de la fréquence de résonance diminue.

Bruit thermique Pendulaire

La fréquence du pendule est de 0.5 Hz. Au-dessus de quelques Hz, la contribution du bruit thermique pendulaire correspond donc à la partie haute fréquence de la courbe 3.4, elle est donnée par :

$$\tilde{x}^2_{therm} = \frac{4k_BT(2\pi f_0)^2}{mQ(2\pi f)^5}$$

La contribution du bruit thermique des pendules pour des facteurs de qualité de 10^6 [18] est représentée sur la figure 3.2, elle limite la sensibilité jusqu'à 40 Hz.

Les modes violons

Les modes de vibration des fils de suspension sont une séquence de modes harmoniques dont la fréquence fondamentale est donnée par [6]:

$$f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{nm_f l}},$$

où n est le nombre de fils de suspension et m_f la masse d'un des fils. Ces modes ont un facteur de qualité du même ordre que celui du pendule. Avec des fils les plus légers possibles, ces résonances peuvent être poussées à haute fréquence, ce qui diminue aussi le niveau du bruit. Seul les résonances apparaissent donc dans la sensibilité de VIRGO à partir de 300 Hz. (figure 3.2).

Bruit Thermique interne des miroirs

Les modes de vibration interne des miroirs apparaissent pour le faisceau se réfléchissant comme un bruit de position du miroir. Ces modes ont des fréquences de résonance au-dessus de quelques kilohertzs, en dehors de la bande passante de VIRGO [19]. Le facteur de qualité de ces modes est limité par l'angle de perte dû à l'inélasticité du substrat des miroirs. Avec des miroirs de silice ayant une très grande pureté, on atteint des angles de perte de l'ordre de 10^{-6}. Pour ces modes, la zone de sensibilité de VIRGO représente la partie basse fréquence de la figure 3.4, la contribution de ces modes est donc en $\frac{1}{\sqrt{f}}$ et limite la sensibilité de VIRGO entre 40 Hz et 200 Hz (figure 3.2).

3.2 Enceinte à vide

Pour isoler les miroirs et les suspensions du bruit acoustique, l'ensemble (la suspension et le miroir) doit être maintenu sous vide. De plus ce vide est indispensable pour limiter les

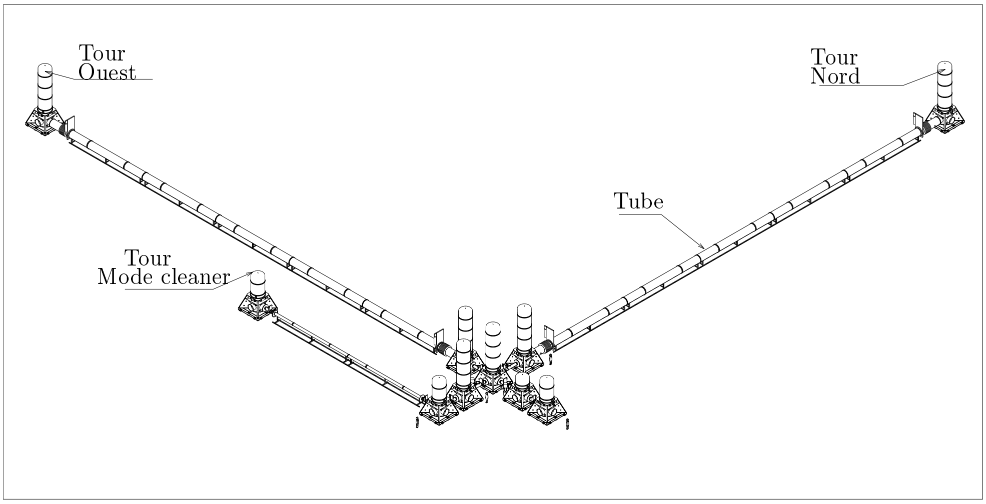


Figure 3.5: Enceinte à vide de VIRGO.

frottements du pendule soutenant les miroirs avec l'air ambiant. Ces frottements augmenteraient la dissipation et donc le bruit thermique pendulaire. Chaque miroir ainsi que sa suspension est donc placé dans une “tour”. Dans la partie haute de la tour (suspension), le vide est de 10^{-9} mbar, dans la partie basse (marionnette, miroir et masse de référence) le vide est de 10^{-6} mbar.

Le nombre de molécules de gaz à travers lesquelles le faisceau laser se propage fluctue selon une loi poissonnienne, ce qui provoque des variations de l'indice de réfraction de l'air et donc un bruit en phase. Un vide de 10^{-7} mbar est nécessaire pour que la contribution de ce bruit soit en dessous du bruit de photon. L'ensemble de l'interféromètre est donc placé dans une enceinte à vide formée de deux tubes de 3 km de long et de 1.2 m de diamètre et de tours de 10 mètres de haut (figure 3.5).

3.3 Contrôle de l'interféromètre

Pour que la sensibilité du détecteur soit limitée par le bruit de photon ($h = 2\ 10^{-23}\ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$), l'interféromètre doit être à un point de fonctionnement bien précis où la porteuse est:

- résonante dans les deux cavités Fabry-Perot.
- résonante dans la cavité de recyclage.
- sur la frange noire.

Ce qui revient à contrôler quatre longueurs. La configuration géométrique et le choix de la fréquence de modulation assurent alors que les bandes latérales sont :

- antirésonantes dans les Fabry-Perot (choix de la longueur des Fabry-Perot).
- résonante dans la cavité de recyclage (choix de la longueur de la cavité de recyclage).
- transmise dans la frange noire (choix de l'asymétrie)

Les miroirs, suspendus aux atténuateurs sismiques, ont des mouvements résiduels d'une amplitude de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière. On doit donc contrôler leur position pour maintenir le point de fonctionnement du détecteur. Pour ne pas dégrader la sensibilité, les différentes longueurs doivent avoir une variation résiduelle de l'ordre de 10^{-12} m_{rms}. Pour atteindre ces spécifications, l'interféromètre est contrôlé. Les différentes longueurs caractéristiques sont reconstruites à partir des signaux transmis par l'interféromètre [20][21], l'asservissement de ces longueurs se fait alors grâce aux marionnettes et à la masse de référence de chaque miroir (figure 3.3).

3.4 Le système de détection de VIRGO

3.4.1 Rôle du système de détection

Le rôle de cet ensemble est la détection des faisceaux transmis par l'interféromètre et en particulier celle du faisceau de frange noire, porteur du signal d'onde gravitationnelle.

Pour atteindre une sensibilité par rapport au bruit de photon de $2\ 10^{-23}\ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$, le défaut de contraste de l'interféromètre doit être de l'ordre de 10^{-4} (chapitre 2. Pour obtenir un défaut de contraste de cet ordre, le faisceau de frange noire doit être filtré grâce à une cavité "mode cleaner". Cette cavité permet de réduire la puissance du faisceau ce qui revient à améliorer le contraste de l'interféromètre.

La puissance de ce faisceau doit ensuite être mesurée. Comme le faisceau est modulé en phase avant d'entrer dans l'interféromètre, le faisceau de frange noire est modulé en puissance, l'amplitude du signal à la fréquence de modulation étant proportionnelle à la longueur relative des deux cavités Fabry-Perot.

Le système de détection doit donc transformer l'information contenue dans le faisceau de frange noire (puissance lumineuse modulée à haute fréquence) en un signal numérisé qui puisse être utilisé pour la recherche d'un signal d'onde gravitationnelle mais aussi pour le contrôle de l'interféromètre.

La puissance du faisceau de frange noire est donc détectée grâce à des photodiodes. Derrière chaque photodiode, une électronique permet de convertir le courant généré en un signal en tension et de le démoduler. Cette électronique doit aussi préparer la numérisation du signal. Pour cela, on doit réduire la dynamique des signaux démodulés pour l'adapter à la dynamique du système de numérisation. De plus, les signaux doivent être filtrés de façon à éviter le repliement du bruit produit par les résonances internes des miroirs au-dessus de la fréquence d'échantillonage.

Les signaux sont ensuite numérisés. La bande passante du système d'acquisition doit être suffisante pour permettre la recherche de signaux d'ondes gravitationnelles jusqu'à quelques kilohertzs. Les signaux doivent donc être échantillonnés à une fréquence de l'ordre de 20 kHz. Comme les signaux transmis par l'interféromètre sont utilisés pour le maintenir à son point de fonctionnement, le système d'acquisition doit fournir ces signaux en temps réel au système de contrôle de l'interféromètre.

3.4.2 Conception du banc de détection

banc suspendu

Les mouvements du faisceau par rapport à la cavité "mode cleaner", aussi bien que les vibrations de la cavité elle-même, peuvent créer un signal à la fréquence de modulation. La cavité doit donc être isolée du bruit sismique et du bruit acoustique. Elle est donc placée sur un banc (figure 3.6) lui même suspendu et isolé grâce à des atténuateurs du même type que ceux utilisés pour suspendre les miroirs. Pour l'isolation acoustique, l'ensemble est placé dans une enceinte à vide : la tour de détection (figure 3.7).

Banc externe

Quatre faisceaux sont transmis par le banc suspendu, le faisceau auxiliaire venant de la réflexion (faisceau b_5) sur la séparatrice, le faisceau de frange noire avant le filtrage (faisceau b_1') les faisceaux transmis (faisceau b_1) et réfléchi (faisceau b_1") par la cavité. Ces faisceaux sortent de l'enceinte à vide par des hublots.

Ces faisceaux sont détectés par des photodiodes placées sur un banc externe (figure 3.8). Des caméras CCD sont aussi installées pour visualiser le profil des faisceaux. Un laser auxiliaire et plusieurs miroirs amovibles permettent de tester et de calibrer les différents blocs de photodiodes. Une zone est aussi réservée sur ce banc pour l'installation du système global d'alignement de l'interféromètre.

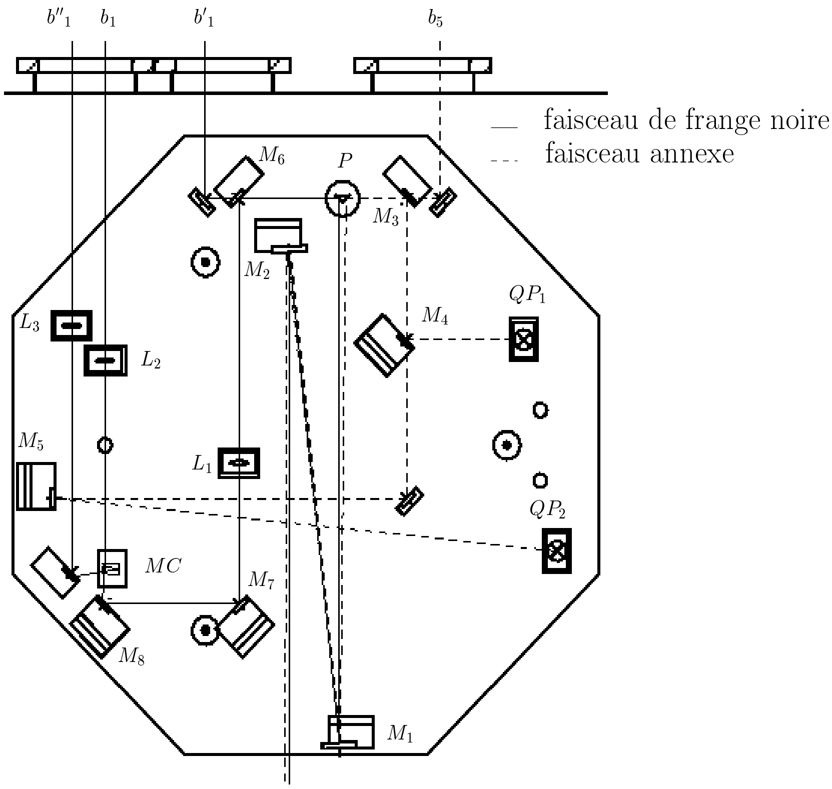


Figure 3.6: Banc de détection suspendu : vue de haut. Les premiers éléments optiques rencontrés par les faisceaux venant de la séparatrice sont les miroirs du télescope M_1 et M_2. A l'entrée du banc de détection, les faisceaux ont des waist de 2 cm, le télescope permet de ramener la taille à 1 mm et de séparer les deux faisceaux sur le prisme P. Le faisceau de frange noire est ensuite filtré par la cavité "Mode Cleaner" MC. Le faisceau annexe est envoyé sur les diodes quadrants QP_1 et QP_2 qui sont utilisées pour son alignement.

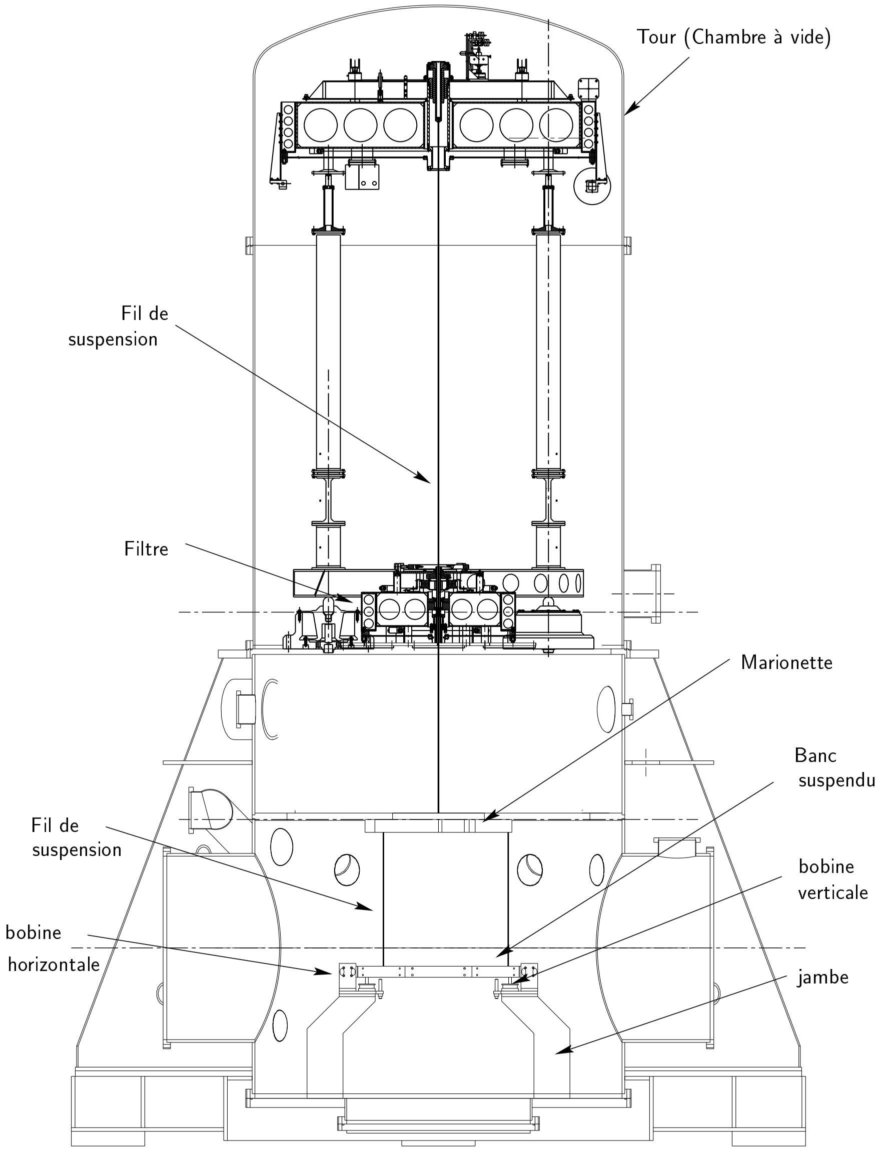


Figure 3.7: Banc de détection dans l'enceinte à vide, La chaîne de suspension est constituée d'une table permettant de bouger le point de suspension, d'un filtre, de la marionnette et du banc. Les bobines utilisées pour le contrôle du banc sont fixées aux quatre jambes. Il y 2 bobines par jambe, l'une pour contrôler les mouvement verticaux et l'autre pour les mouvements horizontaux.

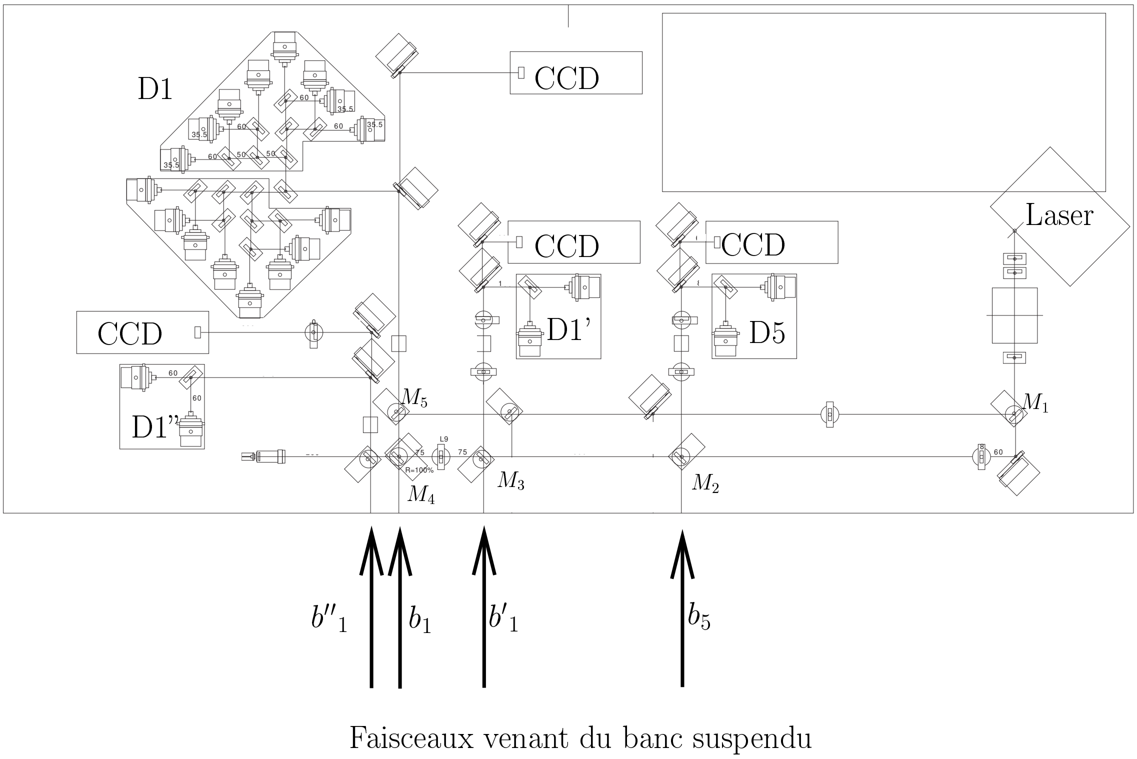


Figure 3.8: Banc externe, il contient l'ensemble de détection des faisceaux transmis par le mode cleaner b_1 (bloc de photodiodes D1), le faisceau réfléchi par le mode cleaner b''_1, le faisceau avant le mode cleaner b'_1 et le faisceau venant de la réflexion sur la séparatrice b_5.

3.5 Conclusion

VIRGO est un interféromètre, ayant des bras de 3 km de long, dédié à la recherche d'ondes gravitationnelles. Le but du projet est d'atteindre une sensibilité comprise entre $3\ 10^{-23}\ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$ et $2\ 10^{-23}\ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$ dans une bande de fréquence entre quelque dizaine de Hz et quelques centaines de Hz.

Pour cela, des déplacements des miroirs de l'ordre de 10^{-19} m/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$ doivent être mesurés. Ces déplacement correspondent à un déphasage de la lumière de l'ordre de $3\ 10^{-11}$ rad/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$. Le système de détection doit mesurer ce déphasage sans introduire de bruit.

Chapitre 4

Filtrage du faisceau de frange noire

Le système de détection doit filtrer et détecter le faisceau de frange noire. On doit donc connaître la forme et la puissance de ce faisceau pour choisir le filtrage et optimiser la détection du signal.

La forme et la puissance de ce faisceau dépendent des caractéristiques géométriques de l'interféromètre (longueur des cavités, courbure des miroirs) et des caractéristiques et des qualités des composants optiques (réflectivité et pertes).

Dans ce chapitre on présente tout d'abord une simulation qui prend en compte l'ensemble des défauts de l'interféromètre. On étudie ensuite les possibilités de filtrage du faisceau de frange noire permettant d'améliorer le contraste et de limiter la puissance à détecter. Deux types de filtrage sont considérés, le filtrage spatial (utilisant des diaphragmes) et le filtrage optique (utilisant une cavité résonante).

4.1 Composition du faisceau de frange noire

4.1.1 Pertes de l'interféromètre

Dans la simulation de l'interféromètre, les faisceaux sont décrits grâce à leur projection sur la base d'Hermite-Gauss (Annexe A). Les défauts des optiques déforment le front d'onde des faisceaux dans l'interféromètre. Ces défauts couplent alors les modes d'Hermite-Gauss entre eux et en particulier transfèrent une partie de la puissance incidente du mode fondamental (TEM_{00}) sur les modes d'ordre supérieur.

Chaque optique est caractérisée par une matrice de réflexion et par une matrice de transmission. La taille de ces matrices est définie par le nombre de modes pris en compte dans la simulation. Ainsi, si tous les modes TEM_{nm} jusqu'à $m + n \leq p$ sont considérés , chaque optique sera représentée par une matrice de taille lxl où $l = (p + 2)(p + 1)/2$.

Les déformations du front d'onde étant différentes dans chaque bras , les modes d'ordre

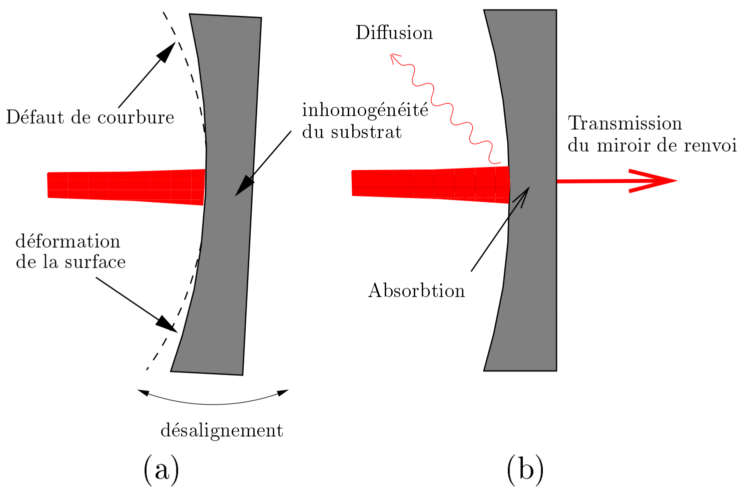


Figure 4.1: Défauts des miroirs (a) et pertes scalaires (b)

supérieur créés dans l'interféromètre sont transmis dans la frange noire, ce qui dégrade le contraste du détecteur.

Dans cette simulation les défauts pris en compte sont les suivants :

- Les défauts qui entraîne une déformation du front d'onde (figure 4.1.a) :
  - les défauts d'alignement des miroirs (ils couplent le TEM_{00} avec les TEM_{10} TEM_{01})
  - les défauts de courbure des miroirs (ils couplent le TEM_{00} avec les TEM_{20} TEM_{02})
  - les déformations des surfaces des miroirs (les couplages dépendent ici de la forme des déformations)
- Les défauts qui dissipent de la puissance sans déformer le front d'onde, les défauts "scalaires" :
  - l'absorption dans le substrat des miroirs.
  - la diffusion à grand angle sur la surface des miroirs.
  - la transmission des miroirs de renvoi des Fabry-Perot.

Pour augmenter la sensibilité de l'interféromètre, la puissance revenant de la séparatrice vers le laser est recyclée. La réflectivité du miroir de recyclage doit être optimisée pour maximiser la puissance du mode TEM_{00} sur la séparatrice (c'est-à-dire le facteur de recyclage R). Dans le cas où on ne considère que le mode TEM_{00}, le facteur de recyclage est donné par (formule 2.14):

$$R = (t_r/(1 - r_r\rho))^2$$

où ρ est la réflectivité de l'interféromètre pour le mode TEM_{00}. Le recyclage est alors maximal lorsque $r_r = \rho$. Dans la simulation, on prend en compte l modes, le facteur de recyclage est égal au premier élément $\hat{R}_{00}$ de la matrice :

$$\hat{R} = \left(t_r(1 - r_r\hat{\rho})^{-1}\right)^2$$

où $\hat{\rho}$ est la matrice représentant la réflectivité de l'interféromètre. Comme on a plus d'expression analytique de r_r optimisant le facteur de recyclage, on procède par itération :

- Une première simulation sans miroir de recyclage est faite pour évaluer $\hat{\rho}_{00}$.
- On simule l'interféromètre avec le miroir de recyclage dont la réflectivité est $r_r(0) = \hat{\rho}_{00}$. On obtient un facteur de recyclage $R(0) = \hat{R}_{00}$
- On simule l'interféromètre avec une réflectivité :

  $$r_r(i+1) = \sqrt{1 - \frac{1}{R(i)}}$$

  et on trouve un facteur de recyclage $R(i+1)$.

Cette procédure permet de converger en quelques itérations vers le recyclage optimum.

4.1.2 Configuration de l'interféromètre

La configuration géométrique simulée est celle de VIRGO (figure 3.1). La longueur des Fabry-Perot est de 3000 mètres et la longueur de la cavité de recyclage est de 12 m. L'asymétrie est de 80 cm ($d_{M_{rec}-M_{BS}} = 6$ m, $d_{M_{BS}-M_{C1}} = 6.4$ m, $d_{M_{BS}-M_{C2}} = 5.6$ m). Le waist du faisceau est d'environ 2 cm et il est localisé au niveau du miroir d'entrée des Fabry-Perot. Le tableau 4.1 résume les spécifications des composants optiques de VIRGO.

On a choisi de simuler l'interféromètre dans deux configurations. La première correspond aux limites données par les spécifications [13]. Ainsi pour les miroirs, on prend des déformations de surface ayant un spectre et une profondeur rms donné par le tableau 4.1 (rugosité des miroirs de l'ordre de $\lambda/100$).

Les derniers résultats [14] montrent que, après un premier traitement des surfaces, on peut corriger les surfaces pour atteindre des déformations de l'ordre de $\lambda/500$ rms.

miroirs	M_{C1} et M_{C2} miroirs de renvoi des FP	M_{E1} et M_{E2} miroirs d'entrées des FP	M_R miroir de recyclage	M_{BS} séparatrice
Diamètre (mm)	350	350	120	230
Epaisseur (mm)	200	100	30	55
Courbure de la face 1	3450±100 m	plat	4-5 m	plat
Courbure de la face 2	plat	plat	plat	plat
Réflectivité de la face 1	>.99995	$< 5\ 10^{-4}$	$< 5\ 10^{-4}$	.5±.005
Réflectivité de la face 2	–	.882±.001	à optimiser	$< 5\ 10^{-4}$
Perte par absorption et diffusion	< 5 ppm	< 5 ppm	< 5 ppm	< 5 ppm
Déformation de la face 1 (rms)	$\lambda/120$ sur $\oslash$=10 cm	–	–	$< \lambda/70$ sur $\oslash$=7 cm
Déformation de la face 2 (rms)	–	$\lambda/120$ sur $\oslash$=4 cm	$\lambda/70$ sur $\oslash$=4 cm	–

Tableau 4.1: Spécification des miroirs de VIRGO [13].

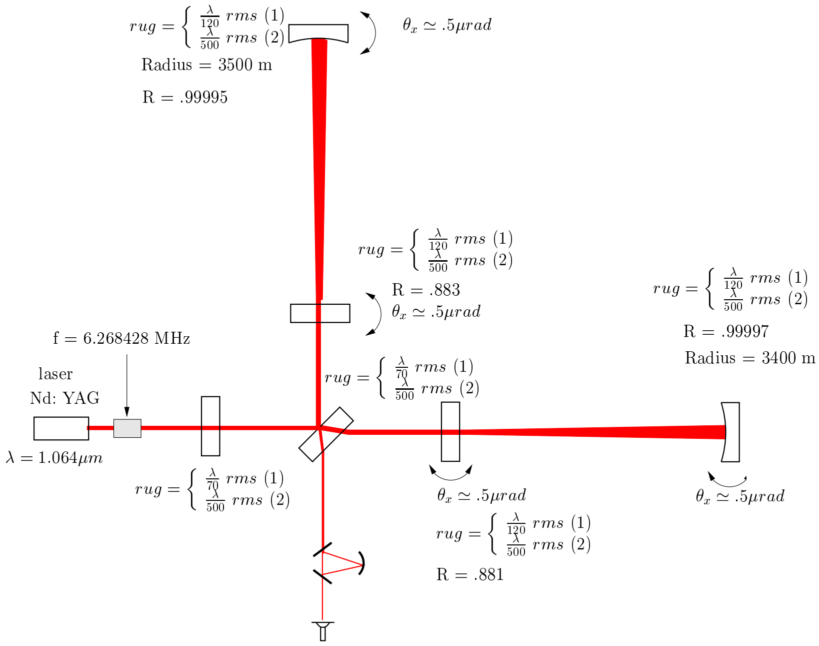


Figure 4.2: Défauts de l'interféromètre pris en compte dans la simulation (configurations (1) et (2)). Les pertes par absorption et par diffusion sont de 10 ppm par miroir.

Ces performances ont aujourd'hui été atteintes sur des miroirs de 6 cm de diamètre. La deuxième simulation est faite en extrapolant les résultats actuels sur des miroirs de plus grande taille, c'est-à-dire en prenant des rugosités de l'ordre de $\lambda/500$ rms.

Dans les deux simulations, les courbures des miroirs de renvoi des Fabry-Perot sont choisies égales à 3400 m et à 3500 m. De plus, les miroirs des cavités sont désalignés de quelques dixièmes de μrad. La réflectivité des miroirs d'entrée M_{C1} et M_{C2} sont respectivement de .881 et .883. La réflectivité des miroirs de renvoi M_{C1} et M_{C2} sont respectivement de .99995 et .99996. Les pertes par absorption et par diffusion sont choisies égales à 10 ppm par miroir(figure 4.2). La puissance incidente dans l'interféromètre est de 20 watts.

4.1.3 Simulation de l'interféromètre

On utilise le programme de simulation `SIESTA` [22] qui permet de simuler le détecteur. Le module `OPitf` de `SIESTA` permet de simuler l'interféromètre en utilisant une description modale des faisceaux. Dans la simulation, les modes jusqu'à m+n=16 sont considérés (soit 153 modes). Les paramètres caractérisant une surface optique peuvent être spécifiés : ses dimensions, sa position géométrique, la réflectivité et la transmission du miroir ainsi que sa courbure et l'amplitude des déformations des surfaces.

La génération des déformations des surfaces des miroirs se fait grâce à un générateur de bruit blanc. Le spectre en longueur d'onde des déformations de la surface est obtenu en faisant une transformation de Fourier 2D de ce bruit. Le spectre est ensuite filtré pour que son amplitude suive la loi de puissance empirique en $f^{-1/7}$ [23] et normalisé pour avoir la déformation rms demandée. La transformée de Fourier inverse donne ensuite le profil du miroir.

On doit caractériser chaque miroir par sa matrice de réflexion dans la base d'Hermite-Gauss. Pour déterminer chaque colonne de cette matrice, un faisceau TEM_{nm} est décrit sur une grille 128x128 de la taille du miroir puis réfléchi sur le miroir. Le faisceau réfléchi est alors projeté sur la base d'Hermite-Gauss.

Avec les matrices de réflexion de chaque optique, on peut résoudre les équations des champs dans les différentes cavités (cavité des Fabry-Perot et cavité de recyclage). Les distances relatives des différentes optiques sont ensuite ajustées pour amener l'interféromètre à son point de fonctionnement.

4.1.4 Résultats

Réflectivité de l'interféromètre

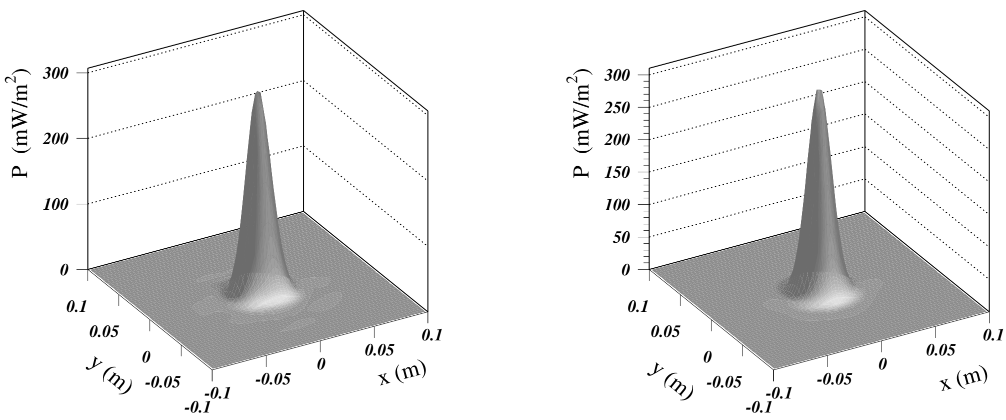
Pour estimer le facteur de recyclage, on fait une première simulation de l'interféromètre sans miroir de recyclage. La puissance totale réfléchie par l'interféromètre est de 98.6 % pour la configuration $\lambda/100$ et de 99.5 % pour la configuration $\lambda/500$, mais une partie de cette puissance est contenue dans des modes d'ordre supérieur, la puissance contenue dans le TEM_{00} est de 97.5 % pour la configuration $\lambda/100$ et de 99 % pour la configuration $\lambda/500$.

Optimisation du recyclage

Après optimisation du recyclage on a pour la configuration $\lambda/100$ un facteur de recyclage de 83.3 ($R_{Rec} = .988$) et pour la configuration $\lambda/500$ un facteur de recyclage de 175 (R_{Rec} $= .994$).

Dans les deux configurations, la puissance totale sur la frange noire est alors d'environ 14 watts (figure 4.4). Une très faible partie de cette puissance est contenue dans le mode fondamental.

Le défaut de contraste obtenu à la sortie de l'interféromètre est donc de $1-C = 1.8\ 10^{-2}$ pour la configuration $\lambda/100$ et de $1 - C = 8.\ 10^{-3}$ pour la configuration $\lambda/500$.



(a) (b)

Figure 4.3: Profil du faisceau réfléchi par l'interféromètre sans recyclage. La puissance incidente est de 20 W pour la configuration $\lambda/100$ (figure (a)), on a une puissance totale de 19.7 W. Pour la configuration $\lambda/500$ (figure (b)), on a une puissance totale de 19.9 W.

Transmission des bandes latérales

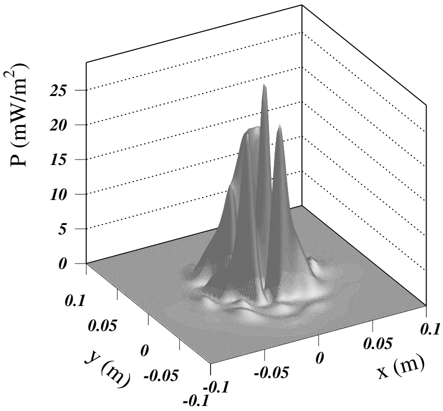
On fait une nouvelle simulation pour mesurer la transmission des bandes latérales par l'interféromètre. Pour la mesurer, l'interféromètre est simulé avec toute la puissance sur une bande latérale. La puissance transmise donne alors le facteur de transmission des bandes latérales T.

Pour la configuration $\lambda/100$, on obtient $T = 0.105$ et pour la configuration $\lambda/500$, on obtient $T = 0.79$.

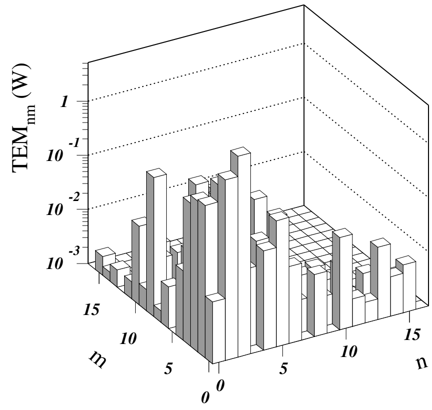
Ces facteurs de transmission sont faibles. Les bandes latérales ne sont pas résonantes dans la cavité Fabry-Perot et c'est dans ces cavités qu'il y a le plus de perte. On s'attendrait donc à avoir un facteur de transmission proche de 1. Plusieurs facteurs expliquent ce résultat : le fait que les bandes latérales ne soit pas résonantes dans les Fabry-Perot fait que la cavité de recyclage, de type plan-plan, est dégénérée pour les bandes latérales.

Le facteur de transmission des bandes latérales est donc très sensible aux défauts des optiques de la cavité de recyclage et en particulier les déformation des surfaces qui sont de $\lambda/70$ et de $\lambda/500$ dans les configurations simulées.

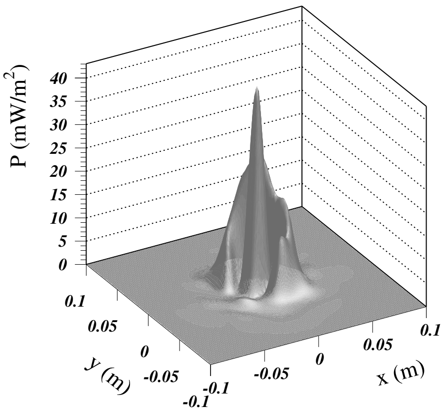
Dans la première configuration, les pertes dans l'interféromètre sont plus importantes pour les bandes latérales que pour la porteuse. Le miroir de recyclage, optimisé pour la porteuse, ne l'est plus pour les bandes latérales. De plus la transmission des bandes



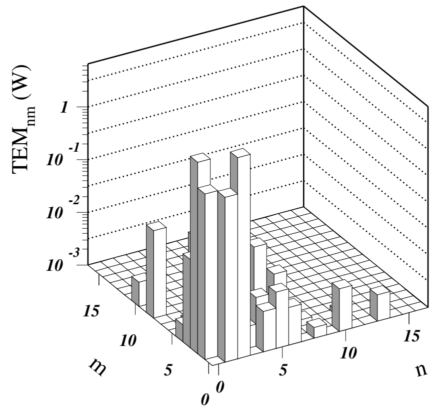
(a)



(b)

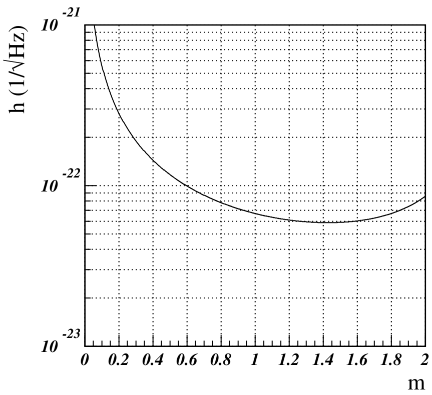


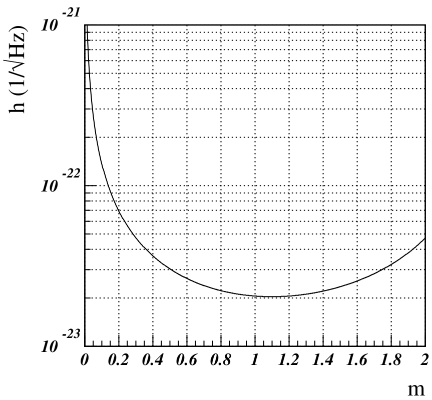
(c)



(d)

Figure 4.4: Profil et distribution modale du faisceau de frange noire de l'interféromètre avec recyclage. Pour la configuration $\lambda/100$ (figure (a) et (b)) (R_{Rec} = .988, R = 83) la puissance totale sur la frange noire est de 1.44 W. Pour la configuration $\lambda/500$ (figure (c) et (d)) (R_{Rec} = .994, R = 175) la puissance totale est de 14 W.





(a) (b)

Figure 4.5: Sensibilité de l'interféromètre en fonction de la profondeur de modulation pour la configuration $\lambda/100$ (figure (a)) et pour la configuration $\lambda/500$ (figure (b))

latérales dépend de l'asymétrie (formule 2.18). Or, on a choisit de ne pas optimiser ce paramètre car il est aujourd'hui fixé à 0.8 m par la position des enceintes à vide. En relâchant cette contrainte, on passe d'un facteur de transmission de 0.105 à 0.40 grâce à une asymétrie de 2 mètres.

Dans le cas de la deuxième configuration, les pertes des bandes latérale sont proches de celles de la porteuse, le recyclage est donc aussi optimisé pour les bandes latérales. De plus, l'asymétrie optimale pour cette configuration est proche de 0.8 mètre.

Sensibilité de l'interféromètre

A partir du contraste, du facteur de recyclage et de la transmission des bandes latérales, on peut calculer la sensibilité de l'interféromètre en fonction de la profondeur de modulation. Celle-ci est donnée par (équation 2.21) :

$$\tilde{h} = \frac{1}{L}\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\pi}{2F}\sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}}\frac{\sqrt{RJ_0^2(m)(1-C)+4TJ_1^2(m)}}{2J_0(m)J_1(m)\sqrt{RT}}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

On voit sur la figure 4.5 que l'on obtient une sensibilité de 6. 10^{-23} $/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ avec une profondeur de modulation de 1.4 pour la configuration $\lambda/100$ et une sensibilité de 2. 10^{-23} $/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ avec une profondeur de modulation de 1.1 pour la configuration $\lambda/500$.

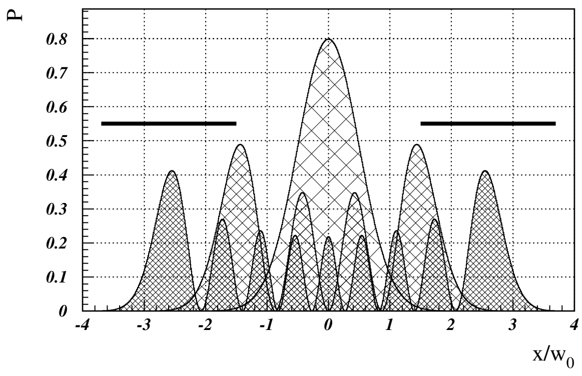


Figure 4.6: Distribution spatiale de la puissance des modes d'ordre 0, 3 et 8. Un diaphragme de rayon 1.5 fois le waist est représenté sur la figure.

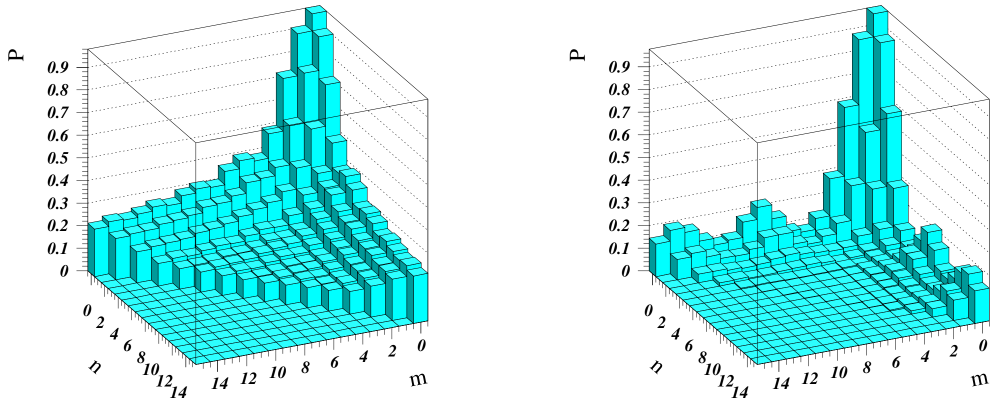
Détection du faisceau de frange noire

Les simulations précédentes montrent que la puissance du faisceau de frange noire est importante (environ 14 W). Les photodiodes pouvant travailler avec une puissance maximale de 100 mW, pour détecter ce signal sans filtrage préalable, il faudrait disposer d'environ 150 photodiodes sur le banc de détection. La plus grande partie de cette puissance est contenue dans des modes d'ordre supérieur alors que le signal n'est contenu que dans le TEM_{00}. Le filtrage du faisceau frange noire pour ne détecter que la puissance sur le TEM_{00} apparaît comme une solution qui permet de réduire le nombre de photodiodes et d'améliorer le contraste de l'interféromètre.

4.2 Filtrage Spatial

4.2.1 Utilisation de deux diaphragmes en cascade

Les faisceaux d'Hermite-Gauss n'ont pas tous la même extension spatiale, la puissance des modes d'ordre supérieur est répartie sur une plus grande surface que le mode fondamental (figure 4.6). Une première solution pour diminuer la puissance du faisceau de frange noire consiste à filtrer le faisceau en plaçant un simple diaphragme. L'efficacité de ce filtrage peut être caractérisée en calculant pour chaque mode la puissance transmise par un diaphragme.



(a) (b)

Figure 4.7: Puissance transmise par un diaphragme ($rayon = 1.4w$) (figure (a)) et par une cascade de deux diaphragmes ($rayon_1 = 1.5w_1$ et $rayon_2 = 1.5w_0$) (figure (b)) en fonction du mode du faisceau incident. Dans les deux cas le mode fondamental est transmis à 97%.

La figure 4.7.a montre l'efficacité pour différents modes TEM$_{nm}$ avec un rayon d'ouverture du diaphragme choisi pour avoir moins de 3% de perte sur le mode fondamental : le rayon de l'ouverture est de 1.4 fois le waist du faisceau. On voit que l'efficacité du filtrage pour les modes d'ordre bas est assez faible.

Meers [24] a proposé d'utiliser une cascade de deux diaphragmes séparés par une lentille (figure 4.8). Le premier diaphragme est placé avant la lentille et le second est placé au foyer objet de la lentille. Les tailles des diaphragmes rapportées aux waist des faisceaux sont les mêmes.

Le faisceau incident sur le premier diaphragme a un rayon de courbure infini et une taille w_i. La courbure du faisceau après la lentille est $\frac{f}{2}$. Si $f \ll \frac{2\pi w_i^2}{\lambda}$, la phase de Guoy entre les deux diaphragmes de chaque mode TEM$_{nm}$ est donnée par (formule A.11):

$$\phi_{nm} \quad = \quad (n+m+1)\frac{\pi}{2}.$$

Les modes TEM$_{nm}$ générés par le premier diaphragme peuvent ainsi se retrouver en interférence destructive avec ceux générés par le second. Selon la taille des deux diaphragmes, on arrive ainsi à augmenter le filtrage de certains modes.

La figure 4.7.b représente les résultats obtenus pour un système avec deux diaphragmes en cascade. Les rayons des diaphragmes sont choisis pour que la puissance perdue sur le

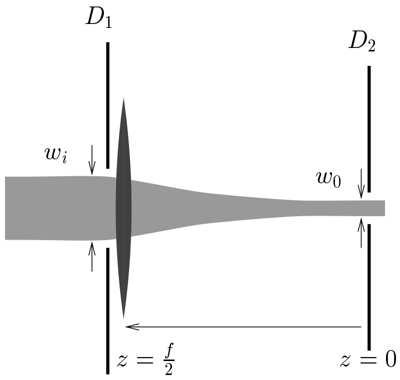


Figure 4.8: Deux diaphragmes en cascade, le premier est suivi d'une lentille qui permet de focaliser le faisceau au niveau du deuxième diaphragme.

mode fondamental soit de 3% (1.5 fois la taille du waist). Le filtrage obtenu est meilleur, avec cette taille d'ouverture, les modes TEM_{5m} et TEM_{n5} en particulier sont très atténués.

Mais le filtrage des modes TEM_{nm} avec $n + m < 5$ reste faible, pour améliorer de façon significative le contraste de l'interféromètre, il faut plus filtrer, c'est-à-dire diminuer la taille des diaphragmes quitte à transmettre moins de signal. La figure 4.9 représente la transmission d'un mode TEM_{00} par le système constitué des deux diaphragmes en fonction du rayon des diaphragmes.

4.2.2 Filtrage du faisceau de frange noire avec deux diaphragmes

Pour évaluer les performances du filtrage spatial, on envoie sur les deux diaphragmes en cascades les faisceaux de frange noire obtenus avec les deux configurations $\lambda/100$ et $\lambda/500$. Plusieurs simulations sont faites avec différentes tailles de diaphragme. La figure 4.10 représente la puissance transmise en fonction de la tailles des diaphragmes pour les deux configurations.

Pour chaque taille de diaphragme, on calcule la sensibilité obtenue :

$$\tilde{h} \;=\; \frac{1}{L}\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\pi}{2F}\sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}}\frac{\sqrt{RJ_0^2(m)(1-C)+4TJ_1^2(m)T_D}}{2J_0(m)J_1(m)T_D\sqrt{RT}} \;\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

où T_D représente la transmission du TEM_{00} par les diaphragmes (figure 4.9) et C est le contraste après les diaphragmes. Le facteur de recyclage R et le facteur de transmission des bandes latérales T de l'interféromètre ont été obtenus dans la section précédente.

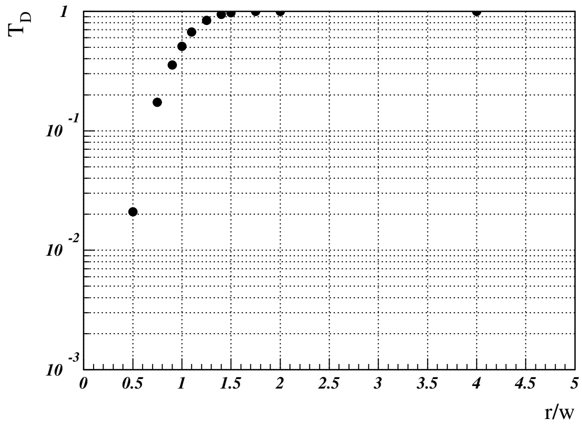


Figure 4.9: Facteur de transmission T_D du mode fondamental en fonction de la taille des diaphragmes.

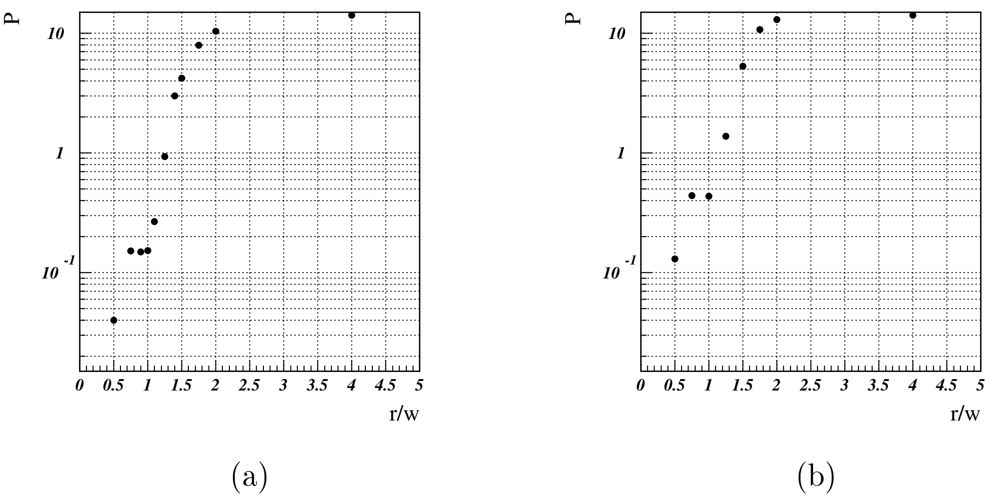
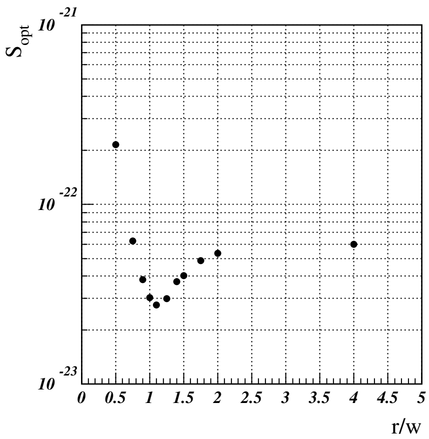
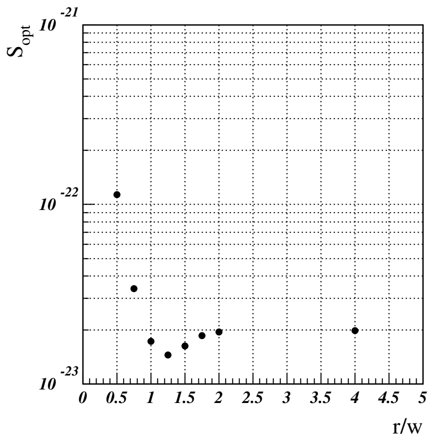


Figure 4.10: Puissance transmise par les diaphragmes en fonction de leur taille pour la configuration $\lambda/100$ (figure a) et pour la configuration $\lambda/500$ (figure b).



(a)



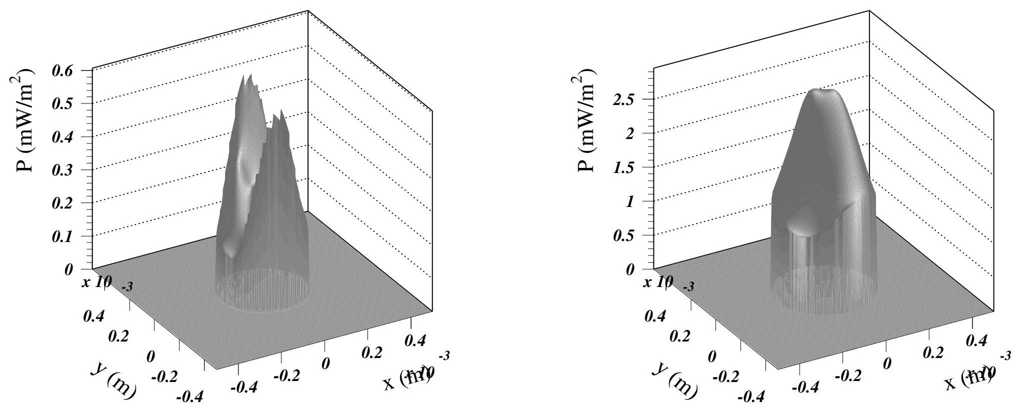
(b)

Figure 4.11: Sensibilité en fonction du rayon des diaphragmes pour la configuration $\lambda/100$ (figure a) et pour la configuration $\lambda/500$ (figure b) après optimisation de la profondeur de modulation.

La figure 4.11 représente la sensibilité obtenue après optimisation de la profondeur de modulation. Pour la configuration $\lambda/100$, la meilleure sensibilité est de 2.8 10^{-23} $/\sqrt{\text{Hz}}$ et est obtenue avec des diaphragmes de rayon 1.1 fois la taille du faisceau et une profondeur de modulation de 0.86. La puissance transmise est alors de l'ordre de 300 mW, le contraste est donc amélioré d'un facteur 50. Mais avec cette taille de diaphragme seul 67 % du signal est transmis.

Pour la configuration $\lambda/500$, elle est de 1.45 10^{-23} $/\sqrt{\text{Hz}}$ et est obtenue avec des diaphragmes de rayon 1.25 fois la taille du faisceau et une profondeur de modulation de 0.73. La puissance transmise est alors d'environ 1.5 W, ce qui correspond à un défaut de contraste de 10^{-3}. Le contraste est donc améliorer d'un facteur 10 mais seul 80 % du signal est transmis.

Une nouvelle simulation avec les profondeurs de modulation optimale (figure 4.12) donne alors une puissance continue de 0.5 watt pour la configuration $\lambda/100$ et une puissance continu de 4 watt pour la configuration $\lambda/500$.



(a) (b)

Figure 4.12: Profil du faisceau transmis par les deux diaphragmes en cascades. Les faisceaux incidents sont les faisceaux de frange noire obtenues en simulant l'interféromètre sans modulation dans la configuration $\lambda/100$ avec une profondeur de modulation de 0.86 (figure (a)) et dans la configuration $\lambda/500$ avec une profondeur de modulation de 0.73 (figure (b)).

4.3 Filtrage par une cavité optique

4.3.1 Principe du filtrage optique

Le filtrage du faisceau peut être réalisé grâce à une cavité optique. Pour que le faisceau réfléchi par la cavité ne soit pas réinjecté dans l'interféromètre, il est naturel d'utiliser une cavité optique triangulaire (annexe B.2). Le faisceau de frange noire peut être projeté sur la base d'Hermite-Gauss de la cavité :

$$A = \sum_{nm} A_{nm}$$

La puissance du faisceau est répartie sur l'ensemble des modes :

$$\begin{aligned} P &= A\overline{A} \\ &= \sum_{nm} P_{nm} \end{aligned}$$

où P_{nm} est la puissance du faisceau de frange noire contenue dans le TEM_{nm}. La puissance transmise par une cavité optique s'écrit (équation B.9):

$$\begin{aligned} P^t(L) &= \sum_{nm} P^t_{nm} \\ &= \sum_{nm} \frac{P_{nm}}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\phi_{nm}(L)}{2}\right)} \end{aligned}$$

où F est la finesse de la cavité et ϕ_{nm} le déphasage du TEM_{nm} après un aller et retour dans la cavité (équation B.10) :

$$\phi_{nm}(L) = 2kL - 2(n+m+1)\arccos(\sqrt{g}) + \phi^t_n$$

où L est la longueur de la cavité et g le paramètre de la cavité et ϕ^t_n un terme égal à π lorsque n est impair. La condition de résonance d'un mode TEM_{nm} dans la cavité est $\phi_{nm} = (2q+1)\pi$. Si la cavité est non-dégénérée ($g \neq 1$), la longueur correspondant à la condition de résonance sera différente pour chaque TEM_{nm}.

On peut donc ajuster la longueur de la cavité pour que le mode TEM_{00} soit résonant et donc transmis par la cavité :

$$L_{00} = \frac{\lambda}{2}\left(q + \frac{1}{2} + \frac{\arccos(\sqrt{g})}{\pi}\right)$$

la transmission de la cavité pour chaque TEM_{nm} est alors :

$$T_{nm} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left((n+m)\arccos(\sqrt{g}) + \frac{\phi^t_n}{2}\right)}$$

La puissance transmise par la cavité est donc donnée par :

$$P^t(L_{00}) = P_{00} + \sum_{n>0,m>0} P_{nm}T_{nm}$$

4.3.2 Choix d'une cavité pour le filtrage

La simulation de l'interféromètre a montré que l'on avait un défaut de contraste de l'ordre de 10^{-2}, ce qui oblige à avoir une grande profondeur de modulation et limite la sensibilité en h. Avec un défaut de contraste de 10^{-4}, on est proche de la sensibilité optimale (figure 2.11).

Pour améliorer le contraste d'un facteur cent, il faut atténuer la puissance contenue dans les modes supérieurs d'un facteur 100. Cette condition peut être remplie avec un paramètre g de 0.9 ($\frac{l}{\rho} = .1$) et une finesse de 50 qui donne alors

$$T_{nm} < \frac{1}{100}$$

pour les TEM_{nm} tel que $m + n < 5$. Une finesse de 50 est obtenue avec des réflectivités (en puissance) des miroirs M_1 et M_2 de .939.

Cette cavité doit aussi transmettre les bandes latérales. Il y a donc deux solutions : on peut transmettre les bandes latérales dans deux pics de résonance différents, pour cela, la fréquence de modulation ($\nu_m = 6.27$ MHz) doit être un multiple de $\frac{c}{2l}$. Ceci impose que la longueur de la cavité soit un multiple de $\frac{c}{2\nu_m} = 24m$. Cette solution correspond donc à un long mode cleaner de sortie. La deuxième solution est de transmettre les bandes latérales dans la même résonance que la porteuse. Dans ce cas le facteur de transmission des bandes latérales est (d'après de B.9)

$$T_{bl} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2(2\pi \frac{\nu_m}{c} l)}.$$

Pour avoir une atténuation proche de 1, on doit avoir

$$l \ll \frac{c}{4F\nu_m}$$

Avec une finesse de 50, on aura une transmission de 95% seulement si $l < 5$ cm.

Pour des raisons d'encombrement, on a choisi d'utiliser une cavité courte. De plus une cavité de quelques centimètres peut être monolithique. Ceci permet d'avoir des résonances mécaniques à plus haute fréquence [25]. Elle est réalisée en taillant un bloc de silice suivant des angles et des formes bien définis. Plusieurs prototypes ont été réalisés, ce sont des cavités de longueur 2.5 cm (soit une longueur optique de 3.6 cm), le rayon de courbure du miroir de renvoi est de 30 cm. Le waist de la cavité est donc de 140 μm. Les pertes pour les bandes latérales sont donc de 3%.

Pour caractériser le filtrage obtenu avec cette cavité, on peut calculer l'atténuation obtenue pour chaque mode d'Hermite-Gauss lorsque la longueur de la cavité est ajustée pour que le mode fondamental soit résonant (figure 4.13). La cavité permet de filtrer les modes d'ordre bas comme ceux produits par les désalignements et les défauts de courbures des miroirs.

4.3.3 Filtrage du faisceau avec le "mode cleaner"

Pour évaluer les performances du filtrage avec une cavité optique, on peut reprendre les deux simulations de l'interféromètre (section 4.1.2). Le mode cleaner est simulé en utilisant comme faisceau incident les faisceaux de frange noire obtenus pour la configuration $\lambda/100$ et pour la configuration $\lambda/500$ (sans modulation).

La figure 4.14 représente la puissance transmise par le mode cleaner. Lorsque le mode cleaner est résonant sur le TEM_{00}, la puissance transmise est de 120 mW pour la configuration $\lambda/100$ et de 60 mW pour la configuration $\lambda/500$. Le contraste après "mode cleaner"

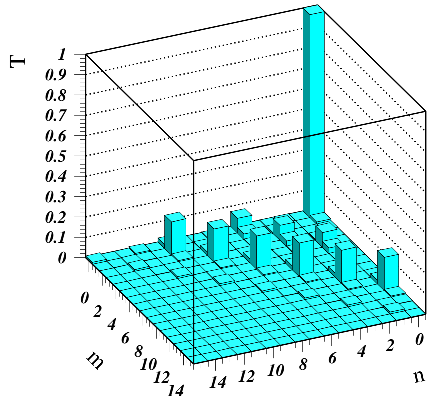
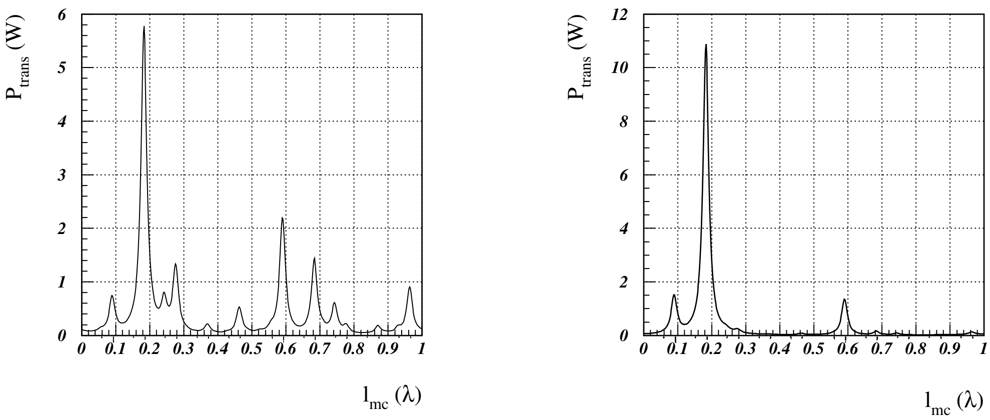
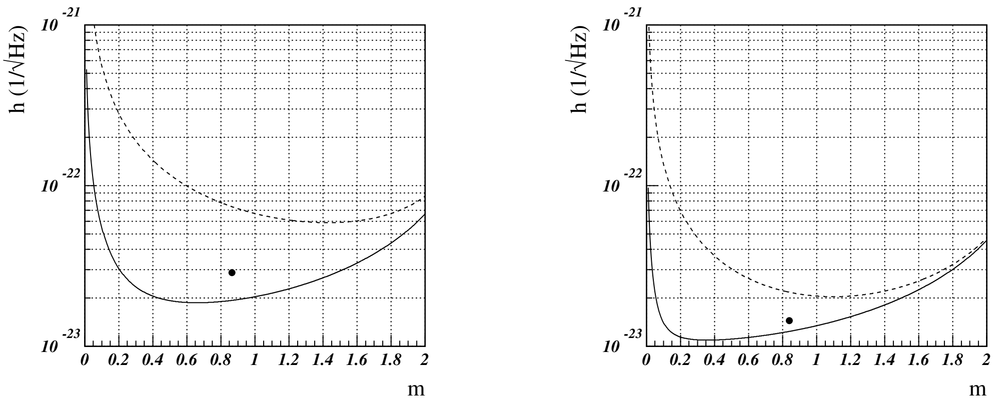


Figure 4.13: Transmission des TEM_{nm} lorsque le TEM_{00} est résonant par une cavité triangulaire. La cavité a une finesse de 50, sa longueur est de 2.56 cm et son rayon de courbure est de 30 cm



(a) (b)

Figure 4.14: Faisceau transmis par le mode cleaner en fonction de sa longueur (interféromètre non modulé) pour la configuration $\lambda/100$ (figure a) et la configuration $\lambda/500$ (figure b). Pour $l = 0$ et $l = \lambda$, la cavité est résonante sur le TEM_{00}. la puissance sortant du “mode cleaner” est alors de 120 mW pour la configuration $\lambda/100$ et de 60 mW pour la configuration $\lambda/500$



(a) (b)

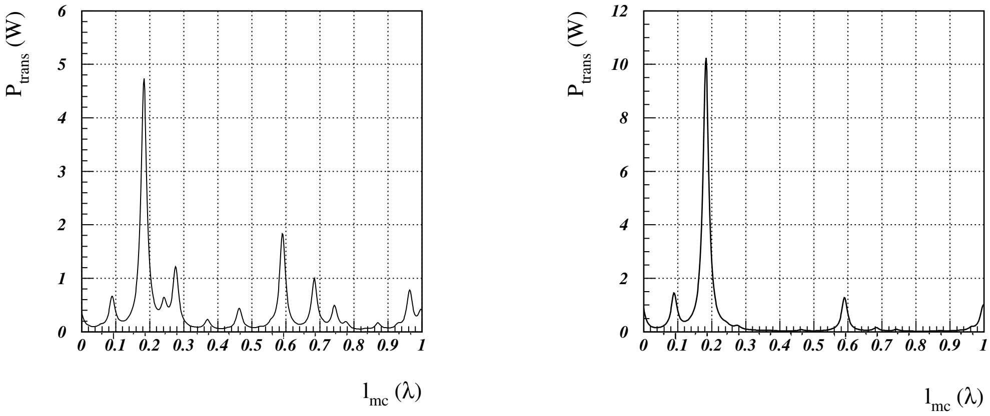
Figure 4.15: Sensibilité de l'interféromètre en fonction de la profondeur de modulation avec mode cleaner (trait plein) et sans mode cleaner (trait pointillé) pour la configuration $\lambda/100$ (a) et la configuration $\lambda/500$ (b). La sensibilité optimale obtenue avec une cascade de deux diaphragmes est représentée par un point.

est donc de $1 - C = 1.6\ 10^{-4}$ pour la configuration $\lambda/100$ et de $1 - C = 0.8\ 10^{-4}$ pour la configuration $\lambda/500$.

On voit que le mode cleaner permet d'améliorer le contraste d'un facteur 100. Les figures 4.15 montrent la sensibilité de l'interféromètre en fonction de la profondeur de modulation. Sans mode cleaner, on avait une sensibilité de 6. 10^{-23} $1/\sqrt{\text{Hz}}$ avec une profondeur de modulation de 1.4 (figure 4.5). Avec un mode cleaner on arrive à une sensibilité de 1.8 10^{-23} $1/\sqrt{\text{Hz}}$ avec une profondeur de modulation de 0.65. De même, dans la configuration $\lambda/500$ on avait sans le mode cleaner, une sensibilité de 2. 10^{-23} $1/\sqrt{\text{Hz}}$ avec une profondeur de modulation de 1.1. Après filtrage du faisceau, on obtient une sensibilité de 1. 10^{-23} $1/\sqrt{\text{Hz}}$ avec une profondeur de modulation de .35.

Le filtrage du faisceau permet donc d'obtenir une sensibilité deux à trois fois meilleure avec une profondeur de modulation deux à trois fois plus petite.

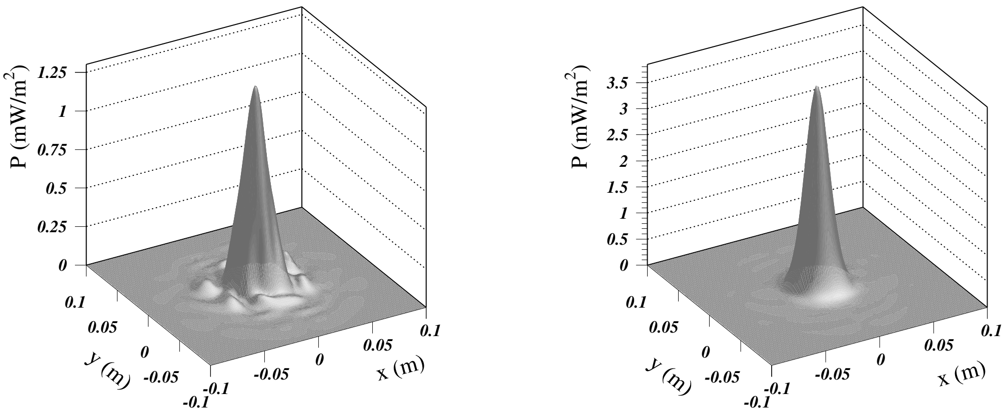
Une nouvelle simulation de l'interféromètre avec une profondeur de modulation de .65 pour la configuration $\lambda/100$ et de .35 pour la configuration $\lambda/500$ a alors été réalisée. Le facteur de transmission des bandes latérales T donne le pourcentage de la composante TEM_{00} des bandes latérales qui va etre effectivement transmis par l'interféromètre. La figure 4.16 représente la puissance transmise par le mode cleaner en fonction de sa longueur. La puissance transmise lorsque le mode cleaner est résonant sur le TEM_{00} est dominée



(a) (b)

Figure 4.16: Faisceau transmis par le mode cleaner en fonction de sa longueur, pour la configuration $\lambda/100$ (modulation de 0.65) (Figure (a)) et pour la configuration $\lambda/500$ (modulation de 0.35) (Figure (b))

par les bandes latérales et dépend donc de la profondeur de modulation et du facteur de transmission T. Elle est de 420 mW pour la configuration $\lambda/100$ ($m = .65$ et $T = 10\%$) et de 1 W pour la configuration $\lambda/500$ ($m = .65$ et $T = 79\%$). Le profil de ces faisceaux est représenté sur la figure 4.17. Ces puissances peuvent être gérées avec une dizaine de photodiodes.



(a) (b)

Figure 4.17: Profil du faisceau transmis par le "mode cleaner" (TEM_{00} résonant) pour la configuration $\lambda/100$ (a) (modulation de 0.65) la puissance totale est de 0.4 W. Pour la configuration $\lambda/500$ (modulation de 0.35) (figure b) la puissance totale est de 1 W.

4.4 Conclusion

Les simulations de l'interféromètre VIRGO donnent un défaut de contraste de l'ordre de quelques pour cent et une puissance sur la frange noire d'une dizaine de watts, le défaut de contraste de l'interféromètre est donc de l'ordre de 10^{-2}. Plus d'une centaine de photodiodes sont alors nécessaires pour gérer une telle puissance. De plus, la sensibilité optimale de l'interféromètre est limitée par ce contraste et nécessite une profondeur de modulation importante. Il est donc nécessaire de filtrer le faisceau de frange noire pour améliorer le contraste.

Le filtrage spatial avec deux diaphragmes et le filtrage par une cavité optique permettent d'améliorer la sensibilité de l'interféromètre de façon significative. L'amélioration obtenue avec une cavité optique est cependant meilleure : la sensibilité optimale de l'interféromètre est améliorée d'un facteur 2 à 3 et est obtenue avec une profondeur de modulation 2 à 3 fois plus petite.

De plus la cavité permet de mieux réduire la puissance à détecter car le contraste est amélioré d'un facteur 100 dans les deux simulations considérés. Une dizaine de photodiodes suffisent alors pour gérer la puissance du faisceau de frange noire.

Chapitre 5

Mode cleaner

La simulation de l'interféromètre a permis de voir qu'une cavité optique placée avant la détection du signal de frange noire pouvait améliorer le contraste de l'interféromètre d'un facteur 100. Une cavité "mode cleaner" a été réalisée [25]. C'est une cavité monolithique (en silice) de 2.5 cm de long.

Dans ce chapitre, les résultats des tests effectués afin valider l'utilisation de cette cavité sont présentés. Tout d'abord, on présente le résultat des mesures des caractéristiques optiques de la cavité. Les performances du filtrage optique sont ensuite étudiées grâce à un interféromètre de test. Enfin, on étudie les procédures de contrôle automatique de la longueur de la cavité.

5.1 Mesure des caractéristiques optique du mode-cleaner

5.1.1 Géométrie de la cavité

La cavité choisie pour filtrer le faisceau est une cavité monolithique en silice. La figure 5.1 représente le faisceau incident, le faisceau réfléchi et le faisceau transmis de cette cavité. La longueur de la cavité est de 2.5 cm. Le rayon de courbure du miroir de renvoi est de 30 cm, le paramètre g de la cavité est donc (formule B.1):

$$\begin{aligned} g &= 1 - \frac{L}{R} \\ &= .917 \end{aligned}$$

le waist de la cavité est donné par (formule B.2):

$$w_0^2 = \frac{l\lambda_s}{\pi}\sqrt{\frac{g}{1-g}}$$

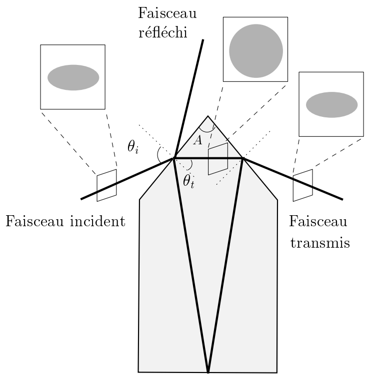


Figure 5.1: Chemin optique du faisceau dans la cavité. On a $A = 80°$, $\theta_t = 40°$ et $\theta_i = 68.7°$

où λ_s est la longueur d'onde dans la silice, $\lambda_s = \frac{\lambda}{n}$. Le waist de la cavité est donc :

$$w_0 \;=\; 140\ \mu\text{m}$$

Bien que l'angle d'incidence sur le miroir courbe ne soit pas nul (il est d'environ 10°), l'astigmatisme est négligeable et le mode résonant dans la cavité est un mode à symétrie circulaire.

5.1.2 Adaptation du faisceau dans la cavité

Comme le faisceau incident a une grande incidence par rapport au miroir d'entrée de la cavité ($\theta_i = 68.7°$), il est déformé en entrant dans la cavité. Pour avoir un faisceau circulaire dans la cavité, le faisceau incident doit être elliptique (figure 5.1), le rapport des deux axes de l'ellipse étant donné par $1/\cos(\theta_i) = 2.73$. De même, le faisceau transmis par la cavité a la même géométrie que le faisceau incident.

Le faisceau émergeant de l'interféromètre est circulaire, on doit donc l'adapté pour la cavité. De même, le faisceau transmis doit être aussi adapter à la forme circulaire des photodiodes. Pour adapter les faisceaux on a choisi de placer des prismes sur les faces d'entrée et de sortie de la cavité. Le faisceau entre dans le prisme perpendiculairement à la première face sans être déformé et sort du prisme avec une incidence égale à θ_i et la bonne excentricité (figure 5.2).

En sortant du prisme, les waists du faisceau dans les deux directions perpendiculaires à l'axe du faisceau sont différents. Comme l'expansion d'un faisceau dépend de son waist

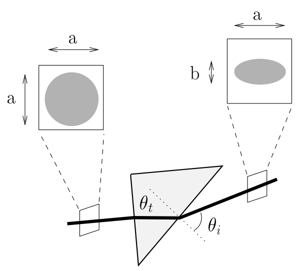


Figure 5.2: Chemin optique du faisceau dans le prisme. on a $\theta_t = 40°$, $\theta_i = 68.7°$ et $\frac{a}{b} = 2.73$

(équation A.8), il faut que le faisceau ait un parcourt le plus court possible entre le prisme et la cavité. Un contact optique entre les prismes et les faces d'entrée et de sortie de la cavité peut être envisagé mais nous avons opté pour une solution plus simple à mettre en œuvre, où les faces sont distantes de 0.3 mm (figure 5.3) ce qui introduit très peu d'aberration.

Pour étudier l'adaptation du faisceau à la cavité, on réalise l'expérience présentée figure 5.4. Un faisceau laser (monomode TEM_{00}) est envoyé sur la cavité. Le profil du faisceau transmis par la cavité est ensuite mesuré grâce à une caméra CCD [26]. La figure 5.5 représente le profil de ce faisceau mesuré à 20 cm de la cavité lorsque la cavité est résonante avec le faisceau incident. Pour mesurer le waist de la cavité, la mesure de la taille du faisceau est répétée à plusieurs distances de la cavité. La figure 5.6 représente la taille du faisceau selon les deux axes perpendiculaires à l'axe de propagation du faisceau en fonction de la distance par rapport à la cavité.

Quand $d \gg \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$, ie $d \gg 6$ cm, l'expansion du faisceau est linéaire avec la distance. Elle est donnée par $\theta_w = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ (formule A.8).

On peut donc ajuster les données avec une simple fonction linéaire et en déduire w_0 (figure 5.6) :

$$\begin{aligned} w_{0x} &= 145 \pm 7\mu\text{m} \\ w_{0y} &= 150 \pm 7\mu\text{m} \end{aligned}$$

Ces valeurs sont proches de la valeur théorique (140 μm) et montrent que le faisceau transmis par la cavité est, après le prisme de sortie, un faisceau circulaire. Comme le

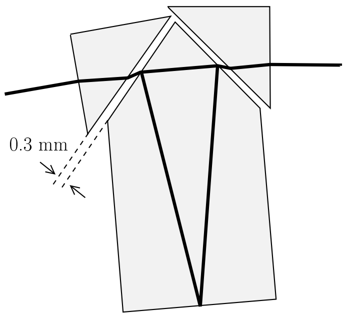


Figure 5.3: Chemin optique du faisceau dans les prismes et la cavité.

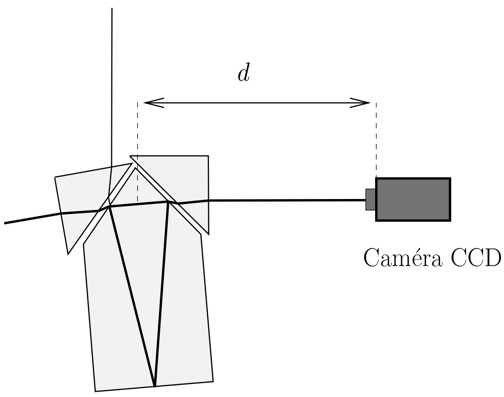


Figure 5.4: Installation permettant de mesurer le profil du faisceau transmis par le mode cleaner.

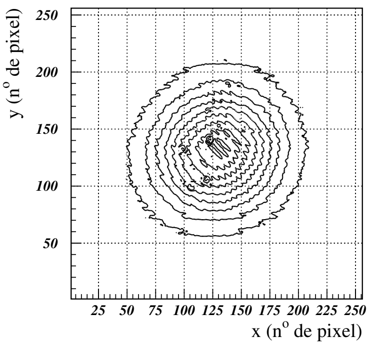


Figure 5.5: Profil du faisceau transmis par la cavité mode cleaner.

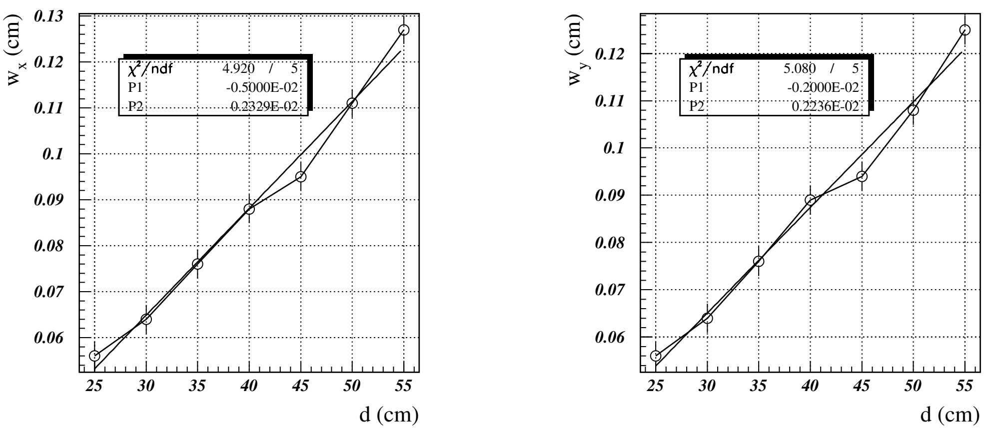


Figure 5.6: Taille du faisceau transmis par la cavité. Les données sont ajustées avec f(x)=P1+P2*x (P2 $\simeq \theta_w$)

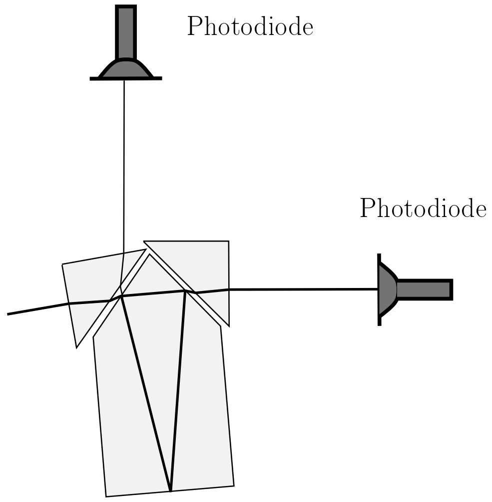
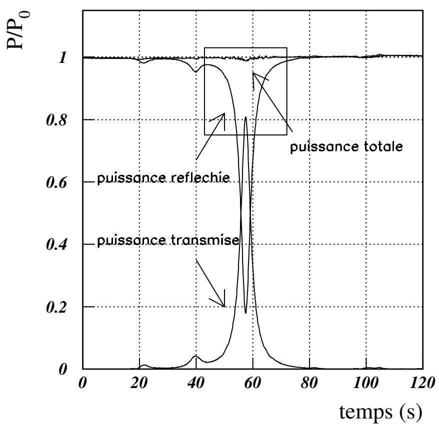


Figure 5.7: Principe de la mesure des pertes dans le mode cleaner

prisme placé sur la face d'entrée de la cavité a la même géométrie, on peut en déduire que le prisme d'entrée permet bien d'adapter un faisceau d'entrée cylindrique au waist de la cavité.

5.1.3 Mesure des pertes dans la cavité

Le mode cleaner est utilisé pour filtrer les modes transverses mais il doit aussi transmettre le signal sans le dégrader. Pour mesurer les pertes dans la cavité, on utilise l'expérience présentée figure 5.7 où on mesure à la fois la puissance transmise et la puissance réfléchie par la cavité. Le faisceau incident est un TEM_{00}. Quand le mode cleaner n'est pas résonant, la puissance est réfléchie sans passer par la cavité, on n'est alors pas sensible aux pertes du mode cleaner. On mesure les pertes dans la cavité en comparant la puissance totale lorsque la cavité est hors résonance ou lorsqu'elle est résonante (figure 5.8). Pour cette mesure, les photodiodes et leur électronique doivent être calibrées pour permettre de comparer les puissances transmises et réfléchies avec une précision meilleure que les pertes que l'on mesure. Lorsque la cavité est résonante avec le faisceau incident, la puissance totale diminue d'environ 1 %. Les pertes dans la cavité sont donc assez faibles



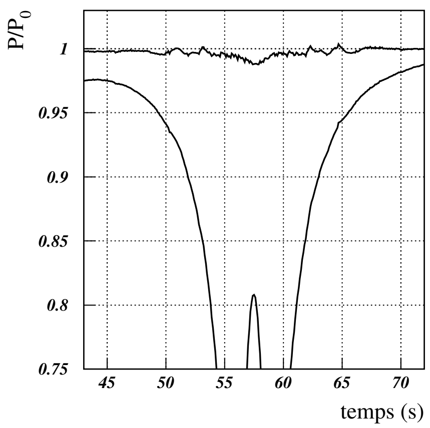


Figure 5.8: Puissance transmise, puissance réfléchie et puissance totale en fonction du temps. La cavité est chauffée de façon à ce que sa longueur varie linéairement avec le temps.

5.2 Test du Filtrage optique

5.2.1 Installation expérimentale

Pour mesurer les performances du filtrage des modes transverses avec le mode cleaner, on doit disposer d'un faisceau de frange noire. On a donc mis en place un interféromètre de Michelson (figure 5.9). La longueur des bras de l'interféromètre est 30 cm. La puissance incidente dans l'interféromètre est de 30 mW. Les lentilles L_1 et L_2 sont utilisées pour obtenir un faisceau ayant une taille de 1 mm. La longueur relative des deux bras est ajustée grâce à un piezo électrique placé derrière un des miroirs des bras.

Pour asservir l'interféromètre sur la frange noire, on a besoin d'un signal d'erreur. On utilise ici la technique de modulation interne (chapitre 2) en plaçant une cellule de Pockels dans chaque bras de l'interféromètre. La puissance continue et la puissance à la fréquence de modulation transmise par l'interféromètre s'écrivent (équation 2.5 et 2.6):

$$\begin{aligned} P_{DC} &= \frac{P_0}{2}\Big[1 - CJ_0(4m)\cos(2kl_-)\Big] \\ P_\Omega &= P_0 C J_1(4m)\sin(2kl_-) \end{aligned}$$

où P_0 est la puissance incidente, m la profondeur de modulation appliquée sur les cellules de Pockels, C le contraste de l'interféromètre et l_- la différence de longueur entre les deux bras. La fréquence du signal envoyé sur les cellules de Pockels est de 6.25 MHz et son amplitude est de 10 V_{pp} ce qui correspond à une profondeur de modulation de $m = 16 \pm 2\ 10^{-3}$ rad.

Lorsque $l_- = n\frac{\lambda}{2}$, l'interféromètre est sur la frange noire, la puissance transmise est alors :

$$P_{df} = \frac{P_0}{2}(1 - CJ_0(4m))$$

et pour $m \ll 1$, on a :

$$J_0(4m) \;=\; 1 - 4m^2 + \circ(m^3)$$

Le défaut de contraste peut donc s'écrire :

$$1 - C \;=\; 2\frac{P_{df}}{P_0} - 4m^2 \tag{5.1}$$

La puissance transmise par l'interféromètre est envoyée dans le mode cleaner. Les deux miroirs M_1 et M_2 sont utilisés pour aligner le faisceau avec la cavité. Le miroir M_2 a un coefficient de transmission d'environ 1 %. La puissance du faisceau transmis par ce miroir est détectée grâce à la photodiode PD1, le signal à la fréquence de modulation est ensuite amplifié et démodulé à 6.25 MHz. Ce signal d'erreur est numérisé et utilisé pour asservir l'interféromètre sur la frange noire.

L'interféromètre est asservi sur la frange noire grâce à un système de contrôle numérique basé sur le programme temps réel `siestaRT` qui permet de lire les ADC, de traiter les données (calcul et filtrage) et d'écrire les résultats sur les DAC. Il est utilisé ici avec la fréquence d'échantillonage maximale (2 kHz). Le correcteur utilisé est un simple intégrateur, la commande est ensuite envoyée au driver du piezo électrique via un DAC. Le gain unité de cette boucle de rétroaction est choisi à 100 Hz (on est limité ici par la fréquence d'échantillonage du système).

Avant d'asservir l'interféromètre sur la frange noire, on doit le régler pour maximiser son contraste. Dans le cas d'un simple Michelson, on doit tout d'abord aligner les deux faisceaux réfléchis par les miroirs de renvoi et régler la longueur des bras pour que les faisceaux aient la même taille au niveau de la séparatrice. Une fois l'interféromètre aligné, on peut l'asservir sur la frange noire.

5.2.2 Filtrage du faisceau de frange noire

Le faisceau de frange noire obtenu en sortie de l'interféromètre est envoyé sur la cavité. Les cellules de Peltier sont utilisées pour changer la longueur de la cavité, la figure 5.10 représente la puissance réfléchie et la puissance transmise par la cavité en fonction de sa longueur pour différent réglages de l'interféromètre. La somme de la puissance transmise

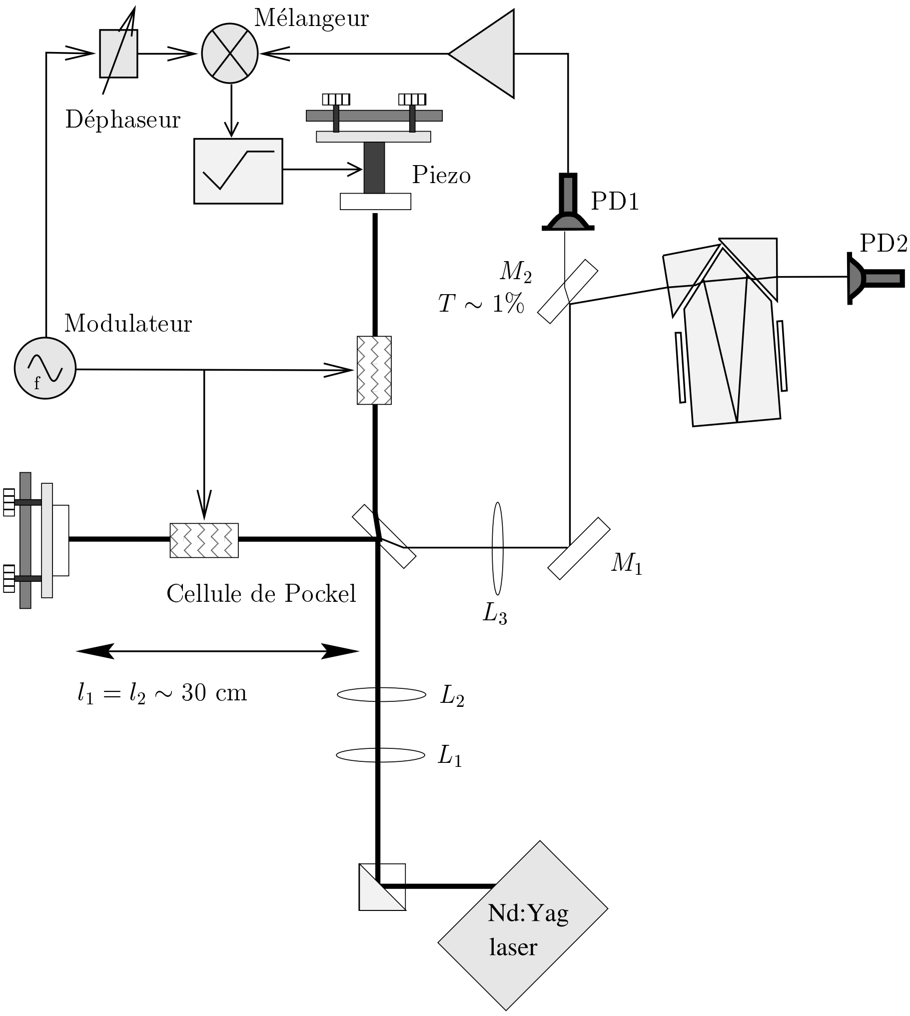


Figure 5.9: Interféromètre de Test, La photodiode PD1 permet de mesurer la puissance continue avant la cavité et le signal modulé. La longueur des bras est asservie grâce au piezo électrique placé derrière le miroir d'un des bras. La photodiode PD2 permet de mesurer la puissance transmise par la cavité.

et de la puissance réfléchie par la cavité est égale à la puissance du faisceau de frange noire alors que la puissance transmise par la cavité donne la distribution modale du faisceau de frange noire. Les TEM_{nm} sont successivement résonants pour les longueurs de la cavité :

$$l_{nm} = \frac{\lambda}{2}\left(q + (m+n+1)\frac{\arccos(\sqrt{g})}{\pi}\right) + \begin{cases} \frac{\lambda}{4} & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases} \tag{5.2}$$

où q est un entier et :

$$\frac{\arccos(\sqrt{g})}{\pi} = 0.093$$

Après un premier réglage de l'alignement de l'interféromètre, on obtient en sortie du mode cleaner la puissance transmise et la puissance réfléchie présentées figure 5.10.a. Le contraste avant le mode cleaner obtenu est (équation 5.1):

$$1 - C = 4\ 10^{-2}$$

Pour caractériser le filtrage obtenu grâce à la cavité, on calcule le contraste après le mode cleaner :

$$\begin{aligned} 1 - C' &= 2\frac{P_t(TEM_{00})}{P_0} - 4m^2 \\ &= 5 \pm 0.3\ 10^{-3} \end{aligned}$$

où l'erreur est dominée par l'incertitude sur la profondeur de modulation.

Mais on voit dans la distribution modale du faisceau que la puissance du faisceau de frange noire est dominée par le TEM_{01}, on peut donc améliorer le contraste en réglant mieux l'alignement de l'interféromètre. Après un nouveau réglage, la distribution présentée sur la figure 5.10.b est obtenue, la contribution du TEM_{01} est maintenant plus faible que celle du mode fondamental. Les contrastes avant et après filtrage sont donc :

$$\begin{aligned} 1 - C &= 1.6 \pm 0.03\ 10^{-2} \\ 1 - C' &= 1. \pm 0.3\ 10^{-3} \end{aligned}$$

Pour améliorer encore le contraste de l'interféromètre, il faut maintenant diminuer la puissance contenue dans le mode fondamental. Pour cela, la symétrie de l'interféromètre doit être améliorée en ajustant la longueur respective des bras. On obtient alors la distribution de la figure 5.10.c :

$$\begin{aligned} 1 - C &= 9 \pm 0.3\ 10^{-3} \\ 1 - C' &= -2 \pm 3\ 10^{-4} \end{aligned}$$

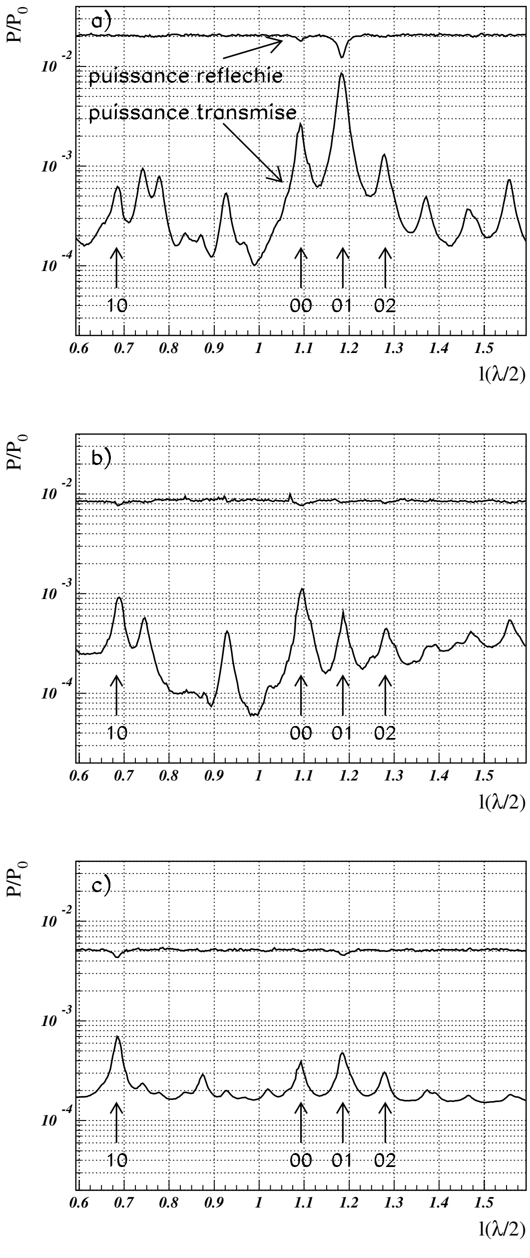


Figure 5.10: Puissance transmise et puissance réfléchie par la cavité en fonction de sa longueur normalisée par la puissance incidente totale pour différents réglages de l'interféromètre. La puissance du faisceau de frange noire est obtenue en faisant la somme de la puissance réfléchie et de la puissance transmise.

Ici, l'essentiel de la puissance contenue dans le TEM_{00} vient de la puissance des bandes latérales, ce qui rend la mesure du contraste très sensible à l'incertitude sur la profondeur de modulation. Pour améliorer cette mesure, il aurait fallu baisser la profondeur de modulation et remplacer le miroir M_2 pour transmettre plus de signal à la photodiode utilisée pour asservir le Michelson.

La puissance sur le TEM_{00} de la frange noire est produit par une différence de réflectivité de chaque bras alors que les modes supérieurs sont produits par des défauts des optiques ou de l'alignement. L'amélioration du contraste dépend de la composition en mode de la frange noire. Ici, la puissance de la frange noire sur les modes d'ordre supérieur est du même ordre de grandeur que la puissance sur le TEM_{00}. Le mode cleaner permet d'éliminer la contribution des défauts des optiques et de l'alignement dans le contraste.

L'amélioration du contraste permet de baisser le bruit de photon. Mais il faut aussi déterminer si le mode cleaner transmet bien le signal. Pour mesurer la transmission du mode cleaner, un signal à la fréquence de modulation est généré en envoyant un signal sur le piezo derrière le miroir à 1 kHz. Ce signal est mesuré sur la photodiode PD1 et sur la photodiode PD2. Le rapport de ces deux signaux donne la transmission du mode cleaner :

$$T_{MC} = .9 \pm 0.05$$

Cette mesure montre que le mode cleaner transmet bien le signal produit par une variation de la longueur des bras.

5.3 Contrôle de la longueur du Mode cleaner

5.3.1 Principe du contrôle

Spécifications

La cavité est utilisée pour filtrer le signal, une première spécification est donc de transmettre le mode fondamental. Pour avoir une transmission de 95 % par rapport à la transmission sur la résonance, on doit avoir :

$$\partial l_{mc} < 1.10^{-9} \text{ m}$$

Le signal de frange noire est utilisé par le système de contrôle de l'interféromètre pour asservir la différence de longueur des deux bras de des Fabry-Perot. Une variation de longueur de la cavité provoque un signal à la fréquence de modulation de l'interféromètre, ce signal est donc interprété par le système de contrôle de l'interféromètre comme un mouvement des cavités Fabry-Perot. Pour compenser cet effet, le système de contrôle va décaler la frange noire ce qui va augmenter la puissance transmise par l'interféromètre et donc dégrader la sensibilité. Des simulations [25] ont montré que la spécification sur le réglage de la cavité sur la résonance est de :

$$\partial l_{mc} \quad < \quad 3.\ 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Contrôle thermique

La cavité est un bloc de silice de quelques centimètres de long. Pour contrôler sa longueur on change sa température. La variation de la longueur optique de la cavité avec la température est donnée par :

$$\begin{aligned} l_{opt} &= n * l \\ \frac{\partial l_{opt}}{\partial T} &= n\frac{\partial l}{\partial T} + l\frac{\partial n}{\partial T}. \end{aligned}$$

Le coefficient thermal de la silice $\frac{\partial n}{\partial T}$ est de 11 10^{-6} °C^{-1}. Le coefficient de dilatation thermique de la silice $\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T}$ est égal à 0.52 10^{-6} °C^{-1}. La variation de longueur optique est donc dominée par la variation de l'indice de réfraction, on a donc

$$\frac{\partial l_{opt}}{\partial T} \quad \simeq \quad .27\mu\mathrm{m}^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$$

soit à peu près un quart de la longueur d'onde.

Pour ajuster le mode cleaner sur une résonance, on doit donc avoir une dynamique de quelques degrés. Pour cela on utilise des cellules de Peltier mise de part et d'autre de la cavité (figure 5.13).

Modulation de la longueur de la cavité

Pour maintenir la cavité sur la résonance, on a besoin d'un signal d'erreur, c'est-à-dire d'un signal linéaire autour de la résonance et qui change de signe quand le mode cleaner traverse une résonance. Pour cela, on peut moduler la longueur de la cavité. La puissance transmise par la cavité s'écrit :

$$P(l) \quad = \quad \frac{P_0}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2(kl)}$$

où F est la finesse de la cavité et l sa longueur. Si on module la longueur de la cavité à la fréquence f et avec une profondeur a autour de la longueur moyenne de la cavité l_{mc}, la puissance transmise s'écrit :

$$\begin{aligned} P(l) &= P(l_{mc}) + \left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)_{l=l_{mc}} a\sin(2\pi f t) \\ &= P(l_{mc}) + \frac{P_0\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 k\sin(2kl_{mc})}{\left(1+\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2\sin^2(kl_{mc})\right)^2} a\sin(\Omega t) \end{aligned}$$

L'amplitude du signal à la fréquence de modulation est donc donnée par :

$$S = P_0 ka\frac{\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin(2kl_{mc})}{\left(1+\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2\sin^2(kl_{mc})\right)^2}$$

La figure 5.11 représente la puissance continue transmise par le mode cleaner ainsi que le signal démodulé. Lorsque le mode cleaner est proche de la résonance $l_{mc} = n\lambda + \partial l_{mc}$ (n entier), le signal après démodulation s'écrit :

$$S = P_0 ka\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 k\partial l_{mc}$$

Ce signal est linéaire lorsque la longueur de la cavité est très proche de la résonance. En terme de longueur de la cavité, la zone linéaire est donc de l'ordre de la distance entre les deux extremums de ce signal :

$$L_{lin} = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}F}$$

Quand le mode cleaner est proche de la résonance $l_{mc} = n\lambda + \partial l_{mc}$ (n entier), le signal après démodulation s'écrit :

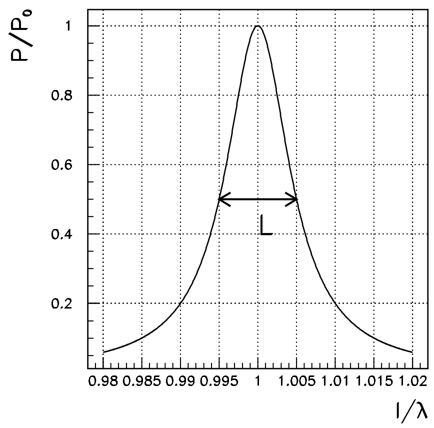
$$S = P_0 ka\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 k\partial l_{mc}$$

La modulation peut se faire en exerçant une pression sur la face supérieure du mode cleaner, ce qui allonge le chemin optique du faisceau (figure 5.12). Des simulations mécaniques faites à l'aide du programme `SISTUS` montrent que l'allongement du chemin optique de la cavité induit par une pression sur la face supérieure est de [25]:

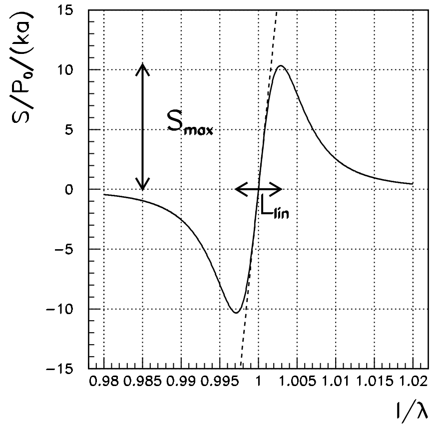
$$a/F = 2.7\ 10^{-11}\mathrm{m/N}$$

Le bruit de mesure dominant à ces fréquences est le bruit en puissance du laser. Avec $\frac{\partial P}{P} = 1.10^{-7}$, on a un rapport signal sur bruit donné par :

$$\begin{aligned} \frac{S}{N} &= \frac{P}{\partial P}\left(\frac{4F}{\lambda}\right)^2 a\delta l \\ &= 4.\ 10^{23} a\delta l \end{aligned}$$



(a)



(b)

Figure 5.11: Puissance transmise par le mode cleaner (a) et signal d'erreur (b) calculé en fonction de la longueur optique de la cavité ($F = 50$). La largeur de la résonance est $L = \frac{\lambda}{2F}$, Le signal démodulé maximum est $S_{max} = P_0 ka \frac{3\sqrt{3}F}{8\pi}$. La distance entre les deux extremums est $L_{lin} = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}F}$. la pente de la zone linéaire est $\frac{\partial S}{\partial l}(l = n\frac{\lambda}{2}) = P_0 k^2 a \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2$

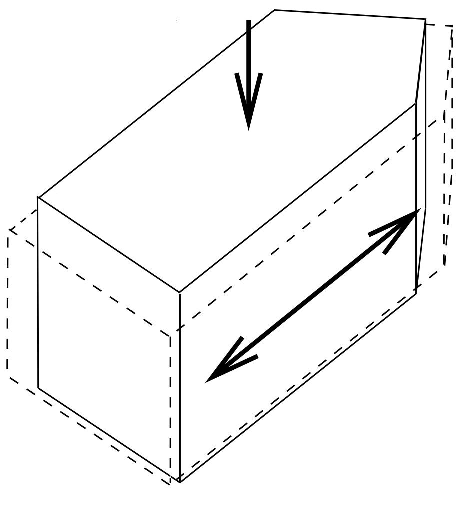


Figure 5.12: Une pression exercée sur la face supérieure permet d'allonger la longueur optique de la cavité

Pour avoir une sensibilité $\delta l \sim 3\ 10^{-10}$m, une profondeur $a \sim 10^{-13}$ est donc suffisante. Un piezo électrique placé sur la face supérieur de la cavité peut exercer une telle force.

Avec une électronique de démodulation, le signal est récupère pour l'asservissement de la cavité. Pour synthétiser le correcteur à appliquer, il suffit ensuite de mesurer la réponse de l'ensemble constitué de la cavité et de son support puis de la modéliser.

Le problème de l'asservissement de la longueur de la cavité par la température est que la réponse du système est très lente. De plus, les cellules de Peltier ne peuvent pas être en contact avec la cavité car cela perturberait la structure mécanique de l'ensemble et ajouterait des résonances mécaniques.

On a donc choisi de placer le mode cleaner, les prismes et le piezo électrique dans une boîte (voir figure 5.13), le tout est posé sur un support grâce à des pieds de section faible pour avoir une faible conductivité thermique entre le support et la boîte. Les cellules de Peltier sont placées de part et d'autre de la boîte. On a donc un plan de la cellule de Peltier en contact avec la boîte et l'autre avec un montant lié au support. La boîte est faite en cuivre pour avoir une bonne conductivité thermique. A l'intérieur de la boîte, un pont maintient sous pression l'ensemble mode cleaner et piezo.

5.3.2 Modélisation du Mode Cleaner

Réponse aux cellules de Peltier

Pour déterminer le correcteur à appliquer au signal d'erreur servant à asservir la longueur de la cavité, il faut modéliser la réponse de la cavité aux cellules de Peltier. Le moyen le plus simple est de mesurer cette réponse à une commande définie et d'ajuster cette réponse à un modèle. Les modèles envisagés sont de type passe-bas. On cherche donc une réponse à un échelon du type :

$$l(t) = l_0 + (l_\infty - l_0)\left(1 + \sum_i C_i \exp(-\frac{t}{\tau_i})\right)$$

où l_0 est la longueur de la cavité à $t = 0$ et l_∞ la longueur de la cavité pour $t = \infty$ et τ_i les constantes de temps du système. Les coefficients C_i sont déterminés par les conditions initiales.

La difficulté est ici d'avoir une mesure de la longueur de la cavité $l(t)$. Avec un faisceau incident TEM_{00}, la cavité est résonante tous les $\lambda/2$. En mesurant la puissance transmise par la cavité, on a une mesure de la longueur de celle-ci tous les $\lambda/2$. Mais la dynamique des cellules de Peltier n'est pas assez grande pour traverser un nombre élevé de résonance, ce qui limite le nombre de points de mesure. Pour en avoir plus, il suffit de désaligner la cavité par rapport au faisceau incident. Ceci crée des modes d'ordre supérieur TEM_{nm}

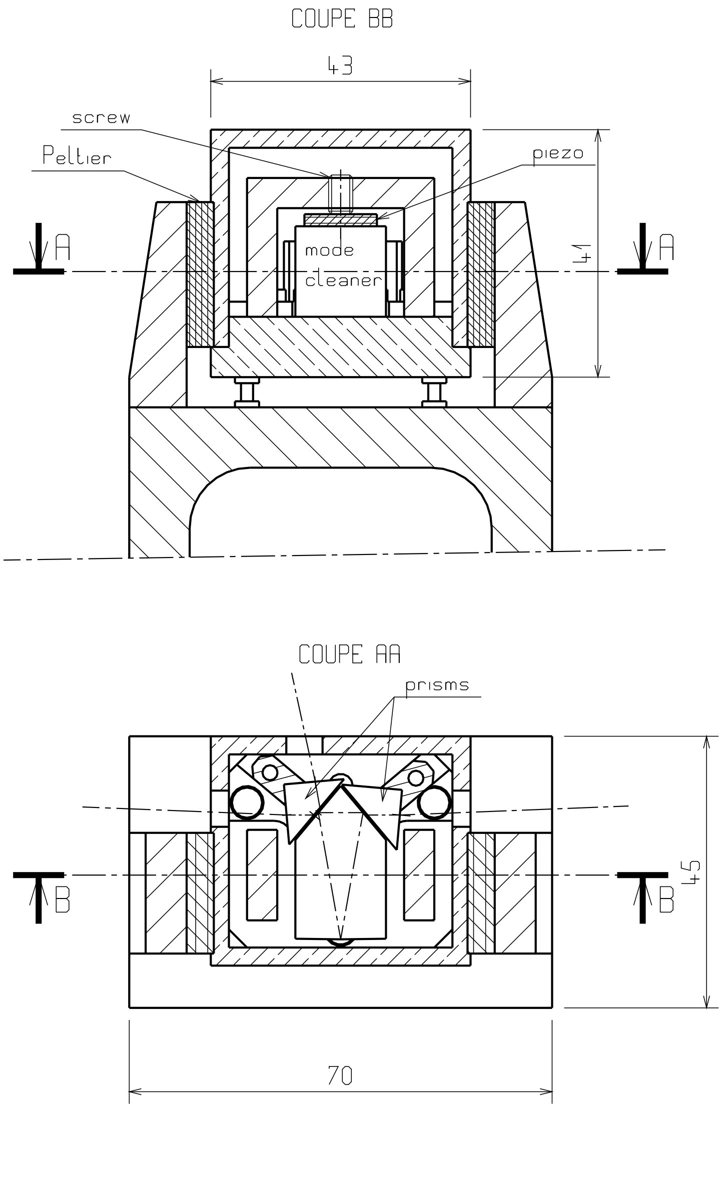


Figure 5.13: Support de la cavité

qui seront résonants dans la cavité lorsque sa longueur est égale à (équation 5.2):

$$l_{nm} = \frac{\lambda}{2}\left(q + 0.093(m+n+1)\right) + \begin{cases} \frac{\lambda}{4} & \text{pour n impair} \\ 0 & \text{pour n pair} \end{cases}$$

L'échelon envoyé au contrôleur des Peltier (2.5 V ce qui fait débiter un courant de 1.25 A dans les cellules de Peltier) est choisi pour avoir un maximum de points tout en restant dans la zone linéaire du système de régulation thermique (alimentation, électronique et cellules de Peltier). En mesurant la puissance transmise (figure 5.14) et en identifiant les résonances en visualisant le faisceau, on reconstruit la longueur de la cavité en fonction du temps (figure 5.15). Un ajustement de la réponse avec trois constantes de temps permet de modéliser le résultat obtenu avec :

- $\tau_1 = 22$ seconds
- $\tau_2 = 22$ seconds
- $\tau_3 = 277$ seconds

La fonction de transfert de la réponse de la cavité à une tension sur les cellules de Peltier s'écrit donc :

$$H_{Peltier}(p) = \frac{A}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)(1+\tau_3 p)} \text{m/Volt}$$

où A est égal à 1.2 λ. La bande passante de la réponse est de 0.6 mHz.

Réponse au piezo électrique

Pour déterminer la réponse au piezo électrique, on étudie le signal démodulé. Une tension de 10 V_{pp} à 28 kHz est appliquée sur le piezo électrique. La puissance transmise par la cavité est mesurée grâce à une photodiode.

L'électronique de lecture de la photodiode permet de séparer la puissance continue du signal modulé. Ce dernier est filtré par un passe bande centré sur 28 kHz puis démodulé (figure 5.17). Les tensions mesurées sont données par :

$$\begin{aligned}
V_{DC} &= G_{DC} \frac{P_0}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2(k(l_{mc}))} \\
V_{DC}^{MAX} &= G_{DC} P_0 \\
V_{Dem} &= G_{Dem} P_0 k a \frac{\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin(2kl_{mc})}{\left(1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2(kl_{mc})\right)^2} \\
V_{Dem}^{MAX} &= G_{Dem} P_0 k a \frac{3\sqrt{3}F}{8\pi}
\end{aligned}$$

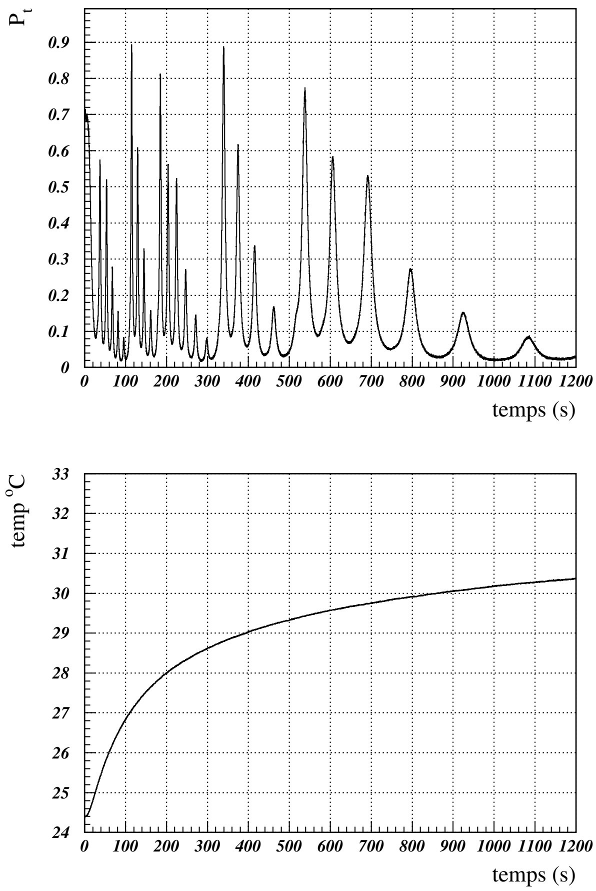
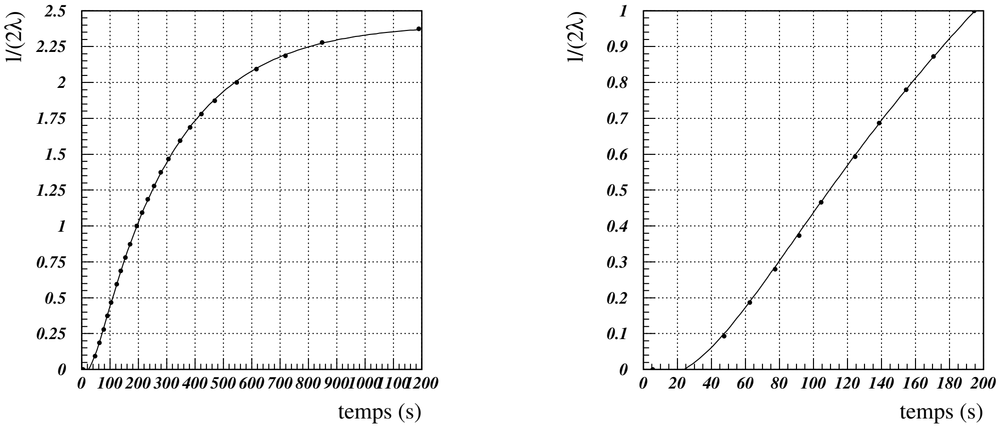
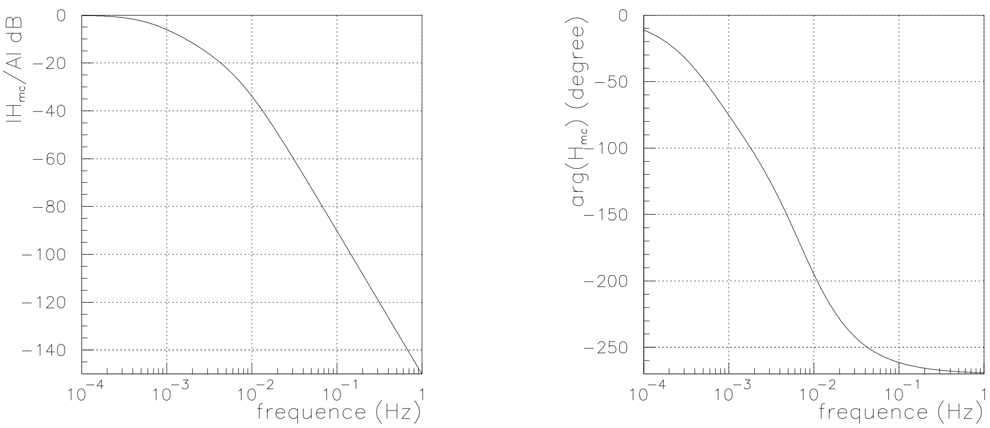


Figure 5.14: Puissance transmise par la cavité et température de la cavité en fonction du temps. A $t = 0$, on applique sur les cellules de Peltier une tension de 2.5 Volt (soit 1.25 A)



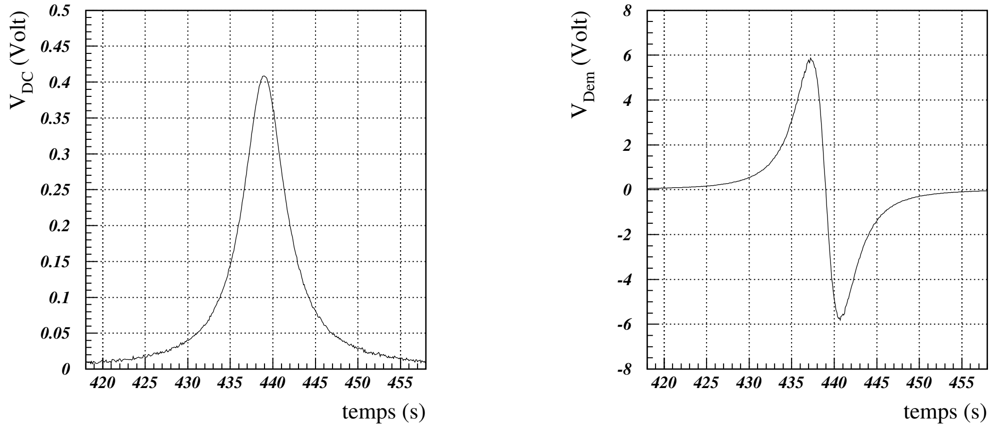
(a) (b)

Figure 5.15: Longueur de la cavité en fonction du temps. Fit avec un modèle du troisième ordre



(a) (b)

Figure 5.16: Module (a) et phase (b) de $H_{peltier}$



(a) (b)

Figure 5.17: Puissance continue (a) et signal démodulé (b) mesuré en fonction du temps (La longueur de la cavité augmente linéairement avec le temps)

où G_{DC} et G_{Dem} sont respectivement les gains du système de lecture de la puissance continue et du signal démodulé (photodiode et électronique). V_{DC}^{MAX} est la tension continue obtenue lorsque la cavité est résonante et V_{Dem}^{MAX} est la valeur absolue du signal d'erreur à ses extremums.

La réponse du système est donnée par

$$\begin{aligned} H_{piezo} &= \frac{V_{Dem}}{\partial l_{mc}}(l_{mc} = 0) \\ &= G_{Dem} P_0 k^2 a \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \end{aligned}$$

qui s'exprime en fonction de V_{Dem}^{MAX} :

$$\begin{aligned} &= \frac{32}{3\sqrt{3}} V_{Dem}^{MAX} \frac{2F}{\pi} k \\ &= 5.8\ 10^9\ \mathrm{V/m} \end{aligned}$$

On peut aussi en déduire la profondeur a:

$$a = \frac{\lambda}{12\sqrt{3}F} \frac{V_{Dem}^{MAX}}{G_{Dem}} \frac{G_{DC}}{V_{DC}^{MAX}}$$

La calibration des gains de l'électronique G_{DC} et G_{Dem} permet d'évaluer la profondeur

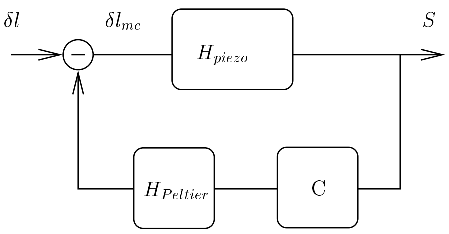


Figure 5.18: Système d'asservissement de la cavité.

de modulation générée par le piezo électrique. Avec

$$\frac{G_{DC}}{G_{Dem}} = 2.8\ 10^{-4}$$

on trouve :

$$a = 3.3\ 10^{-12}\text{m}$$

Synthèse du correcteur

On a maintenant un signal d'erreur $S = H_{piezo}\partial l_{mc}$ où H_{piezo} est la fonction de transfert de la réponse du piezo électrique :

$$H_{piezo} = G_{Dem} P_0 k^2 a \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2$$

Pour maintenir la cavité sur la résonance, on utilise les cellules de Peltier en contre réaction (figure 5.18). On a donc en boucle fermée :

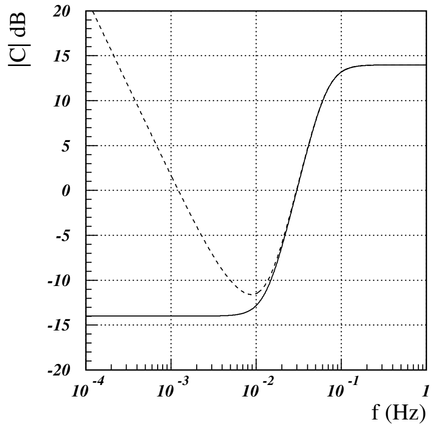
$$\delta l_{mc} = \frac{\delta l}{1 + H_{piezo} H_{peltier} C}$$

où δl représente la perturbation du système et où C est le correcteur à appliquer au signal d'erreur pour asservir la cavité.

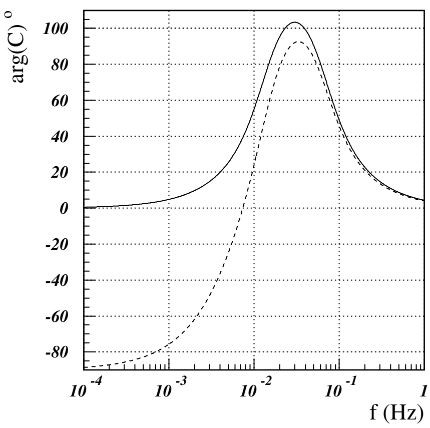
La bande passante de $H_{peltier}$ est très basse (0.6 mHz). Pour avoir un asservissement qui ne soit pas trop lent, on doit augmenter la bande passante du système. Le correcteur doit donc ajouter du gain et pour que l'ensemble soit stable, il doit aussi ajouter de la phase. On utilise un correcteur du deuxième ordre du type

$$C(p) = G_c \frac{(p\sqrt{a} + p_0)}{(p + \sqrt{a}p_0)} \frac{(p\sqrt{a} + p_0^*)}{(p + \sqrt{a}p_0^*)}$$

avec $p_0 = 2\pi f_0 e^{i\frac{\pi}{4}}$. A $p = p_0$ et avec $a = 5$, le correcteur $C(p)$ a une avance de phase de



(a)



(b)

Figure 5.19: Module (figure a) et argument (figure b) des correcteurs C (trait plein) et C' (trait pointillé). On a $f_0 = 30$ mHz, $a = 5$ et $G_c = 1$.

103.4 ^{o} (figure 5.19). Pour que la bande passante de l'asservissement aille jusqu'à f_0, on doit avoir :

$$|H_{piezo}(p_0)H_{peltier}(p_0)C(p_0)| \quad = \quad 1$$

soit

$$G_c \quad = \quad \frac{A\Pi_i\sqrt{1+(2\pi f_0\tau_i)^2}}{\frac{32}{3\sqrt{3}}V_{Dem}^{MAX}\frac{2F}{\pi}}$$

Le correcteur $C(p)$ a à basse fréquence un gain fini ce qui ne permet pas de maintenir la position moyenne de la cavité sur la résonance. Ce correcteur permet uniquement de stabiliser la cavité autour de la résonance. Pour asservir la position moyenne sur la résonance on ajoute au correcteur C(p) un intégrateur :

$$C'(p) \quad = \quad \frac{p+\frac{2\pi f_0}{a}}{p}C(p)$$

A basse fréquence ($f \ll f_0$) le correcteur C' a un gain plus grand que celui du correcteur $C(p)$ et tend vers l'infini en continu. A plus haute fréquence ($f \gg f_0$), les deux correcteurs C et C' ont le même gain (figure 5.19.a). Par contre, le correcteur C' (figure 5.19.b) a une marge de phase plus faible que le correcteur C. Il est donc moins stable.

Le correcteur C est donc utilisé pour stabiliser la longueur de la cavité au début de l'accrochage et le correcteur C' pour asservir la cavité sur la résonance une fois qu'elle est stabilisée.

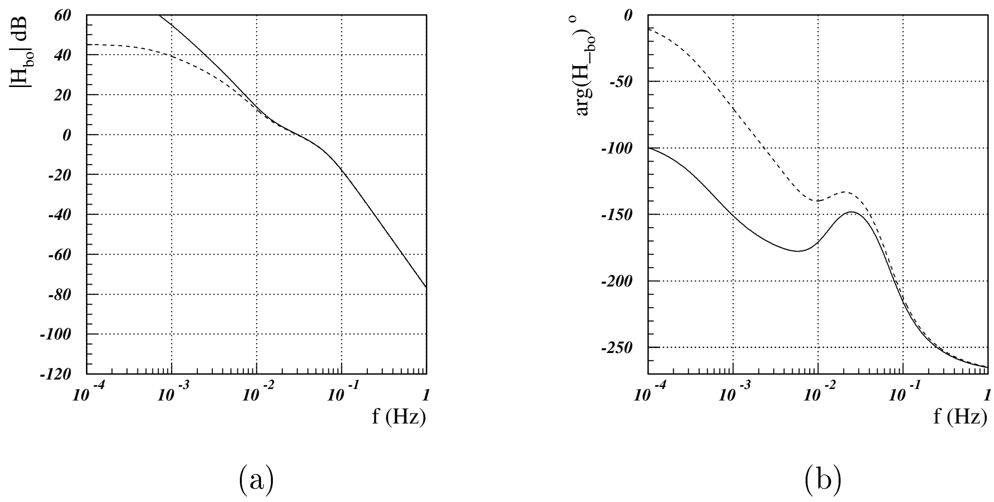


Figure 5.20: Module (a) et argument (b) de la fonction de transfert H_{bo} avec $H_{bo} = H_{piezo}H_{peltier}C$ (trait plein) et $H_{bo} = H_{piezo}H_{peltier}C'$ (trait pointillé)

5.3.3 Linéarisation du signal d'erreur

Le contrôle de la cavité en température permet donc de maintenir la cavité sur la résonance, mais pour démarrer cet asservissement il faut que la cavité soit déjà dans la zone linéaire du signal d'erreur. Or la largeur de cette zone correspond à $\frac{1}{\sqrt{3}F}$ de la distance entre deux résonances. Avec une cavité à la température ambiante, la longueur optique de la cavité est indéterminée et on a peu de chance (moins d'1%) d'être dans la zone linéaire du signal d'erreur. Il faut donc amener la cavité sur la résonance avant d'enclencher l'asservissement.

Le contrôle de la longueur de la cavité étant de type thermique, la réponse du système est très lente et la cavité peut croiser une résonance sans que l'asservissement n'ait le temps d'accrocher cette résonance. Il faut donc que la vitesse avec laquelle on augmente la température de la cavité soit assez lente.

L'acquisition de la résonance risque donc d'être assez longue. Pour l'améliorer, on peut chercher à augmenter la zone linéaire du signal d'erreur en divisant le signal démodulé par le signal continu au carré :

$$
\begin{aligned}
V_{lin} &= V_{Dem}\left(\frac{V_{DC}}{V_{DC}^{MAX}}\right)^2 \\
&= G_{Dem}P_0ka\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2\sin(2kl_{mc})
\end{aligned}
$$

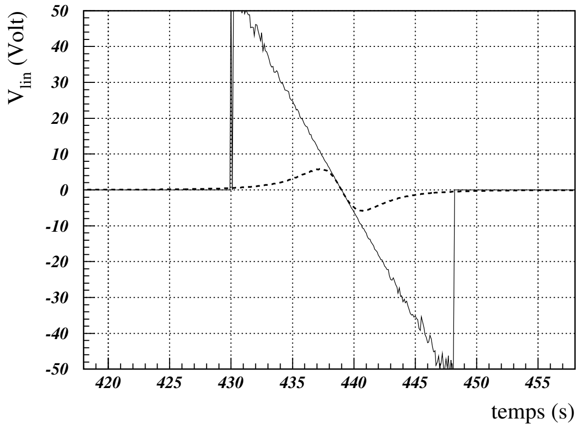


Figure 5.21: Signal d'erreur (trait pointillé) et signal linéarisé (trait plein).

Ici V_{lin} est une fonction du sinus de la longueur. La linéarité n'est ainsi plus limitée par la finesse de la résonance. En pratique, dès que l'on s'écarte de la résonance, la puissance continue transmise tend vers zéro. La linéarisation demande donc une bonne maîtrise des offset et une grande dynamique du système de lecture des signaux.

La figure 5.21 représente le signal V_{lin} lorsque la cavité traverse la résonance. Il est calculé pour $V_{DC} > 40\ mV$. La zone linéaire du signal linéarisé est dix fois plus grande que celle du signal démodulé.

La figure 5.26 représente le schéma de l'expérience réalisée. Un générateur produit le signal de modulation à 28 kHz envoyé sur le piezo électrique du mode cleaner. Une photodiode détecte la puissance transmise par la cavité. Le signal produit est démodulé à 28 kHz. Le signal continu et le signal démodulé sont ensuite numérisés avec un ADC. Le CPU calcule alors la correction envoyée aux Peltier via un DAC et un générateur de courant.

Pour tester l'efficacité de la linéarisation du signal d'erreur, on peut étudier le temps mis par le système pour acquérir la résonance avec ou sans linéarisation.

Pour cela, on augmente de façon linéaire la longueur de la cavité avec les Peltier jusqu'à ce que la cavité arrive sur une résonance (figure 5.22). L'asservissement est enclenché quand la puissance transmise dépasse une certaine puissance seuil (la puissance seuil doit être la puissance à partir de laquelle le signal d'erreur est dans la zone linéaire).

Mais comme le contrôle de la cavité avec les cellules de Peltier a une bande passante limitée (30 mHz), lorsque la cavité transverse la résonance trop vite, le système n'a pas le temps de la stabiliser sur la résonance.

Dans les deux cas (avec ou sans linéarisation), on peut trouver la vitesse limite avec laquelle le système accroche la résonance. Pour une vitesse donnée, le système avec

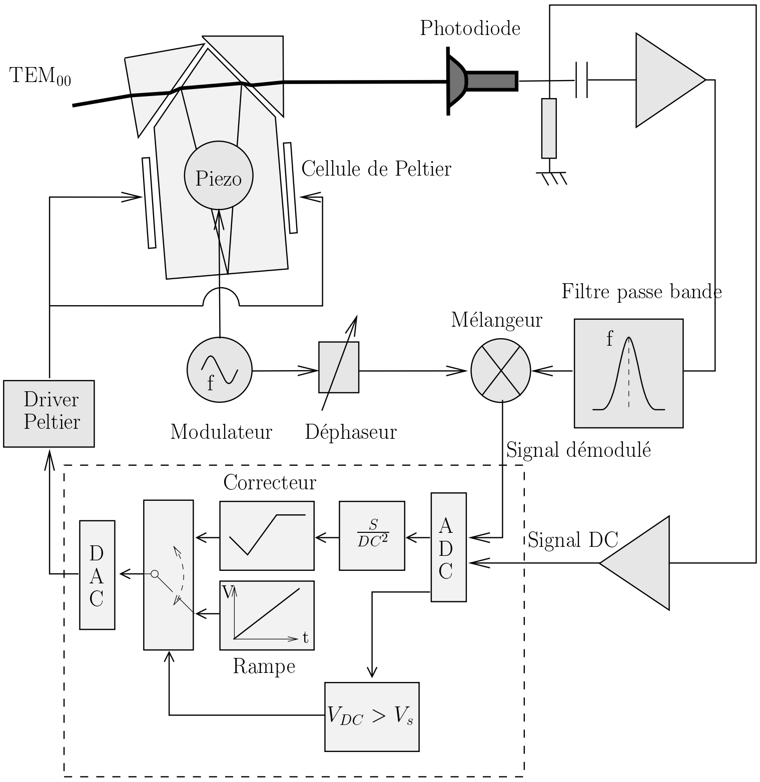


Figure 5.22: Système de test d'acquisition de la résonance.

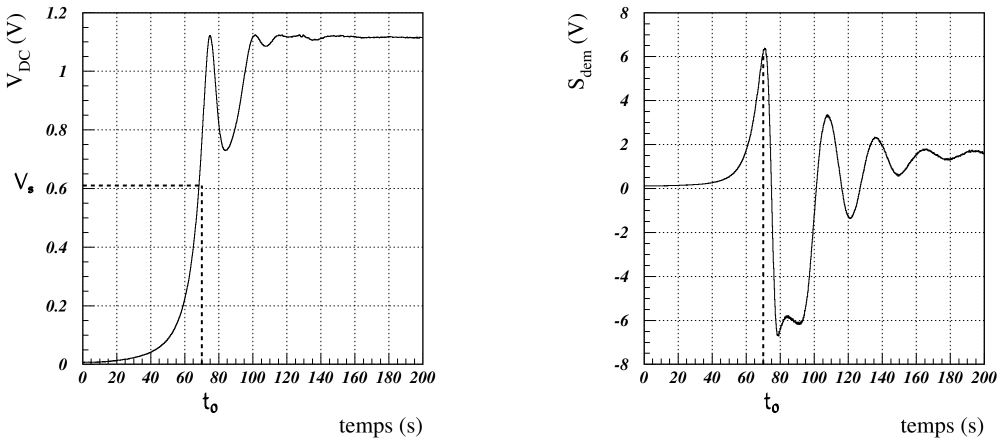
linéarisation du signal d'erreur a 10 fois plus de temps pour asservir la cavité.

La figure 5.23 présente un accrochage sans linéarisation du signal d'erreur. La vitesse de la rampe est de 5 $10^{-4}\lambda/s$ (la distance entre deux résonances est $\frac{\lambda}{2}$, on met donc 17 minutes pour aller d'une résonance à une autre). Sans linéarisation, l'asservissement est déclenchée lorsque la puissance transmise par la cavité est supérieure à 0.6 V. La température de la cavité est donc augmentée jusqu'à ce que la puissance transmise dépasse 0.6 volt. La commande calculée à partir du signal d'erreur et du correcteur C est alors envoyée sur les cellules de Peltier.

Des essais d'accrochage sans linéarisation à une vitesse de 2 $10^{-3}\lambda/s$ ont échoués. On voit donc que l'acquisition de la résonance de la cavité peut prendre beaucoup de temps.

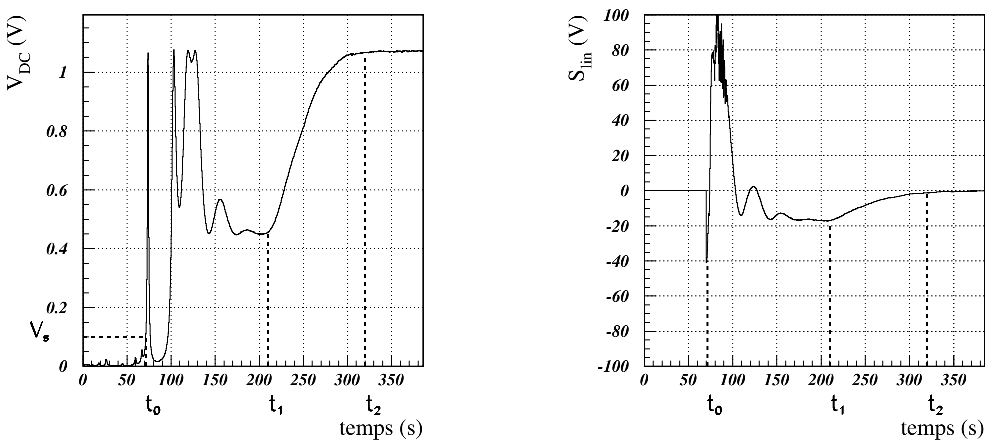
La figure 5.24 présente un essai d'accrochage avec linéarisation du signal d'erreur. La vitesse de la rampe est ici de $10^{-2}\lambda/s$ (on met une minute pour aller d'une résonance à une autre). L'asservissement est déclenché lorsque la puissance transmise par la cavité est supérieure à 0.1 V.

- La température de la cavité est augmentée jusqu'à $t = t_0$.



(a) (b)

Figure 5.23: Puissance continue transmise (figure a) et signal d'erreur (figure b) en fonction du temps lors de l'acquisition de la résonance (sans linéarisation du signal d'erreur). La vitesse de la rampe avec laquelle la cavité arrive sur la résonance est de 5 $10^{-4}\lambda/s$



(a) (b)

Figure 5.24: Puissance continue transmise (figure a) et signal linéarisé (figure b) en fonction du temps lors de l'acquisition de la résonance. La vitesse de la rampe avec laquelle la cavité arrive sur la résonance est de 1 $10^{-2}\lambda/s$

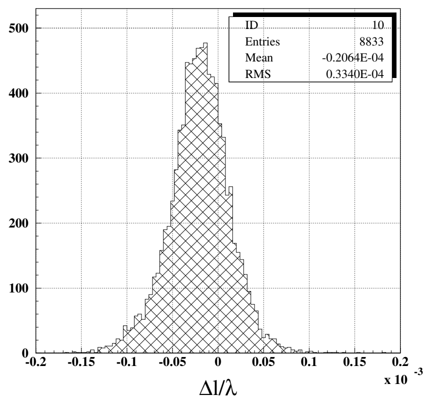


Figure 5.25: Distribution de la longueur de la cavité après l'acquisition de la résonance

- à $t = t_0$, la puissance transmise dépasse la puissance seuil, la commande envoyée sur les Peltier est calculée à partir du signal linéarisé et du correcteur C.
- à $t = t_1$, la température de la cavité est stabilisée mais n'est pas exactement sur la résonance (la puissance transmise est égale à la moitié de la puissance incidente. On passe du correcteur $C(p)$ au correcteur avec intégrateur $C'(p)$.
- à $t = t_2$, la cavité est stabilisée sur la résonance.

Grâce à la linéarisation du signal d'erreur, la cavité est réglée sur le mode fondamental de façon automatique en quelques minutes.

Une fois que le mode cleaner est résonant, on peut mesurer les performances du système de contrôle de la cavité. La distribution du bruit en longueur de la cavité est représentée figure 5.25. Cette distribution correspond à une durée de 150 minutes. On a une donnée par seconde. La valeur RMS de la distribution est de $\frac{\lambda}{30000}$, ce qui est à peu près dix fois meilleur que les spécifications.

5.3.4 Acquisition de la résonance sur un faisceau de frange noire

Pour acquérir la résonance, la température de la cavité est augmentée jusqu'à ce qu'elle croise une résonance. On a donc besoin d'une observable sur laquelle on puisse déclencher l'asservissement.

Avec un faisceau incident TEM_{00}, on peut démarrer l'asservissement quand la puissance transmise dépasse une certaine puissance seuil. Mais le mode cleaner est utilisé pour filtrer le faisceau de frange noire de l'interféromètre. Dans le chapitre 4, la frange noire obtenue est une superposition de différents modes d'Hermite Gauss. La puissance sur le mode fondamental est plus faible que celle contenue dans d'autres modes. Il faut donc être capable d'identifier le TEM_{00}.

Pour cela, on utilise une caméra CCD qui permet de visualiser le profil du faisceau [26]. Ce profil peut être comparé au profil Gaussien du mode fondamental. Ceci est quantifié au moyen d'un χ^2 entre le profil attendu et le profil obtenue sur la caméra. La procédure d'identification du mode fondamental est donc la suivante :

- Le profil du faisceau transmis par la cavité est numérisé et l'image est lue par le processeur.
- L'image est projetée sur les deux axes x et y.
- Les projections p_x et p_y sont normalisées et les positions moyennes du faisceau (x_0,y_0) sont calculées.
- La différence entre l'image et un profil Gaussien théorique est calculée :

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=0}^{i<N_{pixel}} \left(p_x(i) - e^{-2\frac{(x(i)-x_0)^2}{w_x^2}}\right) \\ &+ \sum_{i=0}^{i<N_{pixel}} \left(p_y(i) - e^{-2\frac{(y(i)-y_0)^2}{w_y^2}}\right)\end{aligned}$$

  où w_x et w_y sont les tailles du faisceau au niveau de la caméra (ces deux paramètres doivent avoir été mesurés au préalable)

- Le χ^2 est comparé à une valeur seuil choisie de façon à être suffisamment sélective pour identifier le TEM_{00}

Cette observable permet de passer de la phase où on augmente linéairement le courant sur les cellules de Peltier au contrôle de la cavité avec le signal d'erreur.

La figure 5.26 représente le schéma de l'électronique utilisé pour l'extraction du signal d'erreur et l'identification de mode fondamental.

Pour tester l'acquisition de la résonance sur un faisceau de frange noire, on utilise l'interféromètre présenté dans la partie 5.2. La figure 5.27 montre la puissance mesurée transmise par la cavité en fonction de sa longueur ainsi que le χ^2 calculé avec le profil de l'image. Le TEM_{00} est résonant pour $l = \lambda/2$: la corrélation de l'observable construite à partir du profil du faisceau avec le mode fondamental est clairement visible.

Pour acquérir la résonance sur le TEM_{00} on augmente la température de la cavité jusqu'à ce que le χ^2 passe en dessous de $\chi_s^2 = 10$. La figure 5.28 montre une acquisition :

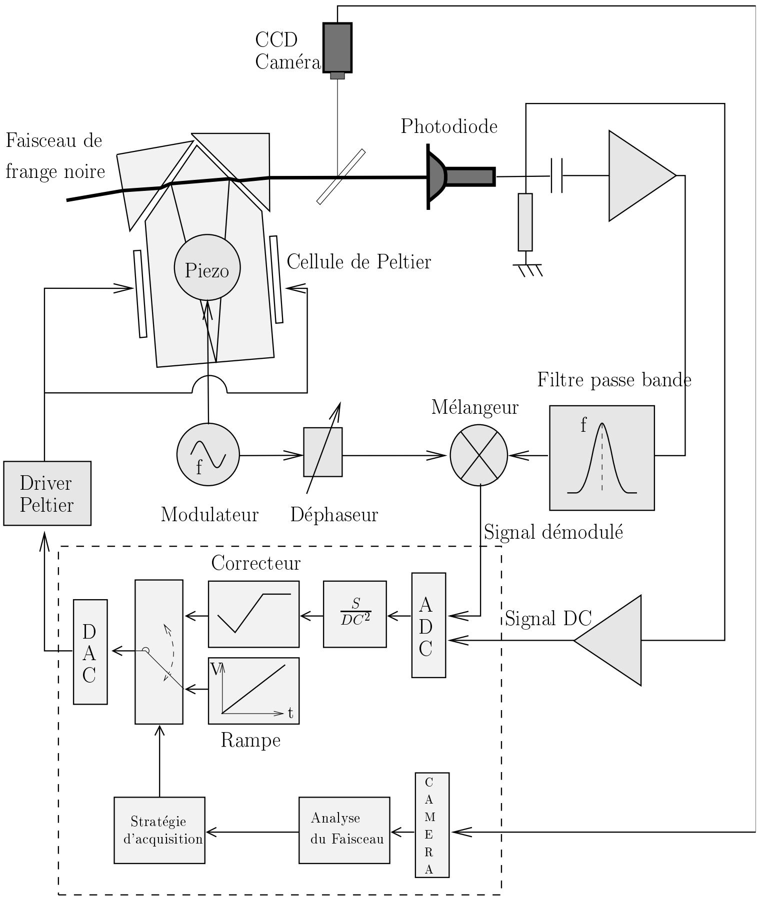


Figure 5.26: Système d'accrochage de la résonance sur un faisceau de frange noire. Le profil du faisceau est mesuré avec une caméra CCD et analysé pour identifier le mode fondamental du faisceau.

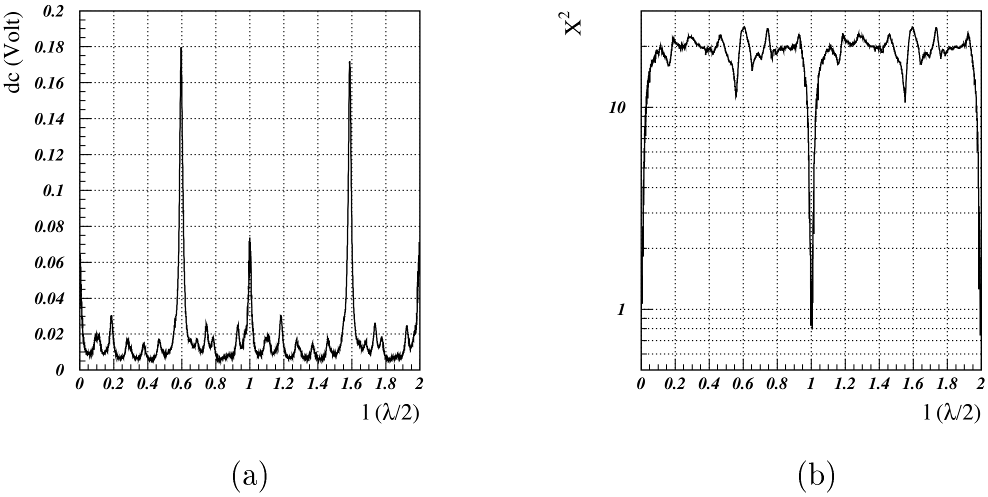


Figure 5.27: Puissance transmise (a) et valeur du χ^2 (b) en fonction de la longueur de la cavité

- La température de la cavité est augmentée jusqu'à $t = t_0$.

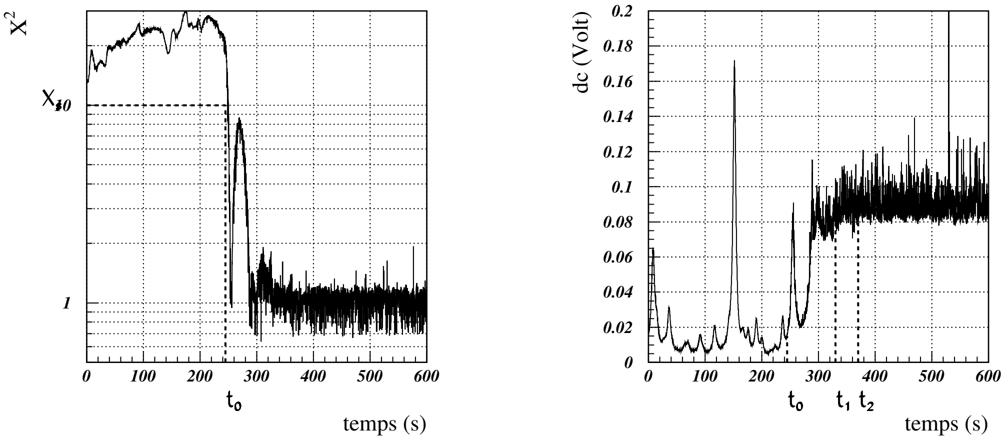
- à $t = t_0$, $\chi^2 < \chi_s^2$, le signal envoyé sur les Peltier est la commande calculée à partir du signal linéarisé et du correcteur C.

- à $t = t_1$, la température de la cavité est stabilisée mais n'est pas exactement sur la résonance. On passe du correcteur C au correcteur avec intégrateur C'.

- à $t = t_2$, la cavité est stabilisée sur la résonance du TEM_{00}.

La puissance transmise par la cavité lorsqu'elle est asservie sur le mode fondamental est très bruitée (figure 5.28). Cela vient du bruit sur la longueur relative des deux bras de l'interféromètre auquel seul le mode fondamental est sensible car ce mode est asservi sur la frange noire de l'interféromètre.

Cette procédure permet donc d'asservir la cavité sur le mode fondamental avec un faisceau de frange noire, c'est-à-dire dans des conditions très proches de celles de VIRGO. Cet accrochage est réalisé de façon automatique en quelques minutes grâce à l'utilisation d'une caméra.



(a) (b)

Figure 5.28: Accrochage de la résonance de la cavité sur le mode fondamental

5.4 Bruit à haute fréquence de la cavité

5.4.1 Spécification

Comme les bandes latérales sont transmises dans la même résonance que la porteuse, une variation de la longueur de la cavité produit un signal à la fréquence de modulation.

A haute fréquence (100 Hz), les mouvements de la cavité peuvent donc être interprétés comme un signal d'onde gravitationnel. Le signal à la fréquence de modulation créé par une variation de longueur de la cavité est [25]:

$$P_\Omega(\delta l_{mc}) \;=\; 4\sqrt{\frac{1-C}{2}}P_0 J_0(m)J_1(m)\sqrt{RT}\frac{2F_{mc}}{\pi}\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{f_{mod}}{\Delta f}\right)^2 \delta l_{mc}$$

où Δf est la bande passante du mode cleaner :

$$\Delta f \;=\; \frac{c}{2l}\frac{1}{2\pi F_{mc}}$$

Le signal produit par une onde gravitationnelle d'amplitude h est donné par 2.20 :

$$P_\Omega \;=\; 4P_0 J_0(m)J_1(m)\sqrt{RT}\frac{2F_{FP}}{\pi}\frac{2\pi}{\lambda}L_{FP}h$$

Pour que le signal produit par une variation de longueur de la cavité ∂l_{mc} soit plus petit que le signal produit par une onde gravitationnelle d'amplitude h, on doit avoir :

$$\partial l_{mc} \;<\; \frac{F_{FP}}{F_{mc}}\sqrt{\frac{2}{1-C}}\left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega}\right)^2 hL$$

soit avec :

$$
\begin{aligned}
L_{FP} &= 3000 \text{ m} \\
F_{FP} &= 50 \\
F_{mc} &= 50 \\
f_{mod} &= 6.27 \text{ MHz} \\
l &= 4 \text{ cm} \\
1 - C &= 10^{-4} \\
h &= 3\ 10^{-23}\ /\sqrt{\text{Hz}}
\end{aligned}
$$

on doit avoir,

$$\delta l_{mc} \quad < \quad 1.4\ 10^{-15} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

Ces mouvements peuvent être créés par des vibrations sismiques ou par du bruit acoustique qui sont en principe atténués par la suspension et la mise sous vide du banc de détection. Mais le bruit thermique peut aussi faire vibrer la cavité. Cependant, les effets dissipatifs de la cavité et de son support sont difficiles à estimer, seul une mesure directe du bruit en longueur à haute fréquence peut donner une réponse définitive.

5.4.2 Mesure du bruit à haute fréquence

Pour faire cette mesure, le laser doit avoir un bruit en fréquence suffisamment faible :

$$
\begin{aligned}
\delta\nu &< \nu \frac{\delta l_{mc}}{l_{mc}} \\
&< 10 \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}
\end{aligned}
$$

Le laboratoire de l'INFN de Pise a mis en place un laser stabilisé sur une cavité de référence. Ils nous ont proposé de l'utiliser pour mesurer le bruit en longueur de la cavité “mode cleaner” (figure 5.29).

Le faisceau est modulé à 12.5 MHz pour asservir le laser sur la cavité de référence. La puissance disponible pour la mesure est d'environ 100 mW. Une photodiode permet de mesurer la puissance refléchie par la cavité (cette mesure est faites en réflexion pour minimiser le bruit de photon). L'électronique de la photodiode permet de mesurer la puissance continue du faisceau et de démoduler sa puissance à la fréquence de modulation (12.5 MHz). La figure 5.30 montre la puissance mesurée sur la voie continue et sur la voie démodulée en sortie de l'électronique lorsque la cavité traverse une résonance.

La puissance réfléchie par la cavité lorsqu'elle est résonante est de 23 mW. On voit que le couplage de la cavité n'est pas très élevé (75 %). Malheureusement, le faisceau

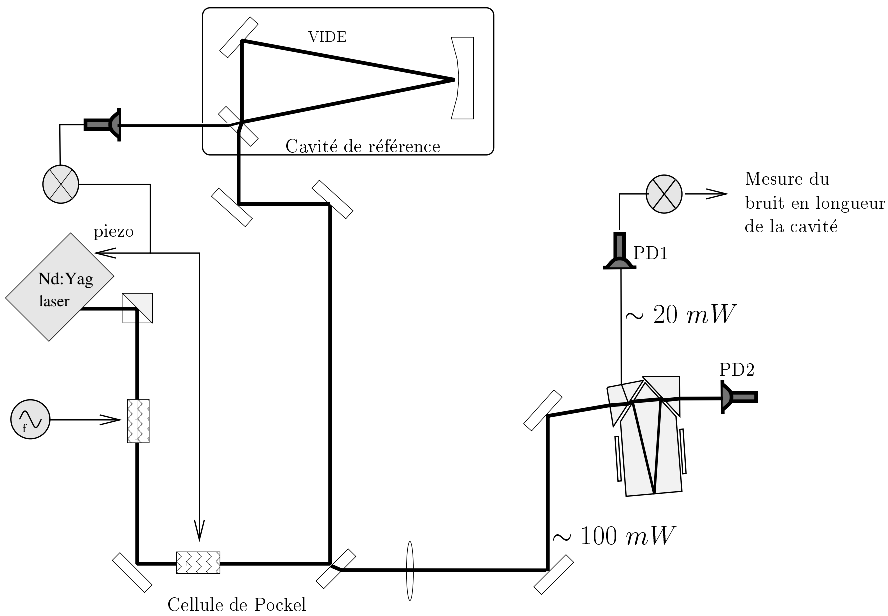


Figure 5.29: Sytème expérimental utilisé pour mesurer le bruit en longueur de la cavité Mode Cleaner. Le laser est stabilisé en fréquence sur la cavité de référence (laboratoire de l'INFN de Pise).

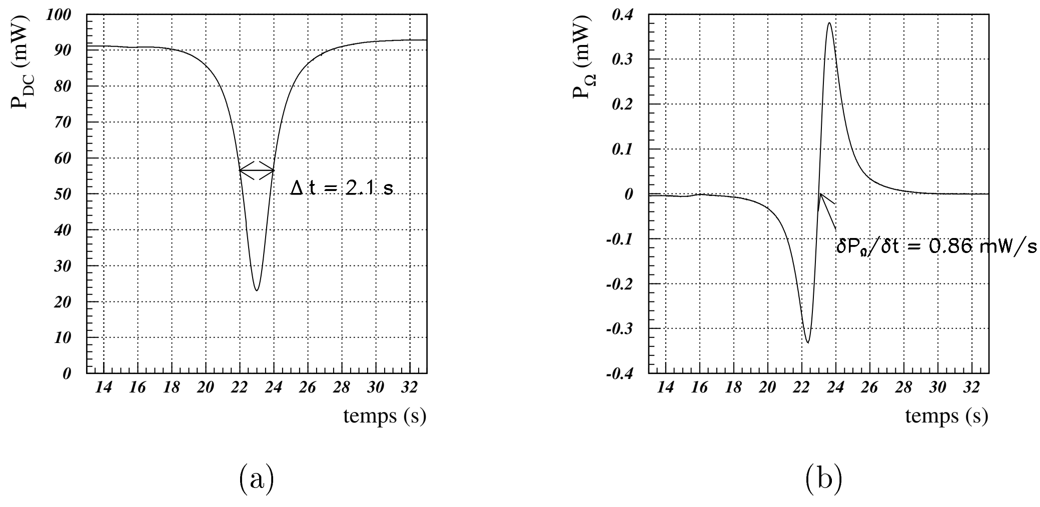


Figure 5.30: Puissance continue et puissance démodulée réfléchie par la cavité en fonction du temps.

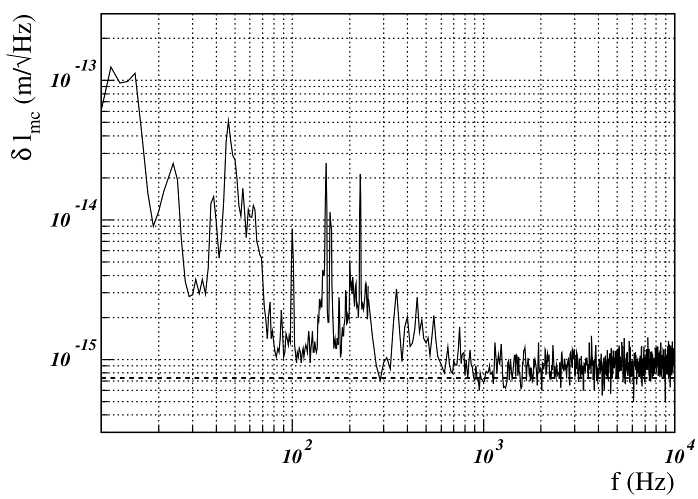


Figure 5.31: Bruit en longueur mesuré sur le faisceau réfléchi par la cavité. Le trait pointillé représente la contribution du bruit de photon.

incident n'étant pas circulaire, il n'a pas été possible d'améliorer l'adaptation de la cavité au faisceau. Le bruit de photon est donc (équation 2.1):

$$P_\Omega^{sn} = 1.4\ 10^{-10}\ \mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

La mesure simultanée de la puissance continue et de la puissance démodulée permet de calibrer la réponse de la voie démodulée a une variation de longueur de la cavité. En effet, la largeur à mi-hauteur de la résonance correspond à une variation de longueur de $\frac{\lambda}{100}$. La réponse de la voie démodulée lorsque la cavité est résonante est donc (figure 5.30):

$$\frac{\delta P_\Omega}{\delta l} = 1.9\ 10^5\ \mathrm{W/m}$$

La cavité est ensuite asservie thermiquement sur la résonance. La mesure du bruit en sortie est présentée sur la figure 5.31. Dans la zone à basse fréquence, le bruit et les résonances viennent probablement du bruit acoustique et sismique agissant sur la fréquence du laser. A partir de 1 kHz, la mesure est dominée par le bruit de photon qui correspond à :

$$\begin{aligned}\delta l_{mc}^{sn} &= P_\Omega^{sn} / \frac{\delta P_\Omega}{\delta l} \\ &= 7.4\ 10^{-16}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\end{aligned}$$

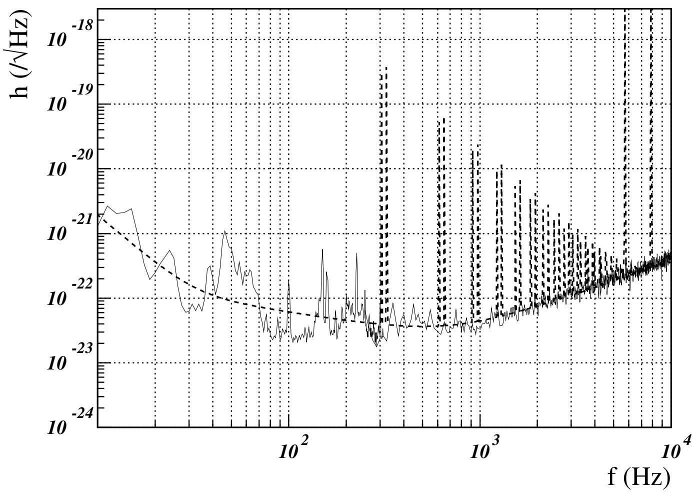


Figure 5.32: Bruit du faisceau réfléchi par la cavité converti en amplitude d'onde gravitationnelle et courbe de sensibilité de VIRGO.

La figure 5.32 représente le bruit en longueur de la cavité en unité d'amplitude d'ondes gravitationnelles et la courbe de sensibilité de VIRGO : le bruit de photon de notre mesure correspond à celui attendu de VIRGO.

Ce résultat ne permet pas de conclure définitivement bien qu'il soit encourageant. Une nouvelle manipulation est en cours d'installation au LAPP pour faire cette mesure avec une meilleure sensibilité.

5.5 Conclusion

Les tests optiques montre que le faisceau est bien adapté à la cavité grâce aux prismes placés sur les face d'entrée et de sortie du mode cleaner.

Un interféromètre a été mis en place pour tester le filtrage d'un faisceau de frange noire avec la cavité mode cleaner. La cavité permet bien d'éliminer la contribution des modes d'ordre supérieur dans le défaut de contraste tout en transmettant le signal produit par une variation de la longueur des bras.

Le système de contrôle de la cavité permet d'acquérir la résonance du mode fondamental de façon automatique. L'utilisation d'une caméra permet de réaliser cet accrochage sur un faisceau de frange noire.

Chapitre 6

Photodiode et électronique analogique

Le rôle central du système de détection est la mesure des puissances lumineuses des faisceaux sortant de l'interféromètre.

Le signal principal, utilisé pour la détection des ondes gravitationnelles, est amené par le faisceau de frange noire. Mais les autres faisceaux émergeant de l'interféromètre doivent aussi être détectés. Ils servent soit pour le contrôle en ligne de l'interféromètre, soit pour son monitoring, c'est à dire pour la compréhension de l'état de fonctionnement de l'interféromètre.

Au niveau de la tour de détection, quatre faisceaux sortent du banc suspendu (figure 3.6), le faisceau provenant de la réflexion sur la séparatrice, le faisceau de frange noire avant mode cleaner et le faisceau transmis et le faisceau réfléchi par le mode cleaner. Trois autres faisceaux sortent de l'interféromètre ; le faisceau réfléchi par la cavité de recyclage que l'on détecte au niveau du banc d'injection et les faisceaux transmis par les deux Fabry-Perot qui sont détectés au bout des bras.

La puissance de ces faisceaux est mesurée grâce à des photodiodes. Au niveau du faisceau de frange noire, c'est le signal à la fréquence de modulation qui porte l'information sur la différence de longueur entre les deux bras de l'interféromètre. Le signal électrique créé au niveau de chaque photodiode doit donc être démodulé pour le ramener à basse fréquence, puis numérisé.

Le système de lecture présenté dans ce chapitre est étudié pour correspondre aux spécifications de la lecture du faisceau de frange noire, c'est-à-dire du faisceau transmis par le mode cleaner. Comme les spécifications sur la lecture de ce faisceau sont les plus exigeantes, les autres signaux pourront être mesurés avec le même système (mis à part le nombre de photodiodes).

6.1 Puissance et dynamique du signal

Pour spécifier le système de lecture de la puissance du faisceau de frange noire, on doit connaître sa puissance incidente. Le champ transmis par le mode cleaner peut s'écrire :

$$A = \left(A_0 + A_+ e^{i\Omega t} + A_- e^{-i\Omega t}\right) e^{i\omega t}$$

L'interféromètre étant réglé sur la frange noire, à un terme de phase près, les champs sont donnés par (Chapitre 2):

$$\begin{aligned} A_0 &= \sqrt{R P_0 \frac{1-C}{2} J_0(m)} \\ A_+ &= \sqrt{P_0 T} J_1(m) e^{i\phi_\Omega} \\ &= -\overline{A}_- \end{aligned}$$

où C est le contraste après mode cleaner, R le facteur de recyclage et T le facteur de transmission des bandes latérales. La phase ϕ_Ω dépend de la distance entre le modulateur et le détecteur. La puissance mesurée par une photodiode est donc une superposition d'une composante continue, d'une composante à la fréquence de modulation et à la fréquence double :

$$P = P_{DC} + P_\Omega \cos(\Omega t + \phi_\Omega) + P_{2\Omega} \cos(2\Omega t + 2\phi_\Omega)$$

6.1.1 Puissance continue

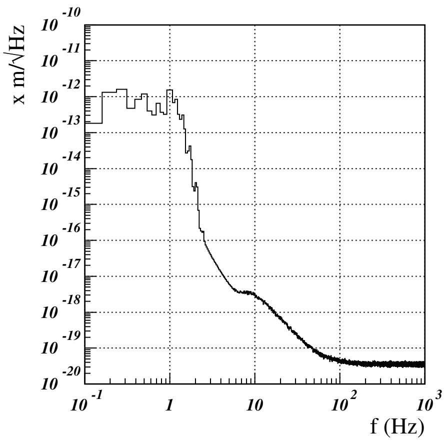
La puissance continue sur la frange noire est donnée par :

$$P_{DC} = P_0 \left(\frac{1-C}{2} R J_0^2(m) + 2T J_1^2(m)\right)$$

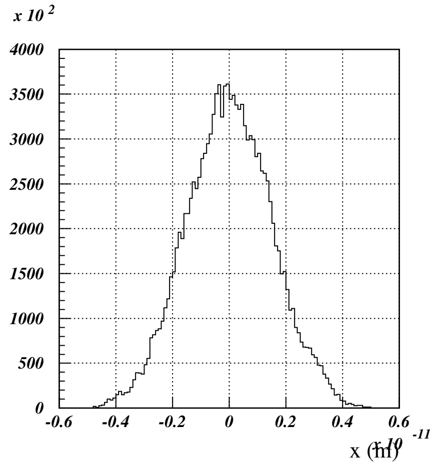
Pour quantifier les puissances attendues, on prend les valeurs numériques obtenues au chapitre 4 avec la configuration $\lambda/100$) :

$$\begin{aligned} P_0 &= 20 \text{ W} \\ R &= 80 \\ 1-C &= 1.6\ 10^{-4} \\ m &= 0.65 \\ T &= 0.1 \end{aligned} \tag{6.1}$$

La puissance continue est alors $P_{DC} = 450$ mW.



(a)



(b)

Figure 6.1: Densité spectrale de bruit (a) et distribution (b) de ΔL_- selon l'axe du faisceau en boucle fermée (miroirs contrôlés grâce aux marionnettes)

6.1.2 Puissance à la fréquence de modulation

Le signal à la fréquence de modulation a une moyenne nulle, mais a par construction une grande sensibilité à la différence de longueur entre les deux bras des Fabry-Perot $L_- = L_2 - L_1$. La réponse (à basse fréquence) est donnée par :

$$\frac{\partial P_\Omega}{\partial L_-} = 4P_0\sqrt{R}J_0(m)\sqrt{T}J_1(m)\frac{2F}{\pi}\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{W/m.} \tag{6.2}$$

Le contrôle global de l'interféromètre permet d'asservir la différence de longueur L_-. Pour estimer l'amplitude des mouvements résiduels, on simule avec SIESTA l'ensemble de l'atténuateur sismique contrôlé grâce aux marionnettes (voir chapitre 3.3). Dans cette simulation, seuls le bruit sismique, le bruit thermique pendulaire et le bruit de photon sont pris en compte.

La figure 6.1 représente la densité spectrale de ΔL_- en boucle fermée. La distribution du mouvement est une Gaussienne, sa puissance rms est $\Delta L_{-rms} \simeq 1.5\ 10^{-12}$ m. L'essentiel de cette puissance est à des fréquences en dessous de quelques hertzs autour des fréquences de résonances de l'atténuateur sismique.

$$P_\Omega^{rms} = 4P_0\sqrt{R}J_0(m)\sqrt{T}J_1(m)\frac{2F}{\pi}\frac{2\pi}{\lambda}L_-^{rms}$$

ce qui donne avec (6.1) une puissance $P_\Omega^{rms} \simeq 20$ mW.

Pour limiter l'écrêtement du signal, la voie AC du système de lecture doit pouvoir gérer des signaux d'amplitude maximale $5P_\Omega^{rms}$ et donc avoir une dynamique de [-$5P_\Omega^{rms}$, $5P_\Omega^{rms}$].

A partir de 100 Hz, le signal est dominé par le bruit de photon, c'est la zone de sensibilité maximale de l'interféromètre :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\Omega(100\text{Hz}) &= \sqrt{2\frac{h\nu}{\eta}P_{DC}} \\ &= 4\ 10^{-10}\ \text{W}/\sqrt{\text{Hz}}\end{aligned}$$

Pour ne pas dégrader la sensibilité de plus 2 %, le bruit du système de lecture doit être de l'ordre d'un cinquième du bruit de photon. La dynamique (rapport entre le signal maximum et le bruit) du système de lecture du signal à la fréquence de modulation doit donc être de :

$$\frac{5P_\Omega^{rms}}{\frac{1}{5}\tilde{P}_\Omega(100\text{Hz})} \simeq 10^9\ \sqrt{\text{Hz}}$$

6.1.3 Puissance à la fréquence double

Le signal à deux fois la fréquence de modulation est lui donné par :

$$\begin{aligned}P_{2\Omega} &= 2P_0TJ_1^2(m) \\ &= 380\ \text{mW}\end{aligned}$$

Les signaux utiles sont la puissance continue et le signal à la fréquence de modulation. Après séparation du signal entre sa composante continue (DC) et sa composante alternative (AC), le signal à deux fois la fréquence de modulation est 20 fois plus important que la puissance rms du signal à la fréquence de modulation. Il faudra donc filtrer la composante à 2Ω pour qu'elle ne sature pas la dynamique de la voie AC.

6.2 Détection de la puissance des faisceaux

6.2.1 Principe de détection

Pour mesurer la puissance lumineuse des faisceaux, on utilise des photodiodes car ces détecteurs ont une bande passante supérieure à la fréquence de modulation du faisceau.

Le principe de fonctionnement d'une photodiode est celui d'une jonction PIN. S'il a une énergie suffisante, un photon incident peut générer une paire électron-trou. Une tension inverse appelée V_{Bias} est appliquée pour que les paires électron-trou générées par un photon dérivent et ne se recombinent pas. La zone où le champ électrique est suffisant pour éviter les recombinaisons est appelée la zone de déplétion. Une tension inverse de quelques volts permet d'étendre la zone de déplétion à l'ensemble de la couche active.

L'efficacité quantique du détecteur est le nombre de paire électron-trou généré par photon incident :

$$\eta = \frac{n_e}{n_\gamma}$$

La réponse de la photodiode en terme de courant produit par unité de puissance incidente est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{I}{P} = \frac{e n_e}{h\nu n_\gamma} \\ &= \frac{\lambda(\mu m)}{1.24}\eta \text{ A/W} \end{aligned}$$

où λ est la longueur d'onde du faisceau lumineux.

Avec une puissance incidente de quelques mwatts sur la photodiode, le bruit dominant est le bruit de photon dont la densité spectrale de puissance est donnée par :

$$I_{sn} = \sqrt{2eI} \text{ A}/\sqrt{\text{Hz}}$$

où I est le courant généré par la puissance incidente.

Comme le signal est proportionnel à l'efficacité quantique η et le bruit à $\sqrt{\eta}$, le rapport signal sur bruit est proportionnel à $\sqrt{\eta}$. On doit donc sélectionner des photodiodes ayant une grande efficacité.

La bande passante d'une photodiode est limitée par deux effets :

- le temps de transit des porteurs de charge dans la jonction.
- la capacité parasite de la jonction.

Plus la zone de déplétion est grande, plus le temps de transit est grand mais plus la capacité est faible. Pour optimiser la bande passante de la photodiode, on doit donc chercher un compromis entre ces deux effets.

La puissance que peut détecter une photodiode est limitée par le nombre de paires électron-trou que peut générer la photodiode par unité de surface active. Avec des photodiodes ayant une surface active plus grande, on peut détecter la puissance d'un faisceau ayant un waist plus large et donc une densité de puissance plus faible, on augmente ainsi la linéarité de la réponse. Mais en augmentant la surface active, on augmente aussi la capacité parasite de la photodiode, ce qui diminue sa bande passante. On doit là aussi trouver un compromis entre le nombre de photodiodes utilisées pour détecter le signal et la bande passante des photodiodes.

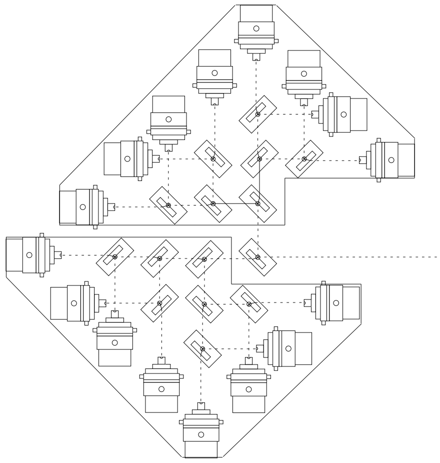


Figure 6.2: Système de lecture du faisceau de frange noire, pour gérer la puissance incidente (1 W) on divise le faisceau en 16 grâce à un réseau de séparatrices.

6.2.2 Photodiodes "VIRGO"

Les photodiodes sélectionnées [25] sont des photodiodes de type InGaAs de diamètre 3 mm fabriquées par la firme HAMAMATSU. Leur efficacité quantique est d'environ 90 %. La réponse de la photodiode est donc :

$$\mathcal{R} \;=\; 0.77 \text{ A/W}$$

Avec un faisceau de waist 1 mm et une polarisation inverse V_{Bias} de 10 Volt, leur réponse est linéaire jusqu'à 100 mW incident et la capacité parasite est de 300 pF. Pour gérer le puissance continue et la puissance au double de la fréquence de modulation du faisceau de frange noire (environ un watt), on doit donc diviser ce faisceau. Pour travailler en dessous de la puissance maximale acceptable des photodiodes, on divise le faisceau en 16 grâce à un réseau de séparatrices (figure 6.2).

La puissance continue et la puissance à la fréquence de modulation est donc divisée par 16, mais le bruit de photon est proportionnel à la racine carrée de la puissance continue et est donc divisé par 4. On somme donc le bruit de photon et le bruit de l'électronique quadratiquement. Pour ne pas dégrader la sensibilité, il faut que le bruit de chaque électronique soit inférieur à $\frac{1}{5}$ du bruit de photon créé au niveau de chaque photodiode. La dynamique du signal sur chaque photodiode est donc divisée par 4.

Le courant prévu par photodiode est :

$$
\begin{aligned}
I_{DC} &= \mathcal{R}\frac{P_{DC}}{16} \\
&= 20 \text{ mA} \\
I_{\Omega}^{rms} &= \mathcal{R}\frac{P_{\Omega}^{rms}}{16} \\
&= 1. \text{ mA} \\
\tilde{I}_{\Omega}(100 \text{ Hz}) &= \sqrt{2eI_{DC}} \\
&= 1\ 10^{-10}\ \text{A}/\sqrt{\text{Hz}} \\
I_{2\Omega} &= 19 \text{ mA}
\end{aligned}
$$

Pour mesurer le courant produit dans chaque détecteur, on a une électronique par photodiode. Une partie de cette électronique est fixée à la photodiode (pré-amplification). Le reste de l'électronique (démodulation, mise en forme des signaux, génération du V_{Bias}) est regroupé sur une carte électronique placée dans un châssis situé à quelques mètres des pré-amplificateurs.

6.3 Pré-amplification du signal

La fonction du pré-amplificateur est essentiellement la conversion courant-tension. Il est placé juste derrière la photodiode pour éviter les problèmes d'adaptation d'un câble.

Le signal est séparé entre la partie DC et la partie AC. Pour filtrer le signal à la fréquence double de modulation (partie AC), on utilise un Notch qui donne une atténuation de 60 dB par rapport au signal à la fréquence de modulation. Les résistances équivalentes du pré-amplificateur (rapport entre la tension en sortie et le courant généré dans la photodiode) sont :

$$
\begin{aligned}
R_{AC}(\Omega) &= 200 \text{ Ohm} \\
R_{AC}(2\Omega) &= 0.2 \text{ Ohm}
\end{aligned}
$$

Les signaux DC et AC sont ensuite récupérés sur un même câble et envoyés vers l'électronique de démodulation où la partie DC et la partie AC sont à nouveau séparées. Les tensions à l'entrée de la carte de démodulation sont donc :

$$
\begin{aligned}
V_{\Omega}^{rms} &= 0.2 \text{ V} \\
\tilde{V}_{\Omega}(100 \text{ Hz}) &= 20.\ 10^{-9}\ \text{V}/\sqrt{\text{Hz}} \\
V_{2\Omega} &= 4 \text{ mV}
\end{aligned}
$$

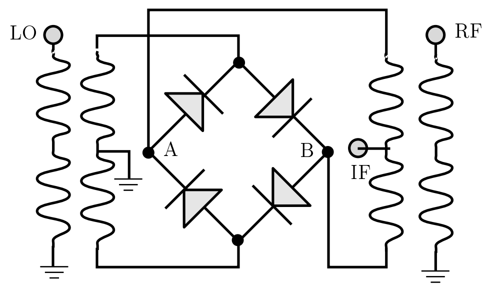


Figure 6.3: Schéma du démodulateur.

La composante à 2Ω est donc suffisamment atténuée pour ne pas saturer la dynamique. La mesure du bruit du pré-amplificateur qui a été réalisée donne :

$$N_{\Omega}(100\ \text{Hz}) \quad = \quad 6.\ 10^{-9}\ \text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$$

On a bien un rapport 5 entre ce bruit et le bruit de photon.

6.4 Démodulation

Le signal doit être adapté à la dynamique du mélangeur. Le mélangeur sélectionné (RAY-1 produit par Mini-Cicuits) [27] fonctionne avec un pont de 4 diodes attaqué par l'oscillateur local (figure 6.3). L'oscillateur local (LO) doit avoir une puissance de 23 dBm, ce qui permet au mélangeur d'être linéaire avec des signaux d'entrée (RF) jusqu'à 1 Volt. Le gain du mélangeur est de 0.7. Le bruit mesuré ramené à l'entrée du mélangeur est de 6 nV/$\sqrt{Hz}$. La dynamique du mélangeur (rapport entre l'amplitude maximale et la densité spectrale de bruit à 100 Hz) est donc de 2. 10^8, elle est juste suffisante pour gérer le signal d'entrée.

$$\begin{aligned} V_{Dem}^{rms} &= 0.14\ \text{V} \\ \tilde{V}_{Dem}(100\ \text{Hz}) &= 14.\ 10^{-9}\ \text{V}/\sqrt{\text{Hz}} \end{aligned}$$

Pour récupérer toute l'information contenue dans le signal porté par les bandes latérales, il faut démoduler le signal en phase et en quadrature. On a donc deux démodulateurs dont les entrées LO sont déphasées de 90°.

6.5 Mise en forme du signal

A la sortie du mélangeur on s'intéresse au signal dans une bande de fréquence comprise entre 0 et quelques kHz. Le signal doit donc être numérisé avec une fréquence d'échantillonage d'environ 20 kHz. Mais avant de numériser ce signal, on doit le mettre en forme pour réduire sa dynamique et éviter le repliement du spectre.

6.5.1 Réduction de la dynamique

Un ADC peut numériser des signaux dans l'intervalle [-A,A], l'échelon de quantification est :

$$q = \frac{2A}{2^N} \text{ V}$$

où N est le nombre de bits. La quantification introduit un bruit blanc dont la densité spectrale est donnée par :

$$N_q = \frac{q}{\sqrt{6F_e}} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}} \tag{6.3}$$

où F_e est la fréquence d'échantillonage. Le rapport entre l'amplitude maximale que l'ADC peut numériser et le bruit de quantification de l'ADC est :

$$\frac{A}{N_q} = 2^{N-1}\sqrt{6F_e}\ \sqrt{\text{Hz}}$$

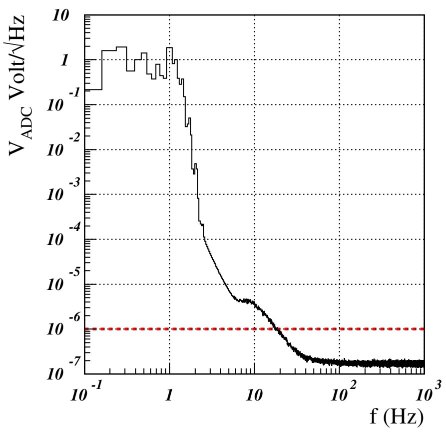
Pour conserver le signal lors de la numérisation, on doit avoir une dynamique suffisante pour gérer les grands signaux et ne pas rajouter de bruit. La dynamique de l'ADC doit donc être la même que celle de l'électronique, soit 2. 10^8 $\sqrt{\text{Hz}}$. Avec une fréquence d'échantillonage de 20 kHz, on doit donc avoir $N > 20$.

Des ADC de plus de 20 bits capables de numériser des signaux à une fréquence de 20 kHz ne se trouvent pas actuellement. Il faut donc réduire la dynamique du signal. On peut le faire car les grands signaux sont concentrés à basse fréquence et les signaux faibles à haute fréquence. Un filtre de type passe-haut permet donc de diminuer la dynamique du signal.

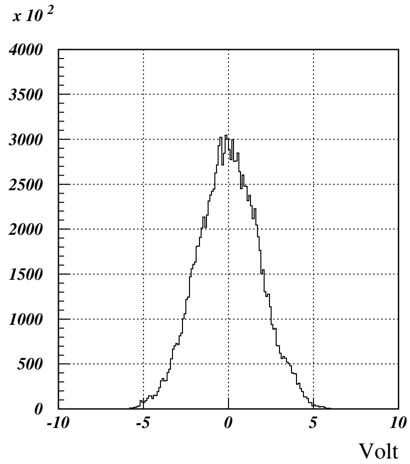
Avec un ADC 16 bits [-10,10] V, le bruit de quantification est :

$$N_q = 1\ 10^{-6} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$$

Le mélangeur a une dynamique de 1 V et un bruit (en sortie) de 5 nV/$\sqrt{\text{HZ}}$. Pour faire cadrer la dynamique du mélangeur avec celle d'un ADC 16 bits, on doit amplifier le signal à basse fréquence d'un facteur 10 et le signal à haute fréquence de plus de 200. Après



(a)



(b)

Figure 6.4: Densité spectrale de bruit (a) et distribution (b) du signal après démodulation et amplification d'un facteur 10. L'amplitude rms du signal (environ 2 Volt) peut être numérisée par un ADC ±10 V. Le trait pointillé représente le niveau de bruit d'un ADC ±10 V (avec 16 bits et une fréquence d'échantillonage de 20 kHz).

avoir amplifié le signal d'un facteur 10 (figure 6.4), on doit appliquer un filtre permettant d'amplifier les signaux à partir de quelque dizaine de Hz d'un facteur 20. Pour ne pas augmenter la dynamique du signal il faut que ce filtre ait un gain de 1 jusqu'à 2 Hz. Un filtre du deuxième ordre ayant deux pôles à $f_1 = 2$ Hz et deux zéro à $f_2 = 12$ Hz correspond à ce gabarit.

$$H_{rd}(p) = \left(\frac{1 + \frac{p}{2\pi f_1}}{1 + \frac{p}{2\pi f_2}} \right)^2 \qquad (6.4)$$

Ces filtres sont réalisés grâce au montage 6.5. On a

$$f_1 = \frac{1}{2\pi RC_1}$$
$$f_2 = \frac{1}{2\pi RC_2}$$

La figure 6.7 montre le spectre et la distribution du signal filtré par H_{rd} (figure 6.6). Le trait pointillé indique le niveau du bruit de quantification attendu avec des ADC 16 bits échantillonnant le signal à 20 kHz. L'ensemble du spectre est donc un facteur 5 au-dessus

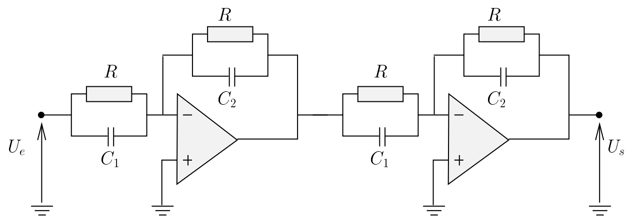


Figure 6.5: Schéma électrique du filtre H_{rd}.

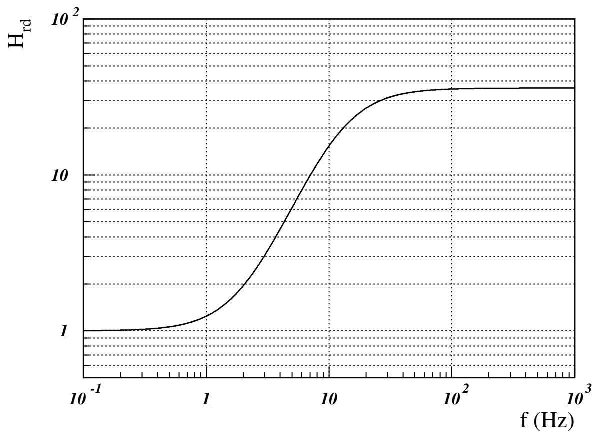
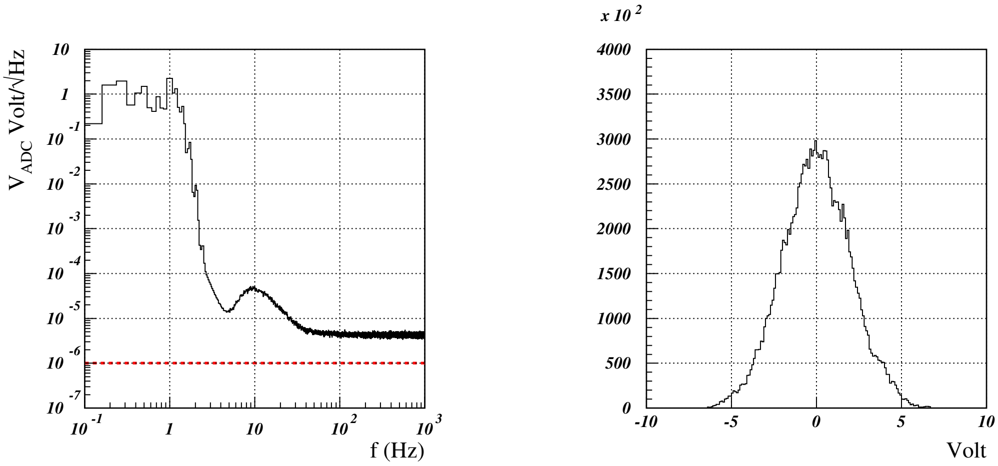


Figure 6.6: Module du filtre utilisé pour réduire la dynamique du signal



(a) (b)

Figure 6.7: Densité spectrale de bruit (a) et distribution (b) du signal après réduction de la dynamique.

du bruit de l'ADC et la dynamique de l'ADC ±10 V est 5 fois plus grande que la puissance rms du signal.

Après la numérisation on devra appliquer au signal le filtre inverse pour redonner toute la dynamique au signal. La numérisation du signal de sortie est simulée ainsi que le filtre inverse H_{rd}^{-1}, la figure 6.8 montre le rapport entre le signal avant l'échantillonage et ce même signal filtré par H_{rd}, puis échantillonné avec un ADC ±10 V de 16 bits à 20 kHz, puis filtrer numériquement par H_{rd}^{-1}. On voit que le signal n'est pas dégradé de plus de 2 % par le système de lecture.

Dans cette simulation, on a supposé que le filtre numérique était exactement le filtre inverse du filtre analogique. Il faudra donc pouvoir mesurer le filtre analogique pour déterminer les coefficients du filtre numérique. Il faut aussi que le filtre analogique soit stable. On utilise donc pour ces filtres des condensateurs à base de diélectrique polycarbonate qui ont entre 20° et 40° une variation :

$$\frac{\Delta C}{C} \sim 0.2\ 10^{-2}/°$$

6.5.2 Filtrage antirepliement

La fréquence d'échantillonage du signal est de 20 kHz. Pour éviter le repliement du spectre autour de la fréquence de Nyquist[1], on doit filtrer les signaux au dessus de 10 kHz. A haute

[1] La fréquence de Nyquist est égale à la moitié de la fréquence d'échantillonage.

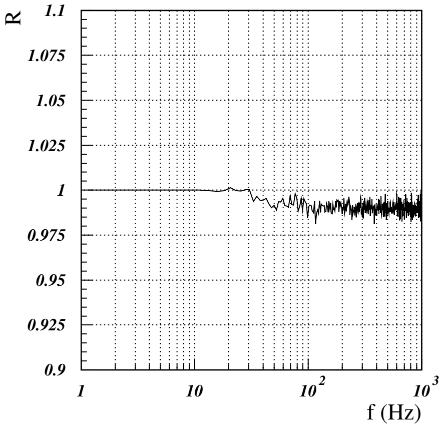


Figure 6.8: rapport entre la densité spectrale du signal avant l'échantillonage et la densité spectrale de ce même signal filtré par H_{rd}, puis échantillonné avec un ADC ±10 V de 16 bits à 20 kHz, puis filtré numériquement par H_{rd}^{-1}

fréquence, le signal est dominé par le bruit thermique associé aux résonances des modes internes des miroirs. Les facteurs de qualité étant très importants, ces résonances sont très fines et ont une grande amplitude. Le filtre antirepliement doit donc filtrer suffisamment ces résonances au-dessus de 10 kHz pour les ramener au niveau du bruit de photon.

Pour évaluer les spécifications requises, on doit calculer l'amplitude de ces résonances par rapport au bruit de photon.

Résonance interne des miroirs

Pour un mode donné, la densité spectrale du bruit de position induit par le bruit thermique est donnée par l'équation 3.4. A la fréquence de résonance f_0, elle s'écrit :

$$\tilde{x}_{Th}^2 = \frac{4k_BTQ}{m(2\pi f_0)^3} \quad \mathrm{m}^2/\mathrm{Hz}. \tag{6.5}$$

où Q est le facteur de qualité de la résonance et m la masse équivalente du mode.

Ne connaissant pas exactement les fréquences de résonance des miroirs de VIRGO au-dessus de 15 kHz, on a choisi de placer une résonance tous les 1500 Hz. La première résonance est à 4700 Hz, le facteur de qualité est de 10^6 pour toutes les résonances et la masse équivalente est de 15 kg pour la première résonance. Il a été montré que la masse effective des modes des miroirs variait en moyenne comme $1/f$, f étant la fréquence de résonances de ce mode [28]. Les masses effectives des modes internes sont donc choisies égales à $15 * 4700/f$ kg.

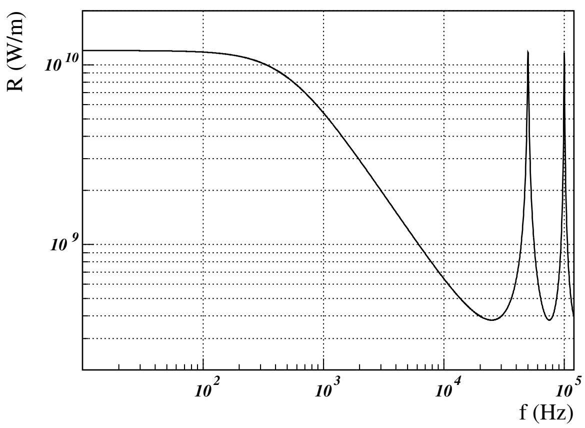


Figure 6.9: Réponse de l'interféromètre à un mouvement du miroir.

A basse fréquence, la réponse de l'interféromètre est donnée par (6.2) mais à partir de quelques centaines de Hz, on doit prendre en compte le filtrage du signal par la cavité Fabry-Perot (équation 2.12). La réponse de l'interféromètre en fonction de la fréquence du mouvement d'un des miroirs du Fabry-Perot est donnée par (figure 6.9):

$$\tilde{P}_{\Omega} = 4P_0\sqrt{R}J_0(m)\sqrt{T}J_1(m)\frac{2F}{\pi}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2F}{\pi}\right)^2\sin^2(2\pi f\frac{L}{c})}}\tilde{\Delta L}_-$$

A basse fréquence (en dessous de quelques kHz) les cavités Fabry-Perot se comportent comme des passe-bas. Par contre, aux fréquences multiples de 50 kHz, le gain est égal au gain à basse fréquence.

La figure 6.10 représente la puissance spectrale calculée à partir du bruit de photon et du bruit thermique des miroirs. A basse fréquence, le bruit de photon est dominant. A partir de quelques kHz, les pics de résonance des modes internes des miroirs dépassent le niveau du bruit de photon.

Repliement

La fréquence d'échantillonage du système d'acquisition est de 20 kHz. Le repliement a donc lieu autour de 10 kHz, un mouvement du miroir à 19.8 kHz ou à 20.2 kHz est donc ramené à 200 Hz après échantillonnage.

La figure 6.11 représente la puissance spectrale calculée après numérisation si aucun filtrage antirepliement n'est effectué. Le pic à 100 Hz vient d'une résonance à 20100 Hz et le pic à 200 Hz vient d'une résonance à 100200 Hz.

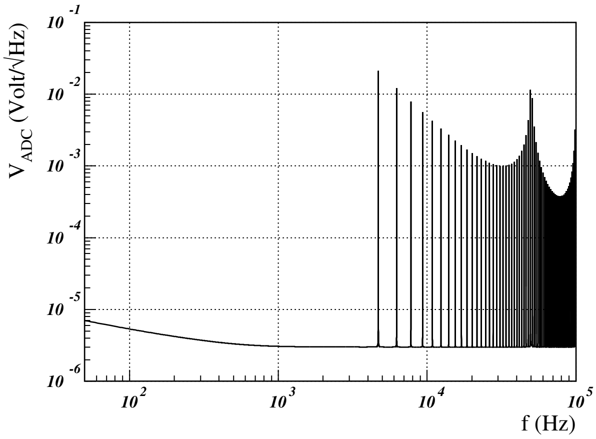


Figure 6.10: Puissance spectrale du signal de frange noire avant numérisation.

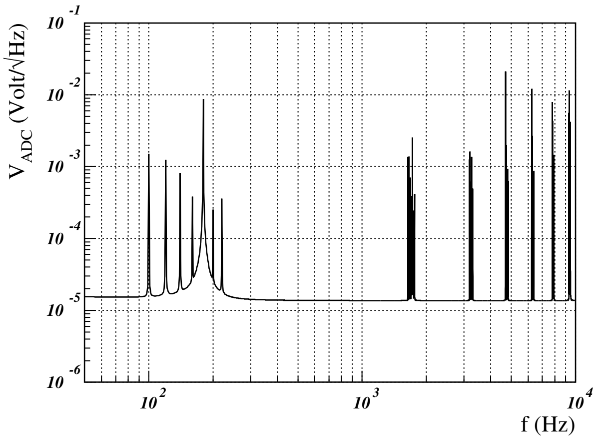


Figure 6.11: Densité spectrale du signal après la numérisation sans filtrage antirepliement.

Le but du filtrage avant la numérisation est donc de filtrer les composantes au-dessus de 10 kHz. Les résonances internes des miroirs au-dessus de 10kHz, du fait de leur très grand facteur de qualité sont 4 ordres de grandeur au-dessus du bruit de photon à 100 Hz. La zone de sensibilité maximale de VIRGO étant entre 50 et 500 Hz, on s'intéressera donc tout particulièrement à l'atténuation obtenue dans les bandes de fréquence $[19500, 20500]$, $[39500, 40500]$ ...

D'après la figure 6.9, on voit que la réponse des cavités à un mouvement des miroirs dépend de la fréquence. A basse fréquence et aux fréquences multiples de 50kHz, la réponse de l'ITF et de l'ensemble de l'électronique d'une photodiode est au-dessus de 100 Hz de $2.\ 10^{13}$ V/m. Autour de 20 kHz, la réponse est atténuée de 30 dB par la cavité Fabry-Perot, on a donc une réponse de $6.3\ 10^{11}$ V/m.

Pour éviter que la sensibilité à 100 Hz soit dégradée par une résonance à 20 kHz, on a besoin de 60 dB d'atténuation à 20 kHz. De même à 100 kHz, on a besoin d'environ 70 dB d'atténuation.

Filtre antirepliement

On veut donc 60 dB d'atténuation à 20 kHz tout en préservant la bande passante jusqu'à quelques kHz. Ainsi, si on prend un filtre de Butterworth, son gain est donné par

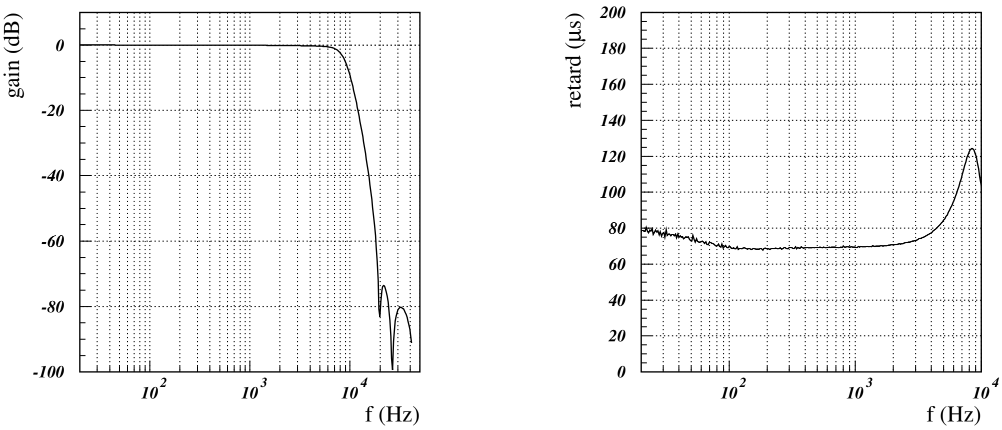
$$G(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^n}$$

si $f_0 = 6$ kHz, alors

$$G(20\text{kHz}) < 10^{-3} \quad \Rightarrow n > 5.8$$

Le filtre antirepliement envisagé est un filtre du septième ordre, il s'agit d'un filtre de Butterworth auquel on a ajouté trois notchs pour augmenter la coupure. A haute fréquence, il se comporte donc comme un filtre du premier ordre. Un filtre de ce type a été développé au laboratoire de Pise, on a donc décidé de reprendre l'architecture de ce circuit et de modifier les valeurs des composants pour adapter la fréquence de coupure. De plus on a choisi d'imposer qu'un des notchs soit centré sur 20 kHz. Ceci permet d'avoir une très grande réjection dans la bande [19700 Hz,20300 Hz].

Deux filtres ont été réalisés, le premier coupe à 8 kHz (-3 dB a 8.3 kHz). Le premier notch est à 20 kHz (80 dB d'atténuation) (figure 6.12). Le retard introduit par ce filtre est assez important ($\simeq 70\ \mu$s)(figure 6.12).



(a) (b)

Figure 6.12: Mesure du gain (figure (a)) et retard (figure (b)) du filtre 1 . Ce filtre a une bande passante de 8 kHz et introduit un retard d'environ 70 μs.

Dans le deuxième filtre, c'est le deuxième notch qui est placé à 20 kHz. La bande passante de ce filtre est donc légèrement plus petite (-3 dB à 6.7 kHz) et il introduit plus de retard ($\simeq$ 90 μs) (voir figure 6.13) mais permet une meilleure atténuation à 20 kHz (90 dB d'atténuation).

A partir des caractéristiques mesurées des deux filtres, la puissance spectrale après numérisation a été calculée (figures 6.14 et 6.15).

Les spectres obtenus sont similaires, les deux filtres antirepliements permettent bien d'éliminer les résonances à haute fréquence. On a donc retenu le filtre introduisant le moins de retard, c'est-à-dire le filtre 1. Le retard introduit ($\simeq$ 70 μs) reste important, il correspond à un peu moins d'un cycle à 10 kHz (fréquence de la boucle d'asservissement de l'ITF).

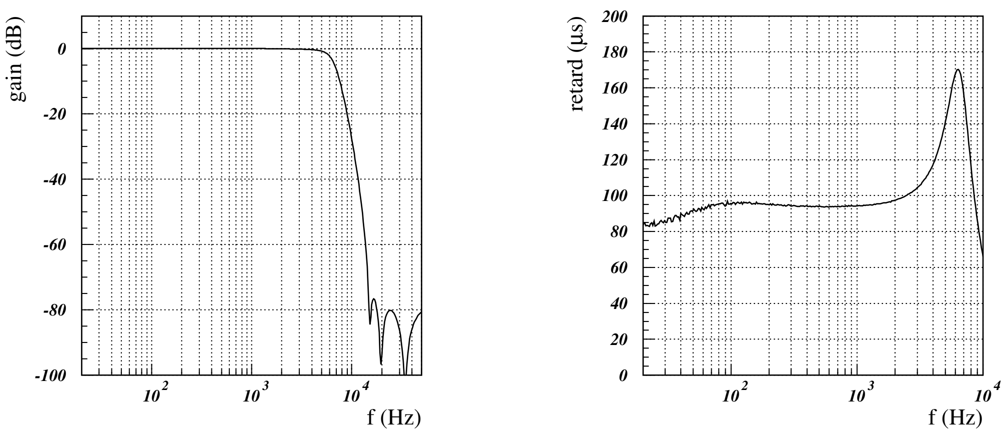


Figure 6.13: Mesure du gain (figure (a)) et retard (figure (b)) du filtre 2 . Ce filtre a une bande passante de 7 kHz et introduit un retard d'environ 90 μs.

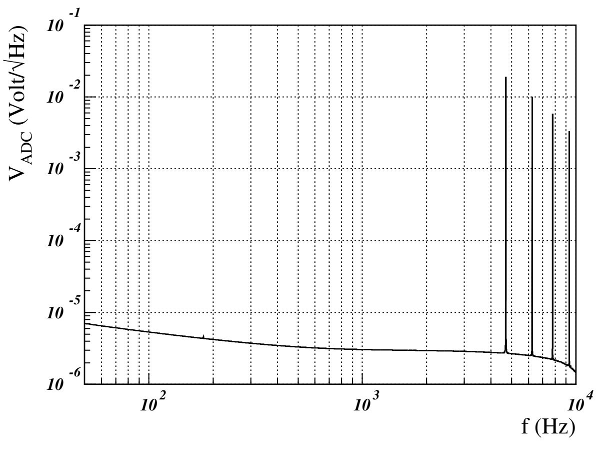


Figure 6.14: Densité spectrale de la puissance après filtrage par le filtre 1 et numérisation.

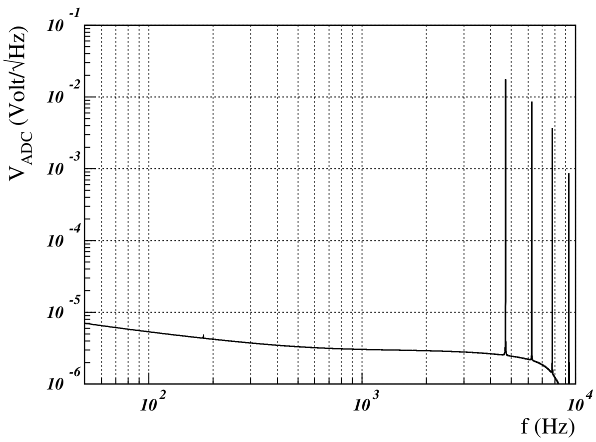


Figure 6.15: Densité spectrale de la puissance après filtrage par le filtre 2 et numérisation.

6.6 Conclusion

Pour gérer la puissance et la dynamique du signal de frange noire, un système de lecture constitué de 16 photodiodes et de 16 électroniques a été mis en place.

Pour chacune des voies de lecture, la puissance du faisceau est démodulée en phase et en quadrature. Les signaux doivent ensuite être numérisés, la dynamique du signal est réduite pour pouvoir utiliser des ADC 16 bits.

Les miroirs de VIRGO ont des résonances internes à haute fréquence qui peuvent se replier a basse fréquence lors de la numérisation du signal Ces résonances sont donc filtrées grâce aux filtres antirepliement.

Chapitre 7

Numérisation des signaux des photodiodes

Les signaux venant de l'électronique des photodiodes doivent être numérisés. Le système d'acquisition de ces signaux doit fournir les données lues aux tâches d'analyse et d'archivage mais aussi au système d'asservissement de l'interféromètre. Ce système d'acquisition doit donc fonctionner en temps réel à une fréquence de 10 kHz.

On doit, à partir de chaque bloc de photodiodes, reconstruire les puissances continues et démodulées de chaque faisceau. Le programme temps réel d'acquisition doit connaître les coefficients à appliquer aux données pour reconstruire l'information contenue dans les faisceaux. Ces coefficients sont déterminés par un programme de calibration spécifique.

Dans ce chapitre, on présente le système de numérisation des signaux et le système de calibration des photodiodes.

7.1 Spécifications

Pour chaque faisceau émergeant de l'interféromètre, un bloc de photodiodes (2^n photodiodes) permet de détecter la puissance du faisceau. Pour chaque photodiode de ce bloc, l'électronique sort trois signaux : la puissance continue et les signaux en "phase" et en "quadrature" du signal à la fréquence de modulation. Ainsi pour le signal de frange noire, le bloc D1 comprend 16 photodiodes, on doit donc numériser 48 signaux.

La dynamique de ces signaux a été réduite grâce au filtre analogique H_{rd} (équation 6.4). Compte tenu de la dispersion des valeurs des capacités utilisées pour réaliser ces filtres, on doit appliquer à chaque signal le filtre inverse du filtre analogique de la voie correspondante. Les paramètres de ce filtre doivent donc avoir été préalablement mesurés.

Un bloc de photodiodes doit être vu par le reste de l'interféromètre comme une photodiode unique. Ainsi on doit corriger les gains respectifs de chaque voie. Des lignes à retard permettent de compenser les retards des voies les une par rapport aux autres. Ces réglages sont réalisés lors de la procédure de calibration d'un bloc. Ces retards relatifs peuvent dériver avec le temps. On donc pouvoir remixer le signal en phase et le signal en quadrature d'une même photodiode pour corriger cette dérive. Il faut ensuite sommer tous ces signaux pour avoir les signaux d'un bloc de photodiodes, c'est-à-dire d'un faisceau.

Ces signaux doivent ensuite être envoyés au système de contrôle de l'interféromètre (`Global Control`[1]) et au système de regroupement et de stockage des données provenant de l'ensemble de l'interféromètre (`Frame Builder`[2])

Le programme qui doit effectuer ces tâches est à l'intérieur de la boucle d'asservissement de l'interféromètre. Il doit donc fonctionner en temps réel. Pour déterminer la fréquence d'exécution de cette tâche, il faut déterminer la fréquence à laquelle les signaux doivent être envoyés au `Global Control`. Ceci dépend de la bande passante de l'asservissement et de sa marge de phase. Les études réalisées [21] montrent qu'il sera possible de maintenir l'interféromètre à son point de fonctionnement avec un gain unité entre 20 et 80 Hz.

Entre la lecture des signaux et l'application de la force sur les différents miroirs de l'ITF, il y a trois systèmes : le premier est le système de lecture, ensuite on a le contrôle global et enfin le contrôle local de chaque suspension. Dans cette rétroaction chaque système introduit un retard égal à un cycle. De plus, les filtres antirepliements des ADC (voir chapitre 6) et des DAC (contrôle des miroirs) introduisent eux aussi un retard d'à peu près un cycle. En envoyant les signaux à 10 kHz (1 cycle = 100 μs), le retard de phase introduit par l'ensemble est de 15 degrés à 80 Hz, ce qui semble suffisant pour assurer le contrôle de l'interféromètre.

Mais pour permettre la recherche d'ondes gravitationnelles jusqu'à quelques kHz, on a besoin d'une bande passante plus grande, les signaux sont donc échantillonnés à 20 kHz.

7.2 Système de Lecture

Le système de lecture repose sur une architecture VME. Le châssis de lecture doit donc comporter :

- Les cartes de convertisseur analogique numérique (ADC).
- Une carte processeur (CPU) pour gérer les périphériques et faire les calculs.

[1]le contrôle global regroupe les signaux provenant des différent faisceaux et reconstruit les longueurs caractéristiques de l'interféromètre. Il calcule donc les déplacements des miroirs à effectuer pour corriger la position et l'envoie à chaque contrôle local de suspension.

[2]Ce système construit à partir de toutes les données un "frame"[29] qui regroupe toute les informations sur une fenêtre de temps d'une durée de l'ordre d'une seconde.

- Deux cartes "DOL" (Digital Optical Link) pour envoyer les données au `Global Control` et au `Frame Builder`.
- Une Carte "TIMING" permettant de synchroniser cette tâche avec les autres et de "dater" les données.

La communication entre ces éléments est faite grâce à un BUS VME. Les carte ADC sont des 4 voies 16 bits fabriquées par la firme ETEP. Parmi les cartes ADC, une carte maître gère les adresses d'accès aux autres cartes ADC (cartes esclaves). Dans un châssis, si l'on a 8 cartes ADC, on aura une carte maître et 7 cartes esclaves ; les huit cartes sont vues par le CPU comme un ADC unique de $4 * 8 = 32$ voies. Cette architecture permet d'accéder aux données de toutes les voies en un seul bloc.

Chaque carte dispose de deux mémoires permettant de stocker les données. La fréquence d'échantillonage est de 20 kHz et la fréquence d'exécution du programme est de 10 kHz ; les échantillons sont donc lus deux par deux. Pour éviter les conflits entre l'écriture et la lecture dans les mémoires de l'ADC, on utilise les deux mémoires alternativement, la fréquence de changement de banc étant la même que la fréquence d'exécution du programme. Ainsi, l'ADC écrit dans une mémoire pendant que le CPU lit dans l'autre les deux données précédentes.

Le CPU est le RIO de la firme CES basé sur un processeur PowerPC 604 cadencé à 300 MHz. Les DOL [30] et la carte TIMING [31] ont été réalisés au LAPP.

7.3 Programme de Lecture

7.3.1 Configuration du programme

L'ensemble des paramètres du programme est donné dans un fichier de configuration qui contient les informations suivantes (tableau 7.1):

- description du général :
  1. adresse de la première carte ADC (carte maître)
  2. adresse de la carte timing
  3. fréquence d'échantillonage
  4. nombre de données lues à chaque interruption
  5. nombre de blocs de photodiodes et pour chaque bloc le nombre de photodiodes.
- Pour chaque canal d'ADC, on a

1. le numéro de la voie d'ADC.
2. nom du bloc auquel appartient la photodiode.
3. numéro de la photodiode
4. type de signal arrivant sur cette voie : DC ACp ACq
5. offset à corriger
6. gain de la voie.
7. pour les voies AC, on a ensuite les coefficients du filtre (a_1, a_2, a_3 et a_4) :

$$H_{rd}^{-1} = \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2}{1 + a_3 p + a_4 p^2}$$

8. pour les voies ACp, le déphasage utilisé pour corriger le mélange entre les voies.

- Les descriptifs des DOL.

7.3.2 Fonctionnement du programme

Le programme d'acquisition `PreadOut` est basé sur une fonction d'interruption activée à 10 kHz. La fonction :

1. lit les mémoires des ADC, c'est-à-dire les deux derniers échantillons de chaque voie.
2. envoie les données au `Frame Builder` (utilisées pour la calibration et le monitoring).
3. enlève les offsets et applique les filtres H_{rd}^{-1} sur chaque signal.
4. corrige les mixages entre le signal en phase et le signal en quadrature de chaque photodiode.
5. somme les résultats pour chaque bloc de photodiodes.
6. envoie au `Global Control` pour chaque bloc de photodiodes la moyenne des deux dernier résultats.
7. envoie au `Frame Builder` pour chaque bloc les deux derniers résultats.

```
ADC216 0x00B00000  0xE8EE2100 20000. 2 3 D1 4 D1p 2 D3 1
31 : D1   1   ACp  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318 0.
32 : D1   1   ACq  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318
3  : D1   1   DC   1.34e-3   3.456
4  : D1   2   ACp  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318 0.
5  : D1   2   ACq  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318
6  : D1   2   DC   1.34e-3   3.456
7  : D1   3   ACp  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318 0.
8  : D1   3   ACq  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318
9  : D1   3   DC  -2.31e-4   1.23
10 : D1   4   ACp  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318 0.
11 : D1   4   ACq  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318
12 : D1   4   DC  -2.31e-4   1.23
/* bloc D1P*/
25 : D1p  17  ACp  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318 0.
26 : D1p  17  ACq  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318
27 : D1p  17  DC  -2.31e-4   1.23
28 : D1p  18  ACp  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318 0.
29 : D1p  18  ACq  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318
30 : D1p  18  DC  -2.31e-4   1.23
/* bloc D3*/
1 :  D3   25  ACp  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318 0.
2 :  D3   25  ACq  3.23e-4   2.34 2.53e-6 3.18e-3 2.53e-2 0.318

DOL fb 5 all
DOL gc 17
```

Tableau 7.1: Exemple de fichier de configuration du programme de lecture des photodiodes.

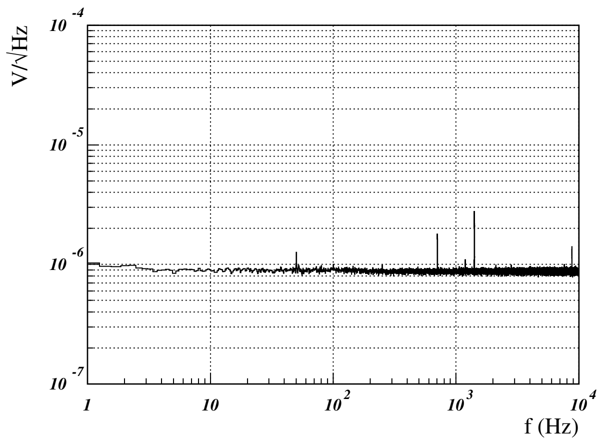


Figure 7.1: Densité spectrale de bruit d'un canal d'ADC.

7.4 Mesure du bruit des ADC

Grâce au programme de lecture des ADC présenté précédemment, on peut mesurer le bruit des ADC, ce qui revient à mesurer le nombre de bits efficaces des ADC. En effet la densité spectrale du bruit de quantification est de (équation 6.3):

$$N_q \quad = \quad \frac{q}{\sqrt{6F_e}} \ \mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

où q est l'échelon de quantification et F_e la fréquence d'échantillonage. Avec des ADC 16 bits ± 10 V et une fréquence d'échantillonage de 20 kHz, on attend un bruit :

$$N_q \quad = \quad 0.9\ \mu\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$$

La figure 7.1 représente le bruit mesuré d'une voie d'ADC qui correspond bien à un ADC de 16 bits.

Le système de lecture est construit à partir de 16 voies de lecture de 16 photodiodes, ce qui permet un gain en dynamique d'un facteur 4 si les bruits des différentes voies ne sont pas corrélés. Pour vérifier que le bruit des ADC ne sont pas corrélés, les signaux venant de seize canaux d'ADC sont sommés. La figure 7.2 représente la densité spectrale du bruit obtenu. Son niveau est un facteur 4 au-dessus de celui d'un seul canal (mais la dynamique du signal est ici de ± 160 V), les bruits des seize canaux d'ADC sont donc bien décorrélés.

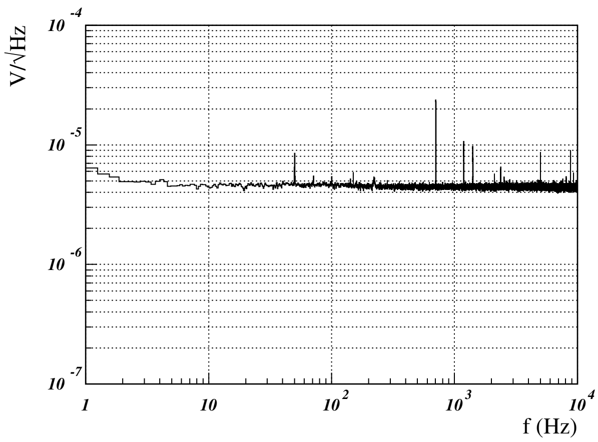


Figure 7.2: Densité spectrale de la somme de 16 canaux d'ADC.

7.5 Calibration de l'ensemble de détection

Chaque faisceau émergeant de l'interféromètre est détecté par un bloc de photodiodes, ces blocs doivent être vus comme un détecteur unique, avec un déphasage global et un gain. Lors de la lecture des données, on corrige les gains relatifs et les retards relatifs de chaque photodiode d'un même bloc les unes par rapport aux autres. Ces paramètres sont données dans le fichier de configuration. Le but du système de calibration est la mesure de ces paramètres. La calibration absolue (mesure de la réponse à une excitation des miroirs du Fabry-Perot) sera fournie par la calibration globale de l'interféromètre.

La calibration d'un bloc de photodiodes comprend la partie optique (transmission et réflectivité des séparatrices utilisées pour diviser le faisceau), la photodiode (efficacité quantique), l'électronique (gain des voies continues, en phase et en quadrature) et du système de lecture. Chaque partie n'est pas calibrée indépendamment mais on veut calibrer l'ensemble.

7.5.1 Installation de calibration

Un bloc de photodiodes est calibré avec le laser auxiliaire du banc externe (figure 3.8). Le laser permet grâce à une série de miroirs d'éclairer chaque bloc de photodiodes. Ce faisceau peut être modulé en amplitude grâce à la cellule de Pockels. Les miroirs placés sur le trajet optique du faisceau émergeant du laser sont des miroirs amovibles ; ils peuvent se rabattre (position "down") et se redresser (position "up") tout en conservant la même orientation. Ainsi, pour calibrer le bloc de photodiodes D1, les miroirs M_1, M_2, M_3 et M_5 sont en position basse et le miroir M_4 doit être relevé. Ceci permet de faire les différentes calibrations sans avoir à réaligner les différentes optiques.

7.5.2 Procédure de calibration

Les données venant des ADC sont envoyées au `Frame Builder` grâce à `PreadOut`. Les données sous le format de "frame"[29] sont ensuite envoyées sur le réseau. Le programme de calibration récupère ces "frames". Grâce au fichier de configuration de `PreadOut`, il peut identifier chaque voie d'ADC au bloc de photodiodes, à la photodiode et au type de signal (DC,Phase,Quadrature) correspondant.

Il faut ensuite pour chaque bloc choisir une photodiode de référence à partir de laquelle les gains et le déphasage des autres photodiodes seront calculés.

Offset

Une première mesure doit être faite sans éclairer les photodiodes pour calculer les offsets de chaque voie. Dans la calibration, si la mesure d'offset n'a pas été faite, on corrige les offsets en utilisant les valeurs données dans le fichier de configuration.

Voies continues

Au niveau des voies DC, on calcule les gains de ces voies par rapport à la photodiode de référence. Si D_0 et D sont respectivement le signal DC de la photodiode de référence et d'une autre photodiode du même bloc. On forme le χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_i (D(i) - G_{dc} D_0(i))^2$$

où l'indice i représente le numéro d'échantillon. La minimisation donne :

$$G_{dc} = \frac{\sum_i D(i) D_0(i)}{\sum_i D_0(i) D_0(i)}$$

Voies démodulée : Gains relatifs et phase

Au niveau des voies AC, on doit calculer l'angle de mélange des voies et leurs gains relatifs. Pour cette mesure, on génère du bruit blanc autour de la fréquence de modulation grâce à la cellule de Pockels. Si P_0 et Q_0 sont les signaux démodulés en phase et en quadrature de la photodiode de référence, le signal à la fréquence de modulation S_0 de la photodiode de référence s'écrit :

$$S_0 = P_0 \cos(\Omega t) + Q_0 \sin(\Omega t)$$

et si les signaux démodulés en phase et en quadrature d'une autre photodiode sont P et Q, le signal à la fréquence de modulation S de cette photodiode s'écrit :

$$\begin{aligned} S &= P\cos(\Omega t - \phi) + Q\sin(\Omega t - \phi) \\ &= (P - \phi Q)\cos(\Omega t) + (Q + \phi P)\sin(\Omega t) \end{aligned}$$

où ϕ, le retard de phase avec la photodiode de référence, est supposé faible. Si G_p et G_q sont respectivement les gains relatifs des voies en phase et en quadrature par rapport à la photodiode de référence, on a :

$$\begin{aligned} G_p P_0 &= (P - \phi Q) \\ G_q Q_0 &= (Q + \phi P) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_p & G_p\phi \\ -G_q\phi & G_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les coefficients G_p, G_q et le retard ϕ de chaque photodiode on forme le χ^2 :

$$\begin{aligned} \chi^2 = \sum_i &(P(i) - G_p P_0(i) - G_p Q_0(i)\phi)^2 \\ &+ (Q(i) - G_q Q_0(i) + G_q P_0(i)\phi)^2 \end{aligned}$$

où i représente le numéro de l'échantillon. La minimisation du χ^2 permet d'obtenir les coefficients G_p, G_q et ϕ pour chaque photodiode du bloc[3].

Voie démodulée : coefficient du filtre

Pour déterminer le filtre H_{rd}^{-1}, le signal envoyé à la cellule de Pockels est toujours du bruit blanc. La mesure des coefficients est faite en ajustant à la densité spectrale de bruit mesurée pour chaque voie l'expression :

$$|H_{rd}(f)| \propto A\frac{1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2}$$

où A, f_1 et f_2 sont les paramètres à ajuster. les deux fréquences f_1 et f_2 permettent de calculer le filtre inverse à appliquer aux données (figure 7.3).

[3]La minimisation du χ^2 au premier ordre en ϕ donne une expression analytique des coefficients G_p, G_q et ϕ en fonction de $P(i)$, $Q(i)$, $P_0(i)$ et de $Q_0(i)$.

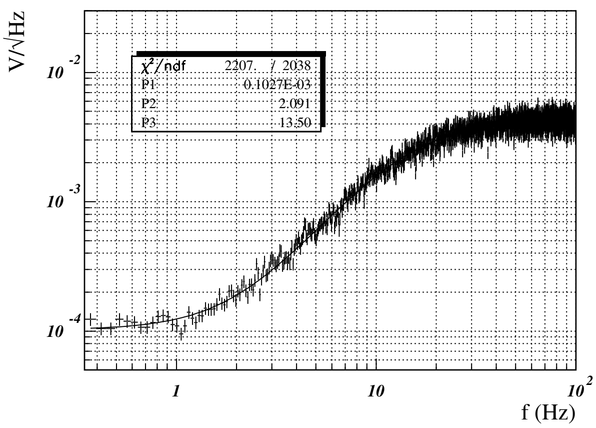


Figure 7.3: Mesure du filtre H_{rd} d'une voie démodulé, on trouve $f_1 = 2.09 \pm 0.02$ Hz et $f_2 = 13.5 \pm 0.08$ Hz ce qui est en accord avec les valeurs attendues (2 Hz et 13.3 Hz) compte tenu des valeurs effectives des capacités utilisées.

Le programme de calibration calcule donc pour chaque voie DC, l'offset et le gain et pour chaque voie AC (phase et quadrature), l'offset et le filtre à appliquer aux données ainsi que l'angle de mélange entre la voie en phase et la voie en quadrature.

En sortie, ce programme permet d'écrire un nouveau fichier de configuration où tous les paramètres calculés lors de la procédure de calibration sont mis à jour. Ce fichier est du même format que celui utilisé par `PrReadout` et peut donc servir comme fichier de configuration des acquisitions suivantes. Le programme donne aussi en sortie les retards relatifs entre les voies pour qu'un opérateur puisse les corriger avec les lignes à retard manuelles des cartes photodiodes.

7.6 Conclusion

Le système de numérisation des signaux venant des photodiodes a été mis en place. Les données, échantillonnées à 20 kHz, sont lues à 10 kHz. La puissance continue et la puissance à la fréquence de modulation du faisceau sont ensuite reconstruites en sommant les signaux venant des différentes photodiodes.

Le système de calibration permet de mesurer les corrections à faire sur chaque voie pour corriger la dispersion entre les 16 voies de lecture du signal de frange noire. Le programme de calibration présenté pourra aussi servir pendant le fonctionnement du détecteur. Il permet alors de vérifier en ligne la stabilité du système.

Chapitre 8

Analyse du bruit du système de détection

Le système de lecture présenté dans les chapitres précédents a été conçu pour avoir un bruit dont la densité spectrale soit un facteur 5 en dessous du bruit de photon, ce qui permet de ne pas dégrader la sensibilité du détecteur de plus de quelques pour cent.

Les événements pouvant générer des ondes gravitationnelles sont des événements très rares, on n'en attend pas plus de quelques uns par an. La détection de ces événements doit donc se faire non seulement avec une bonne sensibilité (faible niveau de bruit) mais aussi sans ambiguïté, c'est pourquoi on doit être très attentif au bruits non stationnaires du détecteur car ils peuvent simuler un signal d'onde gravitationnelle.

On présente dans ce chapitre une mesure du bruit du système de lecture des faisceaux comprenant les photodiodes, leur électronique et le système d'acquisition de données. Pour quantifier l'influence des bruits non stationnaires du système de détection, on étudie le nombre de faux déclenchement qu'il introduit dans la recherche d'onde gravitationnelle provenant d'une coalescence d'étoiles binaires.

Un algorithme de détection de signaux produits par une coalescence d'étoiles binaires est tout d'abord présenté. Cet algorithme est ensuite validé grâce à une simulation du détecteur VIRGO. Pour étudier le bruit non stationnaire du système de détection, les données en sortie de ce système sont analysées par cet algorithme de détection.

8.1 Détection d'une coalescence d'étoiles binaires

8.1.1 Signal attendu

L'onde gravitationnelle générée par un système de deux étoiles binaires peut être calculée directement à partir du moment quadrupôlaire de ce système. En supposant que :

- les mouvements des deux corps peuvent être calculés en utilisant la mécanique Newtonienne,
- leur orbite est circulaire,
- les étoiles sont des masses ponctuelles,
- le système perd de l'énergie uniquement par rayonnement gravitationnel (c'est cette perte d'énergie qui rapproche les deux étoiles et augmente la fréquence de rotation),

le calcul de l'amplitude de l'onde gravitationnelle produite dans la direction faisant un angle i avec l'axe de rotation des deux étoiles donne[32]:

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{1}{2}(1+\cos^2 i)h_c(t)\cos(\phi_c(t)) \\ h_\times &= \cos(i)h_c(t)\sin(\phi_c(t)) \end{aligned}$$

L'amplitude $h_c(t)$ du signal est donnée par :

$$h_c(t) = \frac{4KG^{5/3}}{Dc^4}(\pi f(t))^{2/3} \tag{8.1}$$

où D est la distance de la source et $f(t)$ la fréquence du signal en fonction du temps. Le paramètre K est une fonstion des masses des deux étoiles :

$$K = \mu M^{2/3}$$

μ et M étant respectivement la masse réduite et la masse totale des deux étoiles. L'amplitude h_c augmente avec la fréquence $f(t)$ de l'onde à l'instant t qui vaut :

$$f(t) = f_0\left(1-\frac{t-t_0}{\tau}\right)^{-3/8} \tag{8.2}$$

où f_0 est la fréquence du signal à l'instant $t=t_0$ et τ la durée de la coalescence à partir de l'instant $t=t_0$:

$$\tau = \frac{5}{256}\frac{c^5}{KG^{5/3}}(\pi f_0)^{-8/3} \tag{8.3}$$

La phase ϕ_c du signal peut être calculée à partir de 8.2 :

$$\phi_c(t) = \frac{16}{5}\pi f_0\tau\left(1-\left(\frac{f(t)}{f_0}\right)^{-5/3}\right)+\phi_0 \tag{8.4}$$

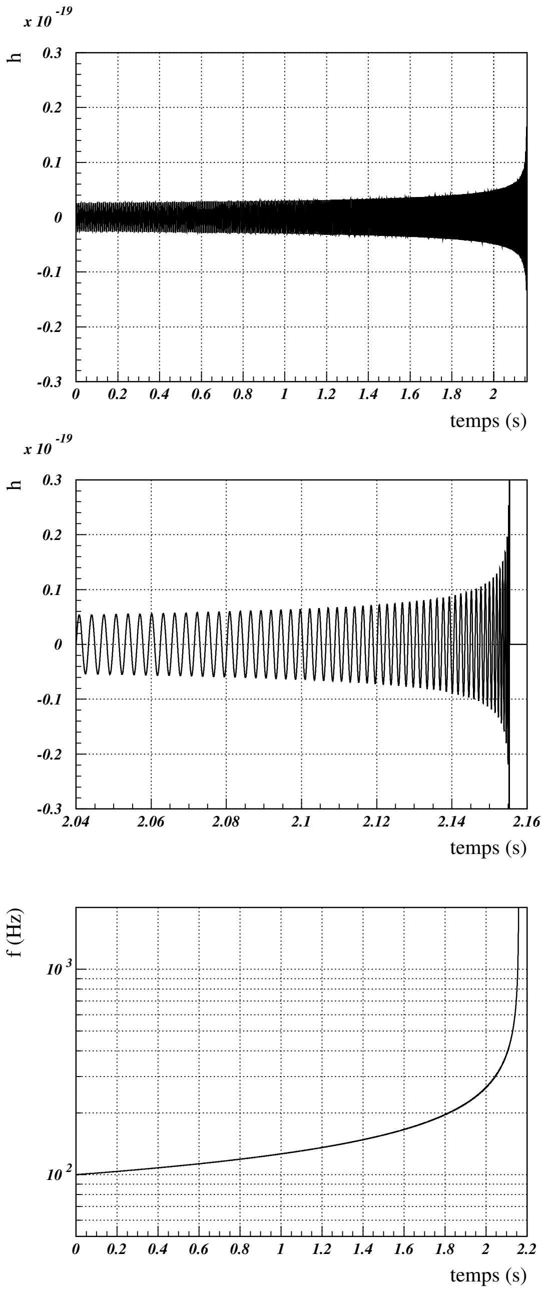


Figure 8.1: La figure a représente le signal généré h_+ par une coalescence de deux étoiles de masse 1.4 $M_\odot$ situées à 1 Mpc (avec $i = 0$). A $t = t_0 = 0$, $f_0 =$ 100 Hz. Le temps de coalescence τ est de 2.16 s. La figure b représente le dernier dixième de seconde de cette coalescence. La figure c représente l'évolution de la fréquence du signal en fonction du temps.

A $t = t_0 + \tau$, la fréquence du signal et l'amplitude divergent vers l'infini. L'évolution du signal à partir de la fréquence f_0 est complètement caractérisée par le paramètre de masse ou, de manière équivalente, par le temps de la coalescence τ.

La figure 8.1 représente l'évolution du signal h_+ en fonction du temps généré par une coalescence de deux étoiles de 1.4 $M_\odot$ à une distance de 1 Mpc. A $t = t_0 = 0$, la fréquence du signal est $f_0 = 100$ Hz. La fréquence et l'amplitude du signal augmentent avec le temps jusqu'à ce que les étoiles se rencontrent. La durée de la coalescence est de 2.16 secondes (formule 8.3).

L'amplitude détectée par l'interféromètre $h(t)$ est donnée par (équation 1.18):

$$h(t) = F_+(\theta, \phi, \psi) h_+(t) + F_\times(\theta, \phi, \psi) h_\times(t)$$

où F_+ et $F_\times$ représentent la sensibilité du détecteur en fonction de la direction et de la polarisation de l'onde incidente (figure 1.3). L'amplitude h détectée peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} h(t) &= \Theta h_c(t) \cos(\phi_c(t) + \phi_0 - \Phi) && (8.5) \\ &\text{où} && (8.6) \\ \Theta(\theta, \phi, \psi, i) &= \sqrt{\left(F_+ \frac{1}{2}(1 + \cos^2 i)\right)^2 + (F_\times \cos(i))^2} \\ \Phi(\theta, \phi, \psi, i) &= \arctan\left(\frac{2\cos(i) F_\times}{(1 + \cos^2(i)) F_+}\right) \end{aligned}$$

Lorsque la coalescence est à la verticale ($\theta = 0$) et l'axe de rotation est perpendiculaire au plan du détecteur ($i = 0$), on a $\Theta = 1$.

L'amplitude du signal détecté dépend donc de la position de la source, de sa distance et de l'inclinaison de l'axe de rotation avec la ligne de visée. Par contre l'évolution du signal à partir d'une fréquence f_0 ne dépend que du temps de coalescence τ et de la phase initiale $\phi_0 - \Phi$.

8.1.2 Filtrage optimal

Pour augmenter le rapport signal sur bruit et donc les chances de détection, le signal en sortie du détecteur peut être filtré pour construire l'observable S :

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) F(t) dt,$$

où $s(t)$ est le signal en sortie du détecteur et $F(t)$ la représentation dans le domaine temporel du filtre appliqué au signal. $s(t)$ est la somme du bruit du détecteur $n(t)$ et d'un signal $h(t)$:

$$s(t) \;=\; h(t) + n(t)$$

Si le signal $h(t)$ est produit par une coalescence, il peut s'écrire :

$$\begin{aligned} h(t) &= \Theta h_c(t)\cos(\phi_c(t) + \phi_0 - \Phi) \\ &= \frac{\Theta(\theta, \phi, \psi, i)}{D} T(t - t_0) \end{aligned}$$

où T est le signal "canonique" produit par une coalescence à 1 Mpc aligné avec le détecteur (direction à la verticale du détecteur avec un plan de rotation parallèle aux bras) ayant la fréquence f_0 à $t = 0$. D est la distance de la source exprimée en Mpc. Ce signal est entièrement défini par le temps de coalescence τ et la phase initiale ${\phi'}_0 = \phi_0 - \Phi$.

Comme le signal produit par une coalescence est connu, on peut chercher le filtre F qui maximise le rapport signal sur bruit. Si $\tilde{s}(f)$ et $\tilde{F}(f)$ sont les transformées de Fourier du signal $s(t)$ et du filtre $F(t)$, S peut s'écrire dans le domaine fréquentiel :

$$S \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(f)\tilde{F}^*(f)df,$$

La valeur moyenne du signal S est donc :

$$< S > \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f)\tilde{F}^*(f)df$$

alors que le bruit en sortie du filtre

$$N \;=\; S - < S >$$

a une puissance :

$$\begin{aligned} < N^2 > &= \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' < \tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f') > \tilde{F}^*(f')\tilde{F}(f) \\ &= \int_0^{\infty} df S_n(f)|\tilde{F}(f)|^2 \end{aligned}$$

où $S_n(f)$ est la densité spectrale du bruit du détecteur :

$$< \tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f') > \;=\; \frac{1}{2} S_n(f)\delta(f - f')$$

Le signal sur bruit (SNR) après le filtrage est donc :

$$\frac{< S >}{\sqrt{< N^2 >}} \;=\; 2\frac{\int_0^{\infty} df \tilde{h}(f)\tilde{F}^*(f)}{\sqrt{\int_0^{\infty} df S_n(f)\tilde{F}^*(f)}}$$

on peut alors montrer que le rapport signal sur bruit est maximal lorsque le filtre $\tilde{F}(f)$ est proportionnel à la transformée de Fourier du signal recherché normalisée par le bruit du détecteur [33] :

$$\tilde{F}(f) \propto \frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)}$$

Ce filtre est appelé filtre optimal ou filtre de Wiener. Si l'on choisit [34]:

$$\tilde{F}(f) = \frac{\tilde{T}(f)}{S_n(f)} e^{i2\pi f t_0}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} < S > &= 2\frac{\Theta}{D}\int_0^\infty df \frac{|\tilde{T}(f)|^2}{S_n(f)} \\ < N^2 > &= \int_0^\infty df \frac{|\tilde{T}(f)|^2}{S_n(f)} \end{aligned}$$

le rapport signal sur bruit est donné par :

$$\mathrm{SNR} = \frac{< S >}{\sqrt{< N^2 >}} = 2\frac{\Theta}{D}\sqrt{\int_0^\infty df \frac{|\tilde{T}(f)|^2}{S_n(f)}}$$

A partir de cette formule, on peut quantifier la sensibilité d'un détecteur en calculant la distance d'une coalescence alignée avec le détecteur donnant un rapport signal sur bruit de 1 :

$$D_0 = 2\sqrt{\int_0^\infty df \frac{|\tilde{T}(f)|^2}{S_n(f)}} \text{ Mpc} \tag{8.7}$$

La norme de la transformée de Fourier du signal $|\tilde{T}(f)|$ peut être calculée en supposant que la fréquence et l'amplitude du signal évoluent toujours très lentement par rapport à sa fréquence, on a alors [35]:

$$|\tilde{T}(f)|^2 = \frac{5}{24\pi^{4/3}}\frac{KG^{5/3}}{c^3} f^{-7/3}$$

La distance D_0 est donc proportionnelle à la racine carrée du paramètre de masse K de la coalescence.

Si on calcule pour chaque instant t :

$$S(t) = 2\int_0^\infty df \frac{\tilde{s}(f)\tilde{T}(f)}{S_n(f)} e^{i2\pi f t}$$

Une onde gravitationnelle, générée par une coalescence ayant une fréquence f_0 à l'instant t_0, produira en sortie du filtre un signal qui sera maximal à l'instant $t = t_0$. Le rapport signal sur bruit donne alors la distance de la source (on suppose que $\Theta = 1$):

$$D \;=\; D_0/\mathrm{SNR} \tag{8.8}$$

Pour que le signal en sortie soit maximal, le temps de coalescence τ et la phase ${\phi'}_0$ de $T(t)$ avec lequel on filtre les données doivent être identiques à ceux du signal en sortie du détecteur $s(t)$.

Mais les paramètre du signal sont a priori inconnus, on doit avoir plusieurs filtres construits à partir de "calques" $T(t)$. Chaque calque est représenté par sa phase initiale et le temps de coalescence.

On peut lever l'inconnu sur la phase initiale du signal en utilisant deux calques en quadrature $T_0 \propto \cos(\phi(t))$ et $T_{90} \propto \sin(\phi(t))$ pour chaque paramètre τ. On obtient en sortie deux signaux S_0 et S_{90}. En effet, si le signal a une phase ${\phi'}_0$, le meilleur SNR est obtenue avec le calque $T(t)$ égal à :

$$T(t) \;=\; T_0(t)\cos({\phi'}_0) - T_{90}(t)\sin({\phi'}_0)$$

et donne un signal en sortie :

$$S(t) \;=\; S_0(t)\cos({\phi'}_0) - S_{90}(t)\sin({\phi'}_0)$$

On voit qu'à partir de S_0 et S_{90}, $\sqrt{S_0^2 + S_{90}^2}$ donne le maximum du signal $S(t)$ et lève l'ambiguïté sur la phase ${\phi'}_0$. Pour chaque paramètre τ, on a donc deux calques.

En pratique le nombre de calques est limité. On doit donc recouvrir l'espace $\tau = [\tau_{min}, \tau_{max}]$ avec un nombre fini de calques. Or la perte de signal sur bruit que l'on a en détectant un signal de coalescence de paramètre τ avec un calque de paramètre τ' est une fonction de $\tau - \tau'$ [32]. L'espace $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ doit donc être recouvert avec des paramètres τ_i régulièrement espacés. L'intervalle $\frac{\tau_{i+1}-\tau_i}{2}$ est directement lié à la perte maximale de rapport signal sur bruit que l'on accepte. Une perte maximale de 10 % correspond à un intervalle de 10 ms [32].

Par exemple, si l'on veut détecter des coalescences avec des masses comprises entre 1.2 et 1.6 $M_\odot$ à partir de 50 Hz ($\tau_{min} = 11$ s et $\tau_{max} = 18$ s) et avec une perte de signal inférieure à 10 %, on doit utiliser 700 calques.

Pour avoir le meilleur rapport sur bruit, les calques doivent être identiques au signal attendu. Les expressions de l'amplitude et de la phase du signal présentées (formule 8.1 et 8.2) ont été calculées dans le cadre de la mécanique Newtonnienne et de l'approximation quadrupôlaire.

Or le signal a un nombre important de cycles dans la bande passante du détecteur, le rapport signal sur bruit est donc très sensible aux déviation de la phase. Pour ne pas perdre de rapport signal sur bruit, Il a été montré que l'on devait considérer plusieurs termes post-Newtoniens dans la construction des calques [36]. Lorsque ces corrections sont prises en compte [37], les calques sont dépendant des masses des deux étoiles, ce qui multiplie le nombre de calques à utiliser pour recouvrir l'espace de toutes les masses. Seul une détection hiérarchique permet alors de diminuer le temps de traitement nécessaire [38] [39].

Dans l'algorithme décrit ici ces termes ne sont pas pris en compte, ce qui n'a aucune influence si les coalescences sont simulées elles aussi sans prendre en compte ces termes.

8.2 Algorithme de détection

8.2.1 Mise en place du filtrage optimal

Le filtrage optimal produit l'observable :

$$S(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\tilde{s}(f)\tilde{T}(f)}{S_n(f)} e^{i2\pi f t_0}$$

qui peut être obtenue en calculant la transformée de Fourier inverse de $\frac{\tilde{s}(f)\tilde{T}(f)}{S_n(f)}$. On doit donc faire la transformée de Fourier de la sortie du détecteur $s(t)$ et du signal canonique $T(t)$, faire leur produit, normaliser ce produit par le bruit du détecteur puis appliquer la transformée de Fourier inverse.

Lorsque le détecteur a un bruit blanc, le $S(t_0)$ peut s'écrire :

$$S(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{s}(f)\tilde{T}(f) e^{i2\pi f t_0} \tag{8.9}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt s(t) T(t - t_0) \tag{8.10}$$

Le filtrage optimal revient donc à corréler le signal en sortie du détecteur avec le signal canonique $T(t)$.

En pratique, on travaille toujours avec des données sur un temps fini. Le signal en sortie du détecteur doit donc être segmenté dans des intervalles de longueur ΔT contigus. Pour voir l'influence de cette troncature, on introduit :

$$\underline{s}(t) = \begin{cases} s(t) & \text{lorsque } T < t < T + \Delta T \\ 0 & \text{lorsque } t < T \text{ ou } t > t + \Delta T \end{cases}$$

qui est égale à $s(t)$ entre T et $T + \Delta T$. Le signal canonique $T(t)$ est égal à zéro lorsque $t < 0$ et après la coalescence quand $t > \tau$. L'équation 8.10 devient

$$S(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} T(t - t_0) s(t) dt$$

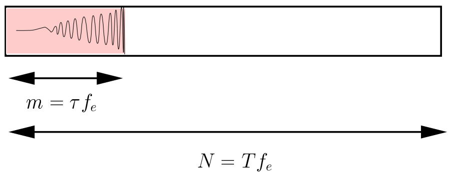


Figure 8.2: Vecteur contenant le signal attendu $T[i]$, il est complété avec des zéros pour avoir la même taille que les données.

égal à

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} T(t-t_0)\underline{s}(t)dt$$

uniquement si $T < t_0 < T+\Delta T-\tau$. On voit donc, que lorsque l'on tronque les données sur un intervalle de longueur ΔT secondes, le résultat du filtrage optimal est valide seulement pour les $\Delta T - \tau$ premières secondes.

En pratique aussi, les données sont échantillonnées. Elles sont stockées dans un vecteur de taille $N = \Delta T * f_e$ où f_e est la fréquence d'échantillonage du signal. La durée du signal canonique $T(t)$ correspond elle à $m = \tau * f_e$ données.

Pour chaque vecteur de données $s[i]$ (i=1 à N), on calcule alors :

$$S[i_0] \quad = \quad \mathrm{FFT}^{-1}\left[\frac{\mathrm{FFT}(s[i])\mathrm{FFT}(T[i])}{S_n[i]}\right] \tag{8.11}$$

Les deux vecteurs $s[i]$ et $T[i]$ doivent donc avoir la même taille N. Le vecteur du signal est donc complété avec des zéros pour avoir la longueur N (figure 8.2).

Le calcul se fait donc par étape, chaque étape correspond au traitement d'un vecteur de longueur N (c'est-à-dire de durée ΔT). Le calcul du signal $S[i_0]$ est obtenu en calculant 8.11 mais seules les données pour $i_0 < N - m$ sont valides. A l'étape suivante, on recopie dans le vecteur des données les m dernières valeurs de l'étape précédente et on le complète avec les $N - m$ nouvelles valeurs (figure 8.3). A chaque étape, on a donc $N - m$ données en entrée et $N - m$ en sortie. La longueur des vecteurs N doit être choisie pour optimiser plusieurs contraintes :

- N doit être une puissance de deux car on utilise les transformées de Fourier rapides (FFT).
- Pour chaque étape, les données valides produites par le filtrage sont les $S[i_0]$ avec $i_0 < N - m$, N doit donc être suffisamment important par rapport à m pour ne pas faire un trop grand nombre d'étapes successives.

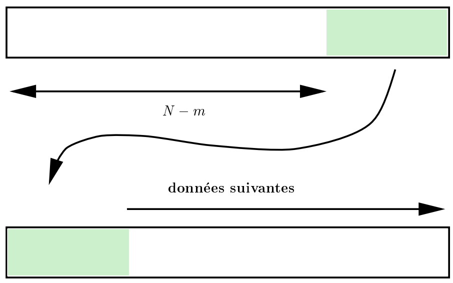


Figure 8.3: Vecteur de données. Les m dernières valeurs sont être replacées au début du vecteur pour le traitement suivant.

- Le nombre d'opérations à faire et donc le temps pour calculer une FFT augmente en $N \log(N)$,
- Augmenter N peut aussi très vite être coûteux en mémoire.

Le bruit $S_n[i]$ peut être une estimation du bruit du détecteur mais on aura le meilleur rapport signal sur bruit uniquement si cette estimation correspond bien au bruit du détecteur à l'instant t. On préfère donc le calculer en ligne en moyennant la densité spectrale du signal $s[i]$ avec une constante de temps correspondant à quelques minutes.

8.2.2 Simulation du détecteur VIRGO et test de l'algorithme

Ce filtrage a été testé sur des données simulées. Les bruits du détecteur pris en compte sont le bruit thermique pendulaire, le bruit thermique des miroirs et le bruit de photon. Par rapport au bruit prévu du détecteur VIRGO, on ajoute des résonances dans la zone de sensibilité maximale pour tester la résistance de l'algorithme aux bruits instrumentaux.

On utilise le module `FastDS` du simulateur `SIESTA` [22] pour générer le signal de sortie du détecteur : chaque composante du bruit est produite par un générateur de bruit blanc, les signaux sont ensuite filtrés pour avoir les densités spectrales voulues avant d'être sommés.

La figure 8.4 représente la densité spectrale du signal produit. A partir de la formule 8.7 et de la densité spectrale on peut calculer la distance d'une coalescence qui produit un rapport signal sur bruit de 1 :

$$D_0 = 254\sqrt{\frac{K}{1.39}}\ \mathrm{Mpc}$$

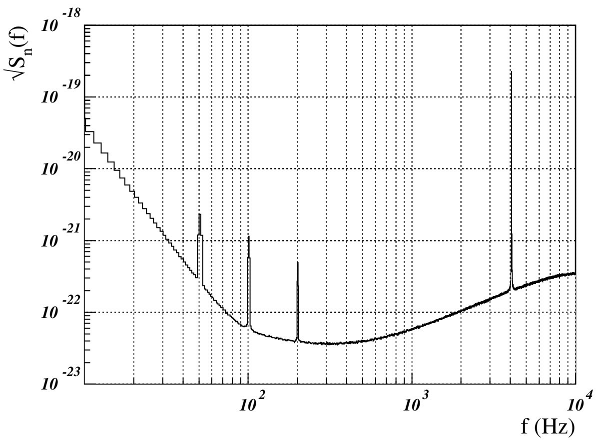


Figure 8.4: Densité spectrale du bruit en h. Les contributions prises en compte viennent du bruit de photon, du bruit thermique pendulaire, du bruit thermique du premier mode de résonance des miroirs (4.7 kHz).

En pratique le calque considéré pour construire le filtre optimal a une fréquence de départ f_0 et la fréquence d'échantillonage limite la fréquence maximale à f_{max}. La distance D_0 est donc donnée par :

$$D_0 \quad = \quad 2\sqrt{\int_{f_0}^{f_{max}} df \frac{|\tilde{T}(f)|^2}{S_n(f)}} \text{ Mpc}$$

La fréquence f_0 doit être suffisamment faible pour ne pas perdre de rapport signal sur bruit mais comme le temps de coalescence est proportionnel à $(f_0)^{-8/3}$ la taille des vecteurs considérés augmente très vite si on prend une fréquence f_0 trop faible. La perte de rapport signal sur bruit en fonction de la fréquence f_0 du calque est représentée sur la figure 8.5.a. On voit qu'avec une fréquence f_0 de 30 Hz, on perd moins de 5 % du rapport signal sur bruit.

La taille des vecteurs est proportionnelle à la fréquence d'échantillonage. La figure 8.5.b représente la perte de rapport signal sur bruit en fonction de cette fréquence ; on voit qu'avec $f_{max} = 500$ Hz, les pertes sont de moins de 2%. On choisit donc une fréquence d'échantillonage de 2 kHz. Avec des calques ayant une fréquence initiale de $f_0 = 30$ Hz et un signal échantillonné à 2 kHz, on trouve :

$$D_0 \quad = \quad 247\sqrt{\frac{K}{1.39}} \text{ Mpc}$$

Les données produites par la simulation sont donc sous échantillonnées à 2 kHz puis filtrées par l'algorithme de filtrage optimal. Un signal correspondant à une coalescence de

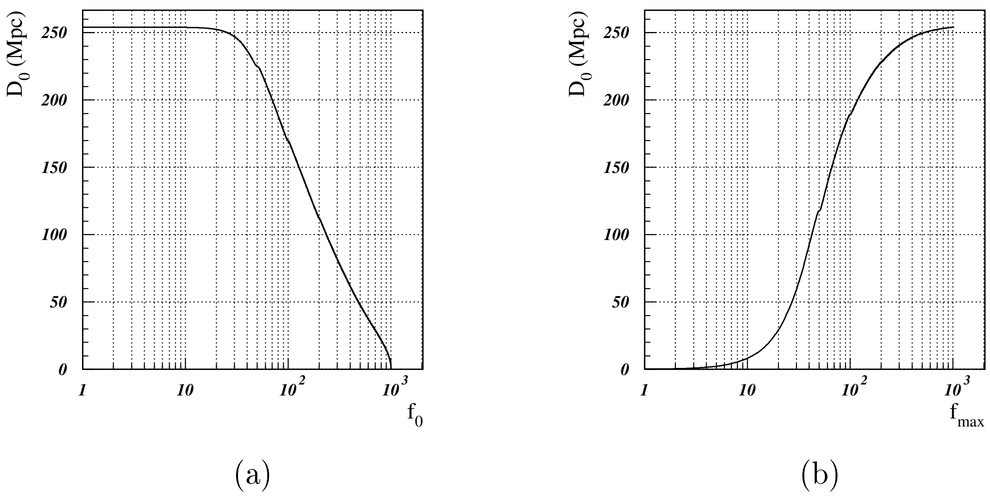


Figure 8.5: Distance d'une coalescence donnant un SNR de 1 en fonction de f_0 avec $f_{max} = \infty$ (figure a) et en fonction de f_{max} avec $f_0 = 0$ (figure b)

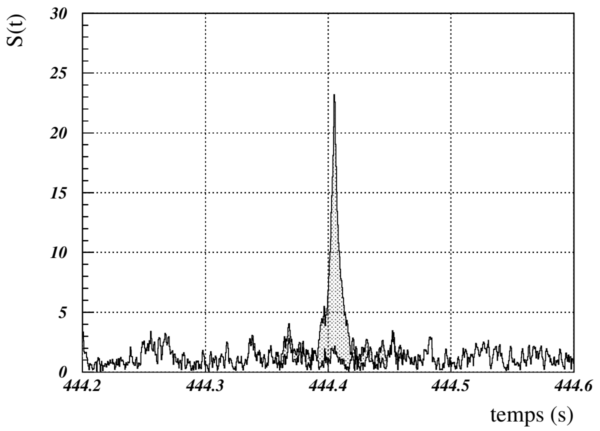


Figure 8.6: Valeur en fonction du temps du signal $S = \sqrt{T_0^2 + T_{90}^2}$. L'algorithme détecte une coalescence ayant un fréquence de 30 Hz à l'instant $t = 444.4$ s avec un SNR de 23.3.

deux étoiles de 1.4 $M_\odot$ à 10 Mpc est ajouté aux signaux transmis par le détecteur. Cette coalescence est alignée avec le détecteur ($\Theta = 1$). A $t = 0$ la coalescence à une fréquence de 13 Hz, ce qui correspond à un temps de coalescence de 498 secondes.

On effectue alors une recherche en utilisant les deux calques appropriés (correspondant à deux étoiles de 1.4 $M_\odot$) T_0 et T_{90} avec une fréquence initiale de 30 Hz. La longueur des calques est donc $\tau = 53.5$ secondes, ce qui, compte tenu de la fréquence d'échantillonage, correspond à $m = 107082$ données. La taille des vecteurs de travail est choisie égale à $N = 2^{18} = 262144$.

Le signal généré par la coalescence passe de la fréquence de départ (13 Hz) à 30 Hz en 444 secondes environ. La figure 8.6 représente le signal en sortie du filtre S en fonction du temps entre 444.2 et 444.6 secondes. L'algorithme détecte une coalescence (ayant une fréquence de 30 Hz à $t = 444.4$) avec un SNR de 23.3. ce qui correspond au signal attendu compte tenu de la distance de la source (10 Mpc) et de $D_0 = 247$.

Les figures 8.7 représentent alors la distribution des signaux en sortie du filtre S_0, S_{90} et S pendant toute la durée de la simulation. Les parties grisées des distributions représentent l'excès dû à la présence de l'onde générée par la coalescence. En dehors du signal dû à la présence d'un signal de coalescence, la distribution des signaux S_0, S_{90} est bien Gaussienne.

8.3 Etude du bruit du système de détection

Pour mesurer le bruit du système de détection, on dispose de la moitié du système de lecture du signal de frange noire c'est-à-dire de huit photodiodes, de huit cartes de démodulation et d'un châssis de carte ADC.

Les ADC sont lus avec le programme `Preadout` (chapitre 7) puis les données sont envoyées par des Fibres optiques à un `Frame Builder`, qui formate ces données dans des “frames” et les envoie par le réseau à une tâche qui les stocke sur disques.

8.3.1 Bruit de l'électronique

Les sorties des cartes analogiques sont connectées au système d'acquisition. La figure 8.8 montre le bruit des signaux en sortie, ils correspondent aux signaux venant d'une des huit cartes de photodiode. On a donc le signal en phase, en quadrature et la voie DC de la photodiode.

Le signal en sortie des voies démodulées est par construction dominé par le bruit de l'électronique. Le niveau de bruit est de 2.5 $\mu V/\sqrt{Hz}$ à 1 kHz : ce niveau correspond bien au niveau de bruit du mélangeur (5 $nV/\sqrt{Hz}$) amplifié d'un gain de 10 puis filtré grâce au filtre H_{rd} utilisé pour réduire la dynamique du signal (gain 45 à haute fréquence). Le

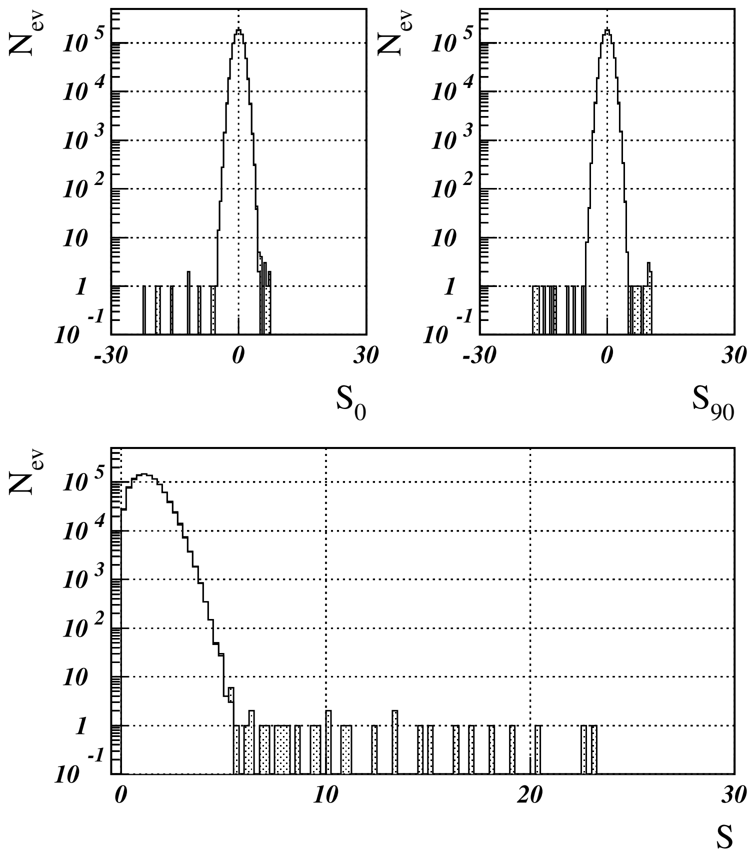


Figure 8.7: Distribution des signaux S_0 et S_{90} et S, la partie grisée représente l'excès dans ces distributions du à la présence d'un signal produit par une coalescence à 10 Mpc.

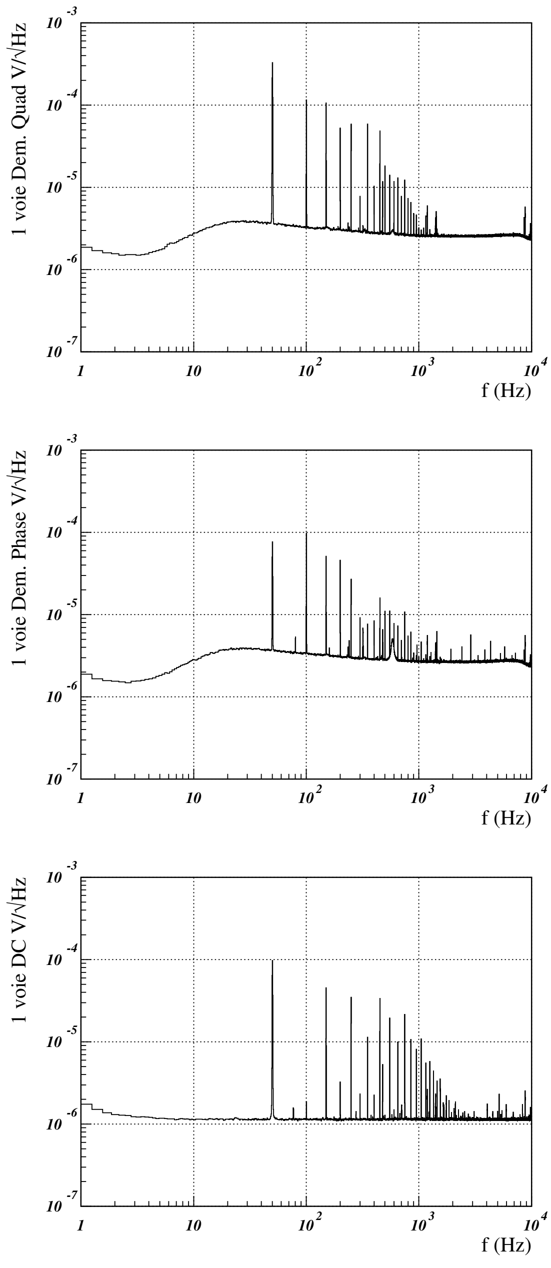


Figure 8.8: Bruit des voies en phase, en quadrature, et DC en sortie d'une carte photodiode.

bruit de l'électronique remonte à basse fréquence mais est atténué en dessous de 10 Hz par ce même filtre. Les résonances sont produites par le 50 Hz et ses harmoniques.

Ce bruit est aussi atténué au-dessus de 7 kHz par le filtre antirepliement. Le bruit de la voie continue est dominé par le bruit de numérisation (à part le 50 Hz et ses harmoniques).

Le programme de lecture permet de reconstruire les signaux contenus dans le faisceau de frange noire en filtrant les voies démodulées avec le filtre inverse de H_{rd} en les sommant. On a alors en sortie plus qu'un signal en phase et en quadrature et un signal DC. La dynamique de ces signaux est maintenant de $8 * \pm 10$ volts. La figure 8.9 représente la densité spectrale de bruit de ces signaux. Le signal étant filtré par H_{rd}^{-1} on doit retrouver le niveau de bruit de l'électronique avant le filtre H_{rd}, 50 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$ multiplié par $\sqrt{8}$, soit autour de 140 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$ à 1 kHz.

8.3.2 Influence du système de détection sur la recherche de coalescence d'étoiles binaires

Pour caractériser le bruit du système de lecture du faisceau de frange noire, le signal démodulé en phase produit par le système de détection est ensuite filtré par l'algorithme de recherche de coalescence d'étoiles binaires. Le bruit du système de détection doit être exprimé en unité d'amplitude d'onde gravitationnelle h. Le gain de l'ensemble de détection doit être calculé en prenant en compte :

- La division du faisceau lumineux grâce aux séparatrices.
- les 16 photodiodes,
- le pré-ampli,
- l'électronique de démodulation,
- l'amplification et le filtrage analogique avec H_{rd},
- le filtre antirepliement,
- la numérisation du signal,
- le filtrage numérique H_{rd},
- la sommation des 16 voies.

Le gain s'exprime en volt par watt:

$$G \;=\; 1078 \quad \text{V/W}$$

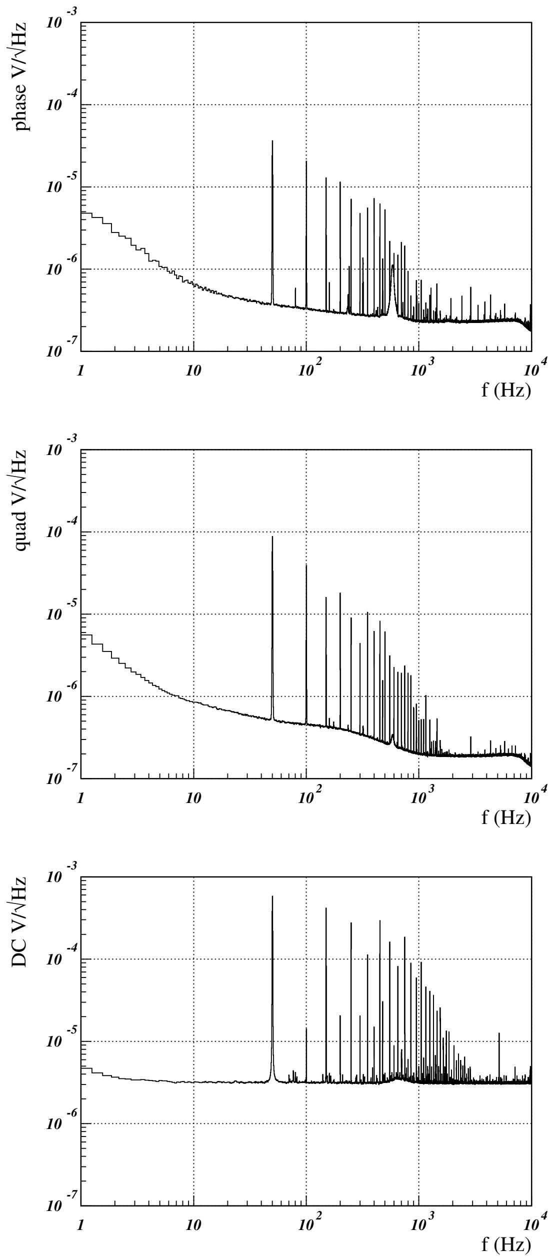


Figure 8.9: Bruit des voies en phase, en quadrature, et DC du système de lecture du faisceau.

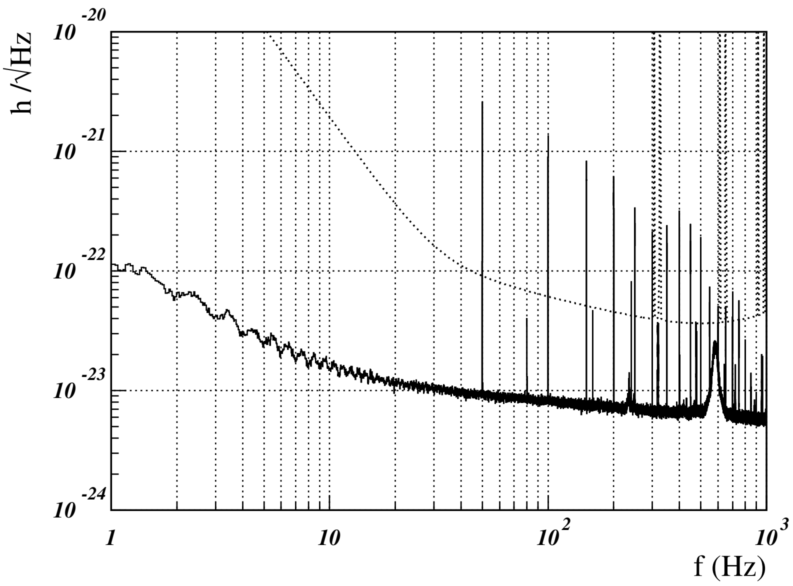


Figure 8.10: Contribution au bruit de VIRGO du système de lecture des faisceaux.

Une onde gravitationnelle d'amplitude h donne un signal en puissance à la fréquence de modulation (formule 2.20):

$$\partial P_\Omega = 4LhP_0 J_0(m) J_1(m) \frac{2F}{\pi} \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{RT} \quad \text{Watt/m}$$

ce qui, avec les valeurs numériques trouvées dans le chapitre 4 et reprise dans le chapitre 6, donne le gain entre l'amplitude de l'onde gravitationnelles et les volts mesurés en sortie du système de lecture :

$$G' \;=\; 8.\ 10^{16} \quad \text{V}/[h]$$

A partir de ce gain, on peut exprimer le bruit obtenu en sortie du système de détection en terme de sensibilité, la densité spectrale de ce bruit est représentée sur la figure 8.10.

A partir de ce spectre et de la formule 8.7, on peut calculer à quelle distance doit être une coalescence d'étoiles binaires pour donner un signal égal au bruit du système de détection. En ne considérant que la plage du spectre entre 30 Hz et 500 Hz, on trouve :

$$D_0 \;=\; 1900\sqrt{\frac{K}{1.39}}\ \text{Mpc} \tag{8.12}$$

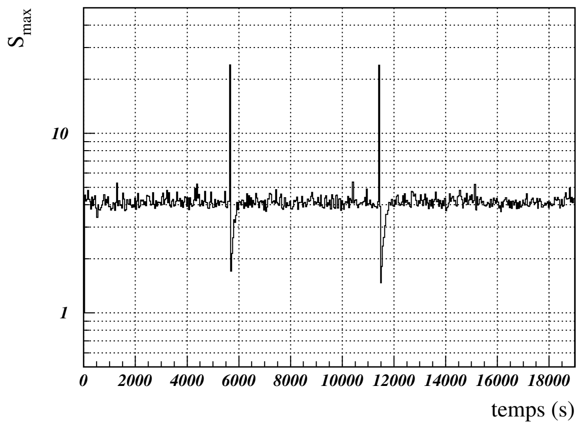


Figure 8.11: Maximum du signal $S(t)$ sur des tranches de 10 secondes.

Le signal provenant de la voie démodulée en phase est sous échantillonnée puis traiter avec l'algorithme de filtrage optimal. Le filtrage est effectué dans les mêmes conditions que le filtrage effectué sur les données simulées de VIRGO. Les calques sont donc construits à partir d'une coalescence de deux étoiles de 1.4 $M_{\odot}$ avec une fréquence de départ de 30 Hz.

La figure 8.11 représente le maximum du signal en sortie du filtre $S(t)$ sur des intervalles de 10 secondes. La durée des données analysées est d'environ 5 heures, pendant cette période, l'algorithme déclenche deux fois et produit un signal ayant un SNR de 25. Compte tenu de l'équation 8.12, ces deux déclenchements correspondent à une coalescence à 80 Mpc.

Les figures 8.12 représentent la distribution des signaux S_0 et S_{90} et S. Les excès dans ses distributions viennent des deux déclenchements.

Ce type de problème est bien évidemment en cours d'étude et devrait être résolu pour l'installation de ce système sur le site de VIRGO. Il est malgré tout possible d'éliminer ces événements en ligne : dans le programme de lecture, les signaux venant de chaque photodiode sont filtrés avant d'être sommés. Les filtres appliqués, mesurés grâce au système de calibration, permettent d'éliminer la dispersion des signaux avant de les sommer. On peut donc comparer ces signaux et écarter de la sommation les événements en dehors de la dispersion attendue. Cette sélection en ligne a été testé sur les données étudiées précédemment, la figure 8.13 montre alors le maximum du signal en sortie de l'algorithme. Les deux événements ont bien été éliminés.

les figures 8.14 représentent la distribution des signaux S_0 et S_{90} et S après cette sélection. On voit qu'en sortie de l'algorithme les distributions obtenue sont Gaussiennes.

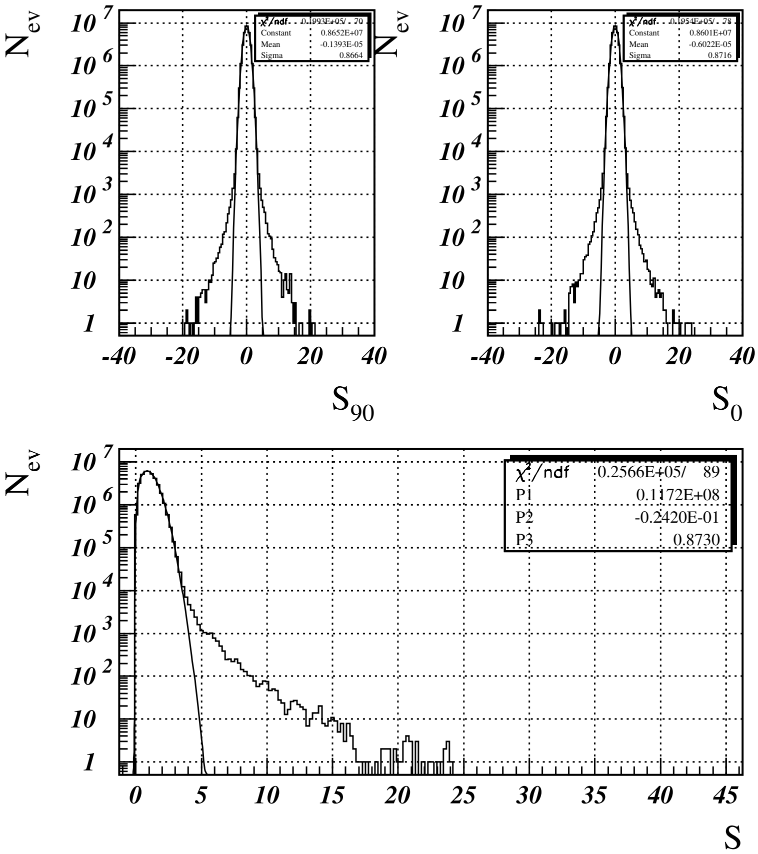


Figure 8.12: Distribution des signaux S_0, S_{90} et S en sortie du filtrage optimal.

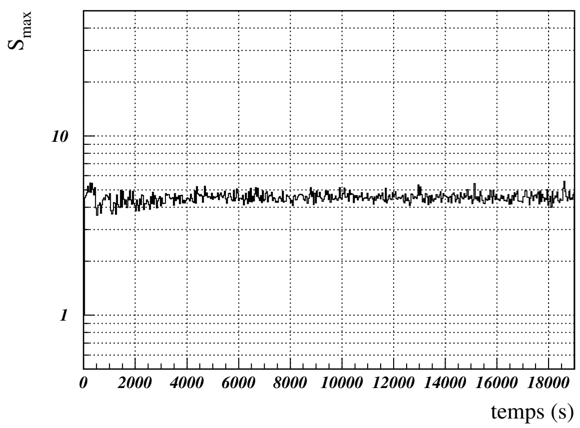


Figure 8.13: Maximum du signal $S(t)$ sur des tranches de 10 secondes avec la sélection des données en ligne.

Le signal maximum correspondant à un SNR de 6, ce qui d'après 8.12, correspond à une distance de 300 Mpc.

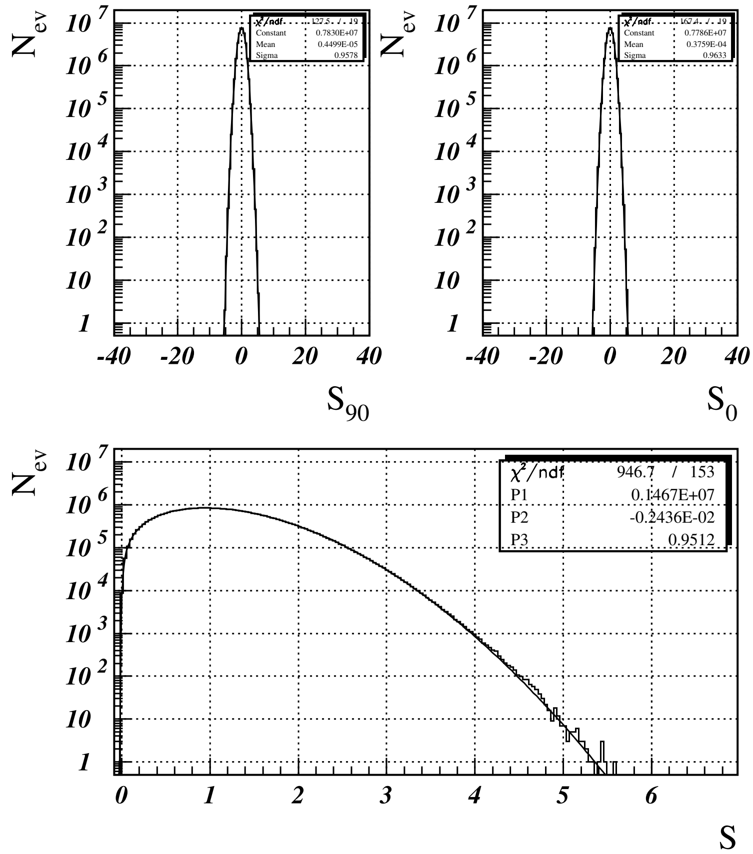


Figure 8.14: Distribution des signaux S_0, S_{90} et S en sortie du filtrage optimal après sélection des données.

8.4 Conclusion

Un algorithme de recherche d'ondes gravitationnelles a été mis en place et testé sur un bruit simulé ayant une densité spectrale reproduisant le bruit attendu en sortie de VIRGO. Un rapport signal sur bruit de 1 correspond alors à une coalescence distante de 300 Mpc.

Il est ensuite utilisé pour caractériser le niveau de bruit du système de détection du faisceau de frange noire.

On étudie le nombre et l'amplitude des faux déclenchements produit par le système de lecture. Les mesures présentées correspondent au tout premier test effectué sur le système complet. Quelques "événements" on été mis en évidence. Ces problèmes sont en cours d'études et devraient être résolu pour l'installation du système à Cascina.

Une fois ces "événements" soustraits, l'influence du système de détection dans la recherche d'ondes gravitationnelles générées par des coalescences binaires semble négligeable.

Conclusion

Au cours de mon travail de thèse, j'ai participé à la mise en place du système de détection de l'expérience VIRGO. Ce système doit à partir du faisceau transmis par l'interféromètre (faisceau de frange noire) déterminer le mieux possible la condition d'interférence du détecteur. Il filtre la lumière parasite, convertit le faisceau de frange noire en signal électronique puis numérique tout en satisfaisant des contraintes de dynamique importantes.

Une simulation de l'interféromètre a tout d'abord montré la nécessité de filtrer le faisceau de frange noire avant d'en détecter la puissance. La simulation du filtrage avec une cavité optique “mode cleaner” a alors montré que celle-ci permet d'améliorer la sensibilité du détecteur par rapport au bruit de photon d'un facteur deux à trois.

Les performances du filtrage optique du mode cleaner ont ensuite été testées et un système d'asservissement automatique de la cavité sur un faisceau de frange noire a été mis au point.

Le faisceau filtré par le mode cleaner doit ensuite être détecté. Le système de lecture du faisceau comprenant les photodiodes, leur électronique et le programme d'acquisition des signaux a été spécifié et mis en place : la détection du faisceau de frange noire est réalisée grâce à seize canaux de lecture.

Ces seize canaux doivent être vus par le reste de l'interféromètre comme un détecteur unique. Les dispersions entre les seize canaux de lectures sont donc corrigées en ligne par le programme d'acquisition. Une procédure de calibration permettant de mesurer les dispersions entre les canaux a donc été mise en place.

Enfin, le bruit de l'ensemble du système de détection a été mesuré. On a en particulier étudié l'influence de ce bruit sur la recherche d'ondes gravitationnelles produites par une coalescence d'étoiles binaires.

Le système de détection sera installé sur le site de l'expérience en 1999 et les premiers tests avec la partie centrale de l'interféromètre VIRGO auront lieu à partir de l'année 2000.

Annexe A

Optique ondulatoire et faisceau Gaussien

A.1 Approximation paraxiale

Les champs électromagnétiques dans le vide obéissent à l'équation de propagation :

$$[\nabla^2 + k^2]\tilde{E}(x,y,z) \;=\; 0 \tag{A.1}$$

où $\tilde{E}(x,y,z)$ est l'amplitude du champ électromagnétique. On considère ici des champs qui se propagent selon la direction z. Il est alors pratique de réécrire l'équation A.1 avec :

$$\tilde{E}(x,y,z) \;=\; \tilde{u}(x,y,z)e^{-jkz}$$

où on extrait de $\tilde{E}(x,y,z)$ l'opérateur de propagation e^{-jkz}. Dans l'hypothèse où la dépendance en z de $\tilde{u}(x,y,z)$ est faible devant le dépendance en x et y, on obtient alors l'équation d'onde dans l'approximation paraxiale [40]:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} - 2jk\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \;=\; 0 \tag{A.2}$$

A.2 Faisceau Gaussien

On peut chercher des solutions à symétrie cylindrique de l'équation A.2 sous la forme :

$$\tilde{u}(x,y,z) \;=\; A(z)e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2\tilde{q}(z)}} \tag{A.3}$$

on trouve alors :

$$\begin{aligned} \tilde{q}(z) &= z + \tilde{q}_0 \\ \frac{A(z)}{A_0} &= \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}(z)} \end{aligned}$$

avec (après un changement d'origine) la valeur initiale imaginaire :

$$\tilde{q}_0 = jz_R = j\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{A.4}$$

$\tilde{q}(z)$ est le rayon de courbure complexe du faisceau. On peut séparer la partie réel et la partie imaginaire de la courbure :

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - j\frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

On a après normalisation de la solution :

$$\tilde{u}(x,y,z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{j\psi(z)}}{w(z)} e^{\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} - jk\frac{x^2+y^2}{2R(z)}}$$

Cette solution correspond à un faisceau ayant un profil Gaussien. Les paramètres importants du faisceau Gaussien peuvent alors s'exprimer en fonction de w_0 et de $\frac{z}{z_R}$ par les formules (figure A.1)[41]:

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \tag{A.5}$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \tag{A.6}$$

$$\psi(z) = \arctan\frac{z}{z_R} \tag{A.7}$$

$w(z)$ et $R(z)$ représentent respectivement la taille et le rayon de courbure du faisceau en fonction de z. En $z = 0$, c'est le waist du faisceau, on a $w = w_0$ et $R = \infty$. La divergence du faisceau est :

$$\theta_w = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{A.8}$$

la zone où $z < z_R$ est appelée la zone de Rayleigh. Lorsque $z \ll z_R$, le faisceau a un rayon de courbure infini et on peut considérer que le faisceau se propage comme une onde plane.

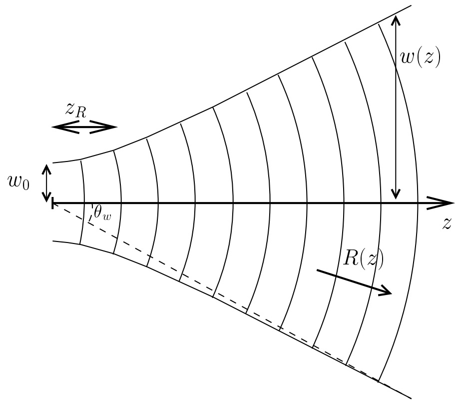


Figure A.1: Paramètre d'un faisceau Gaussien.

A.3 Modes Gaussien transverses

Pour trouver les solutions de l'équation de propagation (A.2) à symétrie non cylindrique, on sépare les dépendances de x et de y dans $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}(x,y,z) \quad = \quad \tilde{u}(x,z)\tilde{u}(y,z).$$

On a alors deux équations de propagation indépendantes pour $\tilde{u}(x,z)$ et $\tilde{u}(y,z)$. On trouve alors une famille de solution [40]:

$$\tilde{u}_n(x,z) \quad = \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{e^{-j(2n+1)\psi(z)}}{2^n n! w(z)}} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) e^{\frac{x^2}{w^2(z)} - jk\frac{x^2}{2R(z)}}$$

où les H_n sont les polynômes d'Hermite :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation de propagation sont alors données par :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{nm}(x,y,z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-j(n+m+1)\psi(z)}}{\sqrt{2^{n+m} n! m!} w(z)} \\ H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) e^{\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} - jk\frac{x^2+y^2}{2R(z)}} \end{aligned} \qquad \text{(A.9)}$$

Cet ensemble de solutions forme une famille orthonormale :

$$\int_x \int_y \tilde{u}_{nm}(x,y,z)\overline{\tilde{u}}_{n'm'}(x,y,z) \quad = \quad \delta_{nn'}\delta_{mm'}$$

Pour un waist donné (c'est-à-dire pour une taille w_0 et une origine $z = 0$) on a donc une base sur laquelle on peut projeter les faisceaux. Dans cette base la composante de la solution $\tilde{u}_{nm}$ est appelée mode d'Hermite-Gauss d'ordre nm où encore TEM_{nm} ("Transverse Electric and Magnetic"). Pour $n = 0, m = 0$, on retrouve le faisceau Gaussien a symétrie cylindrique. Les modes d'ordre supérieur ont un profil Gaussien pondéré par les polynômes d'Hermite.

Les faisceaux d'une même base se propagent de la même façon (même taille $w(z)$ et même courbure $R(z)$) à part un terme de phase appelé phase de Guoy :

$$\psi_{nm}(z) \quad = \quad (n+m+1)\psi(z) \tag{A.10}$$

$$\quad = \quad (n+m+1)\arctan\frac{z}{z_R} \tag{A.11}$$

Lorsque le faisceau est dans la zone de Rayleigh ($z \ll z_R$), tout les modes se propagent avec la même phase.

Annexe B

Cavité optique

B.1 Cavité linéaire

La cavité la plus simple est constituée de deux miroirs se faisant face. Pour qu'elle soit stable, les courbures des miroirs doivent être choisies pour qu'un faisceau ait la même géométrie après un aller et retour dans la cavité c'est-à-dire la même taille et la même courbure (figure B.1). Le waist de la cavité est par définition le waist de ce faisceau. On doit donc avoir [41]:

$$\begin{aligned} R(z_1) &= z_1 + \frac{z_R^2}{z_1} = -R_1 \\ R(z_2) &= z_2 + \frac{z_R^2}{z_2} = R_2 \end{aligned}$$

Le waist de la cavité est par définition le waist de ce faisceau.

Dans le cas particulier d'une cavité plan courbe (figure B.2), le waist de la cavité est

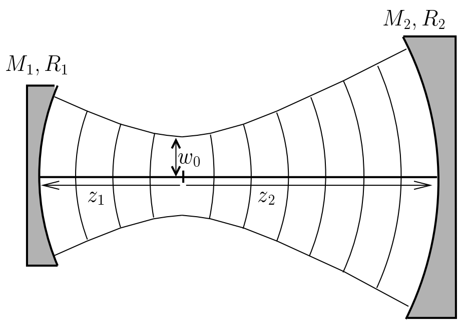


Figure B.1: Cavité optique stable.

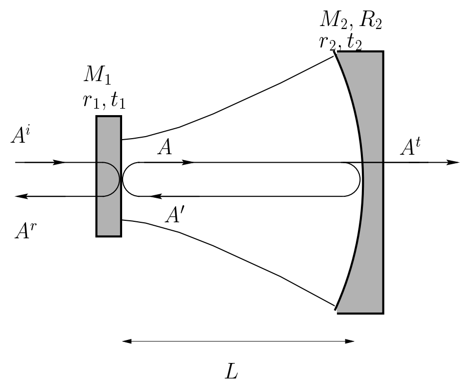


Figure B.2: Cavité Plan-Courbe

situé sur le miroir d'entrée, la cavité est alors décrite par le paramètre :

$$g = 1 - \frac{L}{R_2} \tag{B.1}$$

la taille du waist de la cavité est alors donnée par :

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{g}{1-g}} \tag{B.2}$$

Pour décrire les faisceaux dans une cavité optique, on utilise la base de développement en mode d'Hermite-Gauss associés au waist de la cavité.

$$A = \sum_{nm} A_{nm}\tilde{u}_{nm}$$

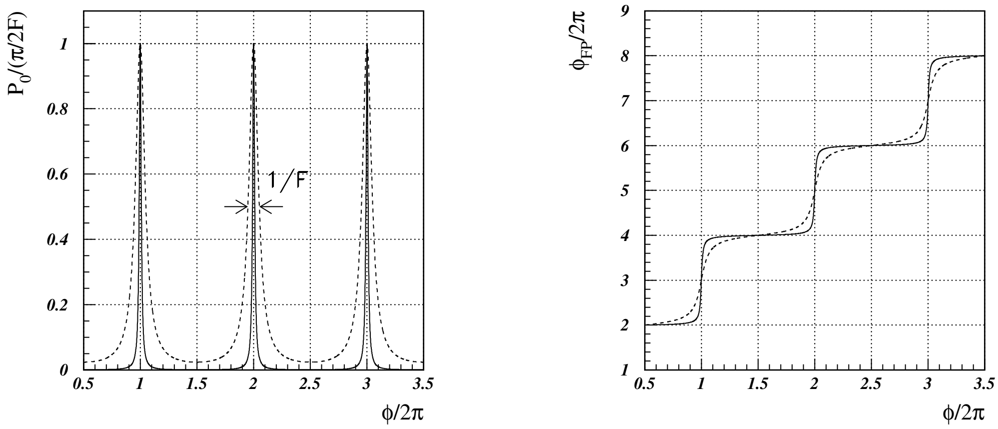
Lorsque la cavité est stable, elle ne couple pas les différents modes d'Hermite-Gauss. On peut alors établir les équations des champs dans la cavité pour chaque TEM_{nm} indépendamment les uns des autres.

Soit A^i l'amplitude d'un TEM_{nm} incident, A l'amplitude du champ dans la cavité et A' l'amplitude du champ A après un aller et retour dans la cavité :

$$\begin{aligned} A &= t_1 A^i - r1A' \\ A' &= -r_2 e^{j\phi} A \end{aligned}$$

où le déphasage ϕ d'un TEM_{nm} lors d'un aller et retour dans la cavité est alors donné par :

$$\begin{aligned} \phi &= 2kL - 2(n+m+1)\arctan\frac{L}{z_R} \\ &= 2kL - 2(n+m+1)\arccos(\sqrt{g}). \end{aligned}$$



(a) (b)

Figure B.3: Puissance stockée (figure a) et déphasage ϕ_{FP} du faisceau réfléchi (figure b) pour des cavités de finesse 50 (trait plein) et 10 (trait pointillé).

r_1 et t_1 sont les coefficients de réflexion et de transmission du miroir d'entrée de la cavité, r_2 est le coefficient de réflexion du miroir de renvoi et L est la distance entre les deux miroirs. En régime stationnaire, le champ A s'écrit :

$$A = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{j\phi}} A^i$$

le champ transmis par la cavité s'écrit donc :

$$A_t = \frac{t_1 t_2 e^{j\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{j\phi}} A^i$$

La puissance stockée dans la cavité peut s'écrire :

$$P = \left(\frac{t_1}{1 - r_1 r_2}\right)^2 \frac{P_0}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2(\phi/2)}$$

où P_0 est la puissance du faisceau TEM_{NM} incident dans la cavité et F la finesse de la cavité :

$$F = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \tag{B.3}$$

La figure B.3.a représente la puissance stockée dans la cavité en fonction de ϕ. La finesse F représente la largeur à mi-hauteur divisée par la distance entre deux résonances. La puissance stockée est maximale quand $\phi = 0(2\pi)$ et vaut :

$$P_{max} = \left(\frac{t_1}{1 - r_1 r_2}\right)^2 P_0$$

on dit alors que la cavité est résonante. Si le miroir de renvoi a une réflectivité de 1, et r_1 est proche de 1, la puissance à la résonance est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{max} &= \frac{1 + r_1}{1 - r_1} P_0 \\ &= \frac{2F}{\pi} P_0 \end{aligned}$$

Le champ réfléchi par la cavité est lui donné par :

$$\begin{aligned} A^r &= r_1 A^i + t_1 A' \\ &= \frac{r_1 - r_2(r_1^2 + t_1^2)e^{j\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{j\phi}} A^i \end{aligned} \tag{B.4}$$

Lorsque le miroir de renvoi de la cavité est très réfléchissant ($r_2 \sim 1$), l'essentiel de la puissance est réfléchie par la cavité. La cavité est vue par le faisceau incident comme un miroir de réflectivité :

$$r_{FP} = \frac{A^r}{A^i} \tag{B.5}$$

$$= \rho_{FP} e^{i\phi_{FP}} \tag{B.6}$$

où ρ_{FP} représente les pertes dans la cavité et ϕ_{FP} le déphasage du faisceau sortant de la cavité par rapport au faisceau incident.

Lorsque les pertes sur le miroir d'entrée sont négligeables ($r_1^2 + t_1^2 = 1$) et que le miroir de sortie est parfaitement réfléchissant ($r_2 = 1$), on a (équation B.4):

$$\rho_{FP} = 1 \tag{B.7}$$

$$\phi_{FP} = \pi + 2 \arctan\left(\frac{2F}{\pi} \tan(\phi/2)\right) \tag{B.8}$$

La figure B.3.b représente ϕ_{FP} en fonction de la longueur de la cavité.

B.2 Cavité triangulaire

Avec une cavité linéaire, les faisceaux non résonants dans la cavité sont réfléchis vers le faisceau incident. Une cavité triangulaire permet de dissocier le faisceau réfléchi et le

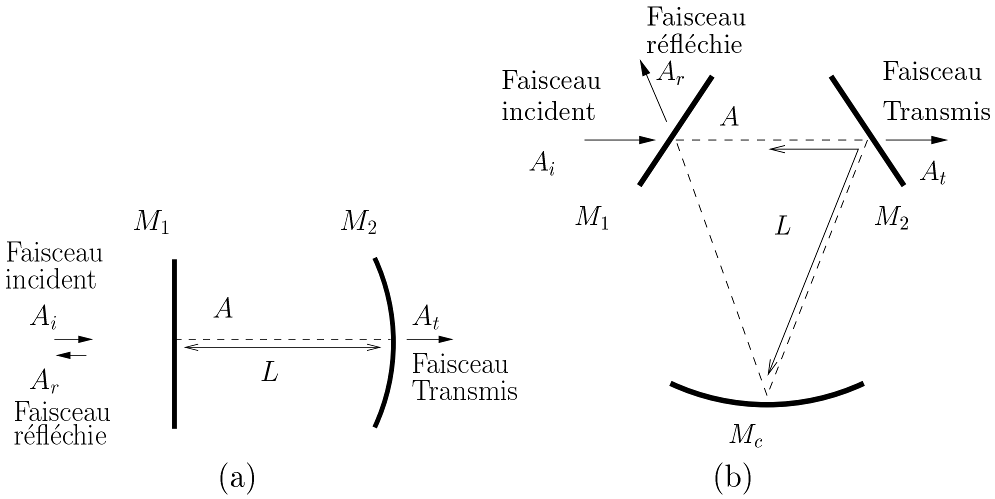


Figure B.4: Schéma d'une cavité linéaire (a) et d'une cavité triangulaire (b). Dans une cavité triangulaire, les faisceaux ne résonnant pas dans cavité sont réfléchis dans une autre direction.

faisceau transmis de la cavité du faisceau incident (figure B.4). Si l'angle d'incidence sur le miroir courbe reste faible, la cavité triangulaire a les mêmes caractéristiques géométriques que la cavité linéaire.

Soit A_i, un champ TEM_{nm} incident dans la cavité. Le champ résonant, le champ transmis et champ réfléchi par la cavité sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} A &= \frac{A_i t_1}{1 + r_2 r_1 r_c e^{i\phi}} \\ A_t &= \frac{A_i t_1 t_2}{1 + r_2 r_1 r_c e^{i\phi}} \\ A_r &= \frac{A_i t_1^2 r_2 r_c e^{i\phi}}{1 + r_2 r_1 r_c e^{i\phi}} \end{aligned}$$

où r_1,t_1 et r_2,t_2 sont les réflectivités des miroirs d'entrée et de sortie et r_c la réflectivité du miroir de renvoi. La puissance transmise est alors donnée par

$$P_t = \frac{P_0 t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + \frac{4 r_1 r_2 r_c}{(1 - r_1 r_2 r_c)^2} \cos^2(\frac{\phi}{2})}.$$

où P_0 est la puissance incidente du TEM_{nm}. Avec $r_1 = r_2$ et $r_c = 1$ et si l'on suppose que l'on a aucune perte ($r_i^2 + t_i^2 = 1$), on a

$$P_t = \frac{P_0}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \cos^2(\frac{\phi}{2})}. \tag{B.9}$$

où $F = \frac{\pi r_1}{1-r_1^2}$ est la finesse de la cavité. Le déphasage ϕ est donné par :

$$\phi = 2kL - 2(n+m+1)\arccos(\sqrt{g}) + \phi_n^t \tag{B.10}$$

où L est la longueur de la cavité. Par rapport à la cavité linéaire on a un terme ϕ_n^t supplémentaire. Comme on a un nombre impair de miroirs, les TEM_{nm} antisymétriques par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de la cavité (n impair) ont un déphasage π supplémentaire par rapport au TEM_{nm} symétrique par rapport à cet axe (n pair). Le terme ϕ_n^t est donc égal à π lorsque n est impair [42].

Bibliographie

[1] J.H Taylor, J.M. Weisberg, Astrophys. J., **345**, 434 (1989)

[2] A. Abramovici *et al.*, Science **256**, 325 (1992)

[3] collaboration VIRGO, "Proposal for the construction of a large interferometric detector of gravitational waves", (1990)

[4] S. Weinberg "GRAVITATION AND COSMOLOGY", J. Wiley & Sons (1972)

[5] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "GRAVITATION", Freeman & co (1973)

[6] P. Saulson, "INTERFEROMETRIC GRAVITATIONAL WAVE DETECTORS", World Scientific (1994)

[7] K. Thorne in "300 years of gravitation", Cambridge university press, (1987)

[8] J. Weber, Phys. Rev. Lett., **117**, 306, (1960)

[9] M.E. Gertsenshtein, V.I. Pustovoit, Soviet Physics - JETP, **16**, 433, (1962)

[10] R. L. Forward et G.E. Moss, Bulletin of the American Physical Society, **17** 1183(A), (1972)

[11] J.Y. Vinet, J. Physique, **47**, 639, (1986)

[12] J.Y. Vinet, C.N. Man, A. Brillet and B. Meers, Phys. Rev. **D38**, 433 (1988)

[13] collaboration VIRGO, "Final Design Report", (1997)

[14] J.M. Mackowski, L. Pinard, L. Dognin, P. Ganau, B. Lagrange, C. Michel, M. Morgue, à parîtres dans Appl. Surf. Sci.

[15] Groupe de Pise, "Seismic isolation : the use of Blade Springs", note VIRGO, (1994)
Groupe de Pise, "Blade springs: transfer function measurement performed on a two stage suspension", note VIRGO (1994)

[16] H. B. Callen and T. A. Welton, Phys. Rev., **83**, 34, (1951)

[17] P. Saulson, Phys. Rev. D **42**, 2437 (1990)

[18] G.Cagnoli *et al.*, Phys. Lett. A **213**, 245 (1996)

[19] F.Bondu, J.Y Vinet, Phys. Lett. A **198**, 74 (1995)

[20] R. Flaminio, H. Heitmann, Phys. Lett. A **214**, 112 (1996)

[21] B. Caron *et al.*, Astropart. Phys., **6**, 245 (1997)

[22] B. Caron *et al.*, Astropart. Phys., **10**, 369 (1999)

[23] M. Gounelle, V. Loriette, A.C. Boccara and R. Nahoum, Measur. Sci. Tech. **7**, 1032 (1991).

[24] B. Meers , Optics Comm, **47**, 237, (1983)

[25] A. Domijon, Thèse, Université de Savoie (1996)

[26] F.Bellacia *et al.*, Nucl. Instr and Meth. A **413**, 141 (1998)

[27] R. Boula-Picard, rapport de stage, (1998)

[28] A. Gillespie and F. Raab, Phys. Rev. D **52**, 577 (1995)

[29] collaboration LIGO et VIRGO "Specification of a Common Data Frame Format for Interfermetric Gravitational Waves Detector", document VIRGO, (1997)

[30] D. Boget *et al.*, "Digital Optical Link user's Manuel", note VIRGO (1998)

[31] D. Boget *et al.*, "The VIRGO Timing System", note VIRGO, (1998)

[32] B.S. Sathyaprakash et S. V. Dhurandhar, Phys. Rev. D **44**, 3819 (1991)
S. V. Dhurandhar et B.S. Sathyaprakash, Phys. Rev. D **49**, 1707 (1994)

[33] N. Wiener, "The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Application", Wiley (1949)

[34] B. Allen, "GRASP: a data analysis package for gravitational wave detection", (1998)

[35] D. Verkindt, Thèse, Université de Savoie, (1993)

[36] C. Cutler *et al.*, Phys. Rev. Lett., **70**, 2984 (1993)

[37] R. Balasubramanian, B.S. Sathyaprakash et S. V. Dhurandhar, Phys. Rev. D **53**, 3033 (1996)

[38] R. Flaminio *et al.*, Astropart. Phys. **2**, 235 (1994)

[39] S.D. Mohanty et S. V. Dhurandhar, Phys. Rev. D **54**, 7108 (1996)

[40] A. Siegmann, "LASERS", University Science Books (1986)

[41] H. Kogelnik et T. LI, Applied Optics, **10**, 1550, (1966)

[42] A. Collins *et al.*, Applied Optics, **3**, 1314, (1964)

Résumé

VIRGO est un détecteur d'ondes gravitationnelles basé sur un interféromètre de Michelson ayant des bras de 3 km de long. Cette thèse porte sur l'étude du système qui, en mesurant la puissance du faisceau transmis par l'interféromètre, détecte le passage d'une onde gravitationnelle.

Grâce à une simulation du détecteur, on montre que le filtrage du faisceau avec une cavité optique permet d'améliorer la sensibilité de l'interféromètre. Les performances du filtrage optique de cette cavité sont ensuite mesurées grâce à un interféromètre de test. Un système de contrôle automatique de la longueur de la cavité est enfin présenté. Il est basé sur l'analyse, grâce à une caméra CCD, de la forme du faisceau.

Le système de lecture du faisceau est ensuite étudié pour gérer la dynamique du signal sans dégrader la sensibilité du détecteur. On définit en particulier la mise en forme du signal venant de chaque photodiode avant sa numérisation. Une procédure de calibration permettant de mesurer et de corriger en ligne les dispersions entre les canaux de lectures est présentée.

La mesure du bruit du système de lecture permet d'estimer sa contribution à la sensibilité du détecteur. Un algorithme de recherche de signaux produit par une coalescence d'étoiles binaires est mis en place. Il est ensuite utilisé pour étudier l'influence du bruit du système de détection dans ce type de recherche.

Mots clés

VIRGO, ondes gravitationnelles, interféromètre, cavité optique, système de détection, coalescence d'étoiles binaires, algorithme de filtrage optimal.

Summary

VIRGO is a gravitational wave detector based on a Michelson interferometer with arms which are 3 km long. This thesis fouses on the study of the interferometer signal detection system i.e. the system which detects the gravitational wave signal by measuring the ITF transmitted beam power.

By means of a simulation of the interferometer, it is shown that the optical filtering of the transmitted beam with a ring cavity gives an improvement in the interferometer sensitivity. The performance of this cavity is tested with a table-top interferometer. An automatic locking procedure of the cavity is then developed using a beam profile analysis with a CCD camera.

The light detection system is studied to deal with the signal dynamic range without degrading the VIRGO sensitivity. First the signal shaping needed before digitization is defined. Then a calibration procedure is developed to measure the dispersion between the different readout channels and to correct it on line.

Finally the measurement of the detection system noise is performed and it's contribution to the VIRGO sensitivity is discussed. A coalescing binary search algorithm is implemented and used to study the detection system noise contribution to this kind of search.

Key-words

VIRGO, gravitational wave, interferometer, optical cavity, detection system, coalescing binaries, optimal filtering.