Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules

Thèse
présentée à l'Université de Savoie
pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences,
Spécialité Physique des Particules
par

Virginio Sannibale

Le système d'alignement du banc de détection de l'expérience VIRGO de recherche d'ondes gravitationnelles.

soutenue le 26 juin 1998 devant la commission d'examen

Jean-Yves Bigot	(Rapporteur)
Raffaele Flaminio	
Benoît Mours	(Directeur de thèse)
Piero Rapagnani	(Rapporteur)
Robert Zitoun	(Président)

Introduction

L'expérience franco-italienne VIRGO est actuellement en cours de construction et d'installation à Cascina près de Pise en Italie. C'est un projet commun du CNRS et de l'INFN qui a été approuvé par ces deux organismes en 1992 et 1993. Son but premier est la détection des Ondes Gravitationnelles émises par diverses sources cosmiques.

Le principe de détection consiste à mesurer les perturbations de la métrique de l'espace temps, c'est-à-dire les variations relatives de distance entre deux masses tests. Compte tenu de la faiblesse des signaux attendus il est nécessaire de construire un instrument ayant la meilleure sensibilité possible. Il faut donc réaliser un instrument capable de mesurer de très petites variations de très grandes longueurs. La méthode retenue est la réalisation d'un grand interféromètre de Michelson de 3km de long dont les miroirs suspendus constitueront les masses tests.

Le banc de détection de VIRGO est le banc optique situé en sortie de l'interféromètre. La fonction de ce banc est de mesurer au moyen de photodiodes la puissance des faisceaux sortant de l'interféromètre, mais aussi d'améliorer le contraste en filtrant spatialement, avec une cavité résonnante, le faisceau de 'frange noire'. Ce filtre doit être en permanence parfaitement aligné par rapport à l'interféromètre et aussi isolé des bruits ambiants dont le bruit sismique. Ce filtre est donc installé sur un banc optique suspendu, fonctionnant sous vide. Ce travail de thèse est constitué de l'étude et la réalisation du système d'alignement de ce banc.

Le premier chapitre est consacré à la présentation du cadre de ce travail, c'est-à-dire les ondes gravitationnelles et l'expérience VIRGO.

Puis le deuxième chapitre décrit le banc de détection, ses fonctionnalités, et ses différents éléments.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude du télescope d'entrée du banc de détection. C'est un élément clef qui sépare les faisceaux sortant de l'interféromètre et adapte leur taille à celle des éléments du banc dont les photodiodes à quadrants chargées de l'alignement.

Le quatrième chapitre détaille les deux systèmes de mesure de position du banc: le système local qui utilise une caméra CCD et le système global qui utilise des photodiodes à quadrants.

Le cinquième chapitre retrace les procédures d'alignement manuel mises en oeuvre. Un des outils de base, les montures de miroir motorisées par des moteurs piezo-électriques, est décrit en détail.

Enfin le dernier chapitre est consacré à l'alignement automatique du banc suspendu. Les techniques d'asservissement utilisées ainsi que les résultats obtenus sont présentées.

Table des Matières

Chapitre 1

Les ondes gravitationnelles

Introduction

Dans ce chapitre seront présentées les bases de la théorie des ondes gravitationnelles, l'un des aspects les plus intéressants de la relativité générale, afin d'en permettre une compréhension phénoménologique. Après cette partie théorique, les principales sources d'ondes gravitationnelles que l'on peut espérer détecter seront décrites de manière très succincte. L'avant-dernière section sera consacrée à l'une des méthodes de détection des ondes gravitationnelles les plus prometteuses, qui utilise un interféromètre de Michelson-Morley modifié afin d'en augmenter la sensibilité. Enfin la dernière section tentera de présenter en quelques pages l'expérience franco-italienne VIRGO qui est en cours de construction, pour la détection des ondes gravitationnelles.

1.1 La relativité générale et les ondes gravitationnelles

La théorie de la relativité générale est fondée sur l'idée de base que la matière courbe l'espace-temps et qu'un corps soumis aux seules forces gravitationnelles suit nécessairement la courbure de l'espace.

Les propriétés physiques des champs gravitationnels sont donc ramenées aux propriétés géométriques de l'espace-temps, à travers la définition de sa métrique (généralisation de celle de la relativité restreinte).

On définit l'intervalle infinitésimal de distance ds entre deux événements, au moyen de la forme quadratique

$$ds^2 = g^{\nu\mu}\left(x^\eta\right) dx_\nu dx_\mu, \tag{1.1}$$

où $g^{\nu\mu}$ est le tenseur métrique définissant la courbure de l'espace-temps, qui dépend du quadrivecteur position x^η et qui doit localement être égal au tenseur $\eta^{\nu\mu}$ de la métrique galilléenne, c'est-à-dire

$$g^{\nu\mu} \simeq \eta^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(localement).} \tag{1.2}$$

En général il faut donc déterminer les relations entre le tenseur $g^{\nu\mu}$ et le champ gravitationnel, afin de calculer la métrique.

Les équations du champ gravitationnel

Les équations du champ gravitationnel qui sont déduites du principe de l'action minimale relient la métrique à l'énergie du système physique considéré, ont la forme suivante [1]

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{1.3}$$

où $G = 6.6720(41) \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-1}}$ est la constante gravitationnelle, c la vitesse de la lumière, $R_{\mu\nu}$ le quadritenseur de Ricci, $T_{\mu\nu}$ le quadritenseur impulsion-énergie et T sa trace.

Les 16 relations (1.3), dites *équations d' Einstein* ont les propriétés suivantes:

- c'est un système d'équations aux dérivées partielles,
- elles ne sont pas linéaires,
- le nombre d'équations indépendantes est 10, étant donné les propriétés de symétrie des quadritenseurs,
- elles ont comme limite classique l'équation de la gravitation de Newton

  $$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{1.4}$$

  où ρ est la distribution de matière et Φ le champ gravitationnel.

La linéarisation dans des conditions particulières de l'équation (1.3) conduit au concept d'onde gravitationnelle et donc à la définition des équations des ondes gravitationnelles.

1.1.1 L'équation des ondes gravitationnelles

L'effet d'un champ gravitationnel engendré par des corps lointains peut être localement décrit de manière approchée par une perturbation $h^{\nu\mu}$ à la métrique galilléenne $\eta^{\nu\mu}$. Le tenseur métrique dans ses composantes covariantes s'écrit alors

$$g_{\nu\mu} = \eta_{\nu\mu} + h_{\nu\mu}, \qquad |h_{\nu\mu}| \ll 1. \tag{1.5}$$

En substituant le quadritenseur de Ricci approché au premier ordre en $h_{\nu\mu}$ dans l'équation d'Einstein et après des transformations sur $h_{\nu\mu}$, on obtient l'équation des ondes gravitationnelles

$$\Box h_{\nu\mu} = \frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\nu\mu} - \frac{1}{2}T\right). \tag{1.6}$$

Solution dans le vide

En l'absence de champ gravitationnel, l'équation (1.6) devient

$$\Box h_{\nu\mu} = 0. \tag{1.7}$$

En considérant la solution générale de l'équation d'onde, on obtient

$$h_{\nu\mu} = h_{\nu\mu}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}), \qquad \omega = \frac{\left|\vec{k}\right|}{c}, \tag{1.8}$$

qui montre que les ondes gravitationnelles se propagent à la vitesse de la lumière.

Des transformations infinitésimales de jauge

$$\begin{aligned} h^{\mu}_{\mu} &= 0, \qquad \text{(trace nulle)} \\ h_{0i} &= 0, \qquad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1.9}$$

appelée jauge transverse sans trace "TT", annulent certaines composantes du tenseur. Si l'on considère le cas particulier

$$\vec{k} = k\hat{x}, \qquad \text{(vecteur d'onde parallèle à l'axe Ox)}, \tag{1.10}$$

l'équation (1.9) devient

$$h_{22} + h_{33} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad h_{22} = -h_{33} = h_+, \tag{1.11}$$

La condition de symétrie du quadritenseur métrique impose

$$h_{23} = h_{32}, \qquad \Rightarrow \qquad h_{23} = h_{32} = h_\times, \tag{1.12}$$

et on obtient

$$h_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & h_+ \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

1.2 Les sources probables d'ondes gravitationnelles

La résolution de l'équation (1.6), dans le cas d'un champ gravitationnel créé par des corps ayant une vitesse $v << c$, conduit à l'expression [1]

$$h_{\nu\mu} = \frac{2}{3r}\frac{G}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[D_{\nu\mu}\left(t - r/c\right)\right]^{TT}, \tag{1.14}$$

où r est la distance entre la source et le point d'observation et $D_{\nu\mu}$ est le quadritenseur moment quadrupolaire, calculé au temps retardé $t - r/c$ et dans la jauge "TT". En notant ρ la distribution de masse, $D_{\nu\mu}$ est donnée par la formule

$$D_{\nu\mu} = \int \left(3x_\nu x_\mu - r^2\delta_{\nu\mu}\right)\rho\left(x_\sigma\right)dV, \tag{1.15}$$

où l'intégration est faite dans l'espace euclidien, c'est-à-dire $dV = dx_1 dx_2 dx_3$.

Il est évident que l'amplitude de l'onde gravitationnelle est faible en raison du terme

$$\frac{G}{c^4} = 10^{-43}\ \mathrm{m^2kg}. \tag{1.16}$$

Une formule permettant une estimation grossière de l'amplitude h est obtenue en identifiant la dérivée seconde de $D_{\nu\mu}$ à la fraction de l'énergie cinétique $\Delta\mathcal{E}$ provenant des mouvements asymétriques du corps

$$h_{\nu\mu} \sim \frac{1}{r}\frac{G}{c^4}\Delta\mathcal{E}. \tag{1.17}$$

Dans la suite sont décrites quelques-unes des sources d'ondes gravitationnelles qui peuvent être détectées par des antennes gravitationnelles, ainsi qu'un exemple simple mettant en évidence l'énorme difficulté de produire des ondes gravitationnelles mesurables sur terre.

1.2.1 Les étoiles supernovae

Les étoiles dont la masse est telle qu'elles deviennent des supernovae et qui s'effondrent de façon asymétrique produisent des ondes gravitationnelles.

Selon le modèle courant, le signal émis a une durée de l'ordre de la milliseconde, donc son spectre se situe de zéro à quelques kilo-Hertz.

La formule permettant d'estimer l'amplitude du rayonnement est [3]

$$h_{supernovae} \sim 2.7 \cdot 10^{-20} \left(\frac{\Delta\mathcal{E}}{M_{\odot}}\right) \left(\sqrt{\frac{1\ kHz}{\nu}}\right) \left(\frac{10\ Mpc}{r}\right), \tag{1.18}$$

où ν est la fréquence considérée, $\Delta\mathcal{E}$ l'énergie consacrée à la production d'onde gravitationnelle et r la distance de l'objet par rapport à la terre.

Le nombre d'événements supernovae estimé dans notre galaxie est de 2 à 3 par siècle. Si l'on considère l'amas de galaxies le plus proche de nous, l'amas de la Vierge distant de 10 Mpc et qui contient environ 2500 galaxies, le nombre d'événements supernovae s'élève à quelques dizaines par an.

1.2.2 Les systèmes binaires

En raison de leur asymétrie sphérique, les systèmes binaires sont des sources d'ondes gravitationnelles. L'émission d'ondes provoque un perte d'énergie qui fait que les deux corps se rapprochent jusqu'à entrer en coalescence.

A la différence des autres cas, l'estimation de l'amplitude de l'onde gravitationnelle est facilitée par la possibilité d'étudier en détail l'évolution d'un système binaire.

L'étude du système (PSR1913+16) composé de deux pulsars, conduite par Taylor et Weisberg [27] sur des données prises pendant 10 ans à partir de 1974, a montré que la décroissance de la période orbitale du système s'explique très bien, si l'on considère que la perte d'énergie est due à l'émission d'ondes gravitationnelles.

Dans ce cas la formule qui donne l'amplitude de h est

$$h_{sys.bin} \sim 10^{-23} \left(\frac{m_1 + m2}{M_\odot}\right)^{2/3} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 M_\odot + m_2 M_\odot}\right) \left(\sqrt{\frac{1\ kHz}{\nu}}\right) \left(\frac{10\ Mpc}{r}\right),$$

où m_1, m_2 sont les masses des deux corps du système binaire.

1.2.3 Les pulsars

Les pulsars qui présentent une asymétrie dans leur distribution de masse par rapport à l'axe de rotation, sont des sources d'ondes gravitationnelles.

En indiquant par I le moment d'inertie autour de l'axe de rotation et par ε le facteur d'asymétrie, la formule donnant une estimation de l'amplitude de l'onde est [3]

$$h_{pulsar} \sim 8 \cdot 10^{-24} \left(\frac{I}{10^{38} kgm^2}\right) \left(\sqrt{\frac{\nu}{10\ kHz}}\right)^2 \left(\frac{10\ kpc}{r}\right) \left(\frac{\varepsilon}{10^{-6}}\right),$$

Le paramètre ε est très difficile à estimer et augmente encore l'incertitude sur l'amplitude de h_{pulsar}.

Le nombre de pulsars répertoriés est d'environ 600 et le nombre de pulsars dans notre galaxie est estimé de l'ordre de 10^5. Sur ce nombre on estime que 5% ont une fréquence telle qu'ils peuvent être dans la bande de VIRGO.

1.2.4 Sources cosmologiques

De manière analogue au bruit de fond cosmique micro-onde né après le big bang, on s'attend aussi à un fond dû aux ondes gravitationnelles [4]

L'amplitude d'un tel fond est très incertaine en raison essentiellement de la mauvaise connaissance des étapes initiales de l'univers. L'estimation de l'amplitude du bruit de fond dans le domaine des très basses fréquences donne

$$h_{backgr.} \sim 10^{-17} \qquad @ \qquad 10^{-5}\ \text{Hz} \tag{1.19}$$

La possibilité de faire des mesures à des fréquences aussi basses, n'est probablement accessible que dans un milieu où les perturbations de la gravité locale sont très faibles, par exemple en utilisant un interféromètre loin de la terre en orbite autour du soleil (voir le projet LISA [12]).

1.2.5 Masses tournantes

La génération d'ondes gravitationnelles en laboratoire est actuellement hors de portée. En effet, si l'on considère par exemple deux masses de 1000 kg à une distance de 2 m, tournant à une pulsation de 1000 tours/s, on obtient

$$h_{lab} \simeq 2.6 \cdot 10^{-33} \frac{1}{r}, \qquad r >> \frac{c}{\nu} \tag{1.20}$$

où r est la distance au centre de masse du système et ν la fréquence de l'onde gravitationnelle. Pour $r = 3 \cdot 10^5$ m on obtient

$$h_{lab} \simeq 10^{-38}, \tag{1.21}$$

ce qui est une valeur trop faible pour être détectée (d'au moins 16 ordres de grandeur pour un interféromètre comme VIRGO).

1.3 La détection d'ondes gravitationnelles

Dans le cadre de la Relativité Générale une particule massive soumise aux seules forces gravitationnelles est dite libre ou en chute libre. Une telle particule en chute libre suit une courbe quadrimensionnelle de l'espace-temps (déterminée par les conditions initiales) appelée géodésique, qui est déformée par le passage d'une onde gravitationnelle.

Il faut donc déterminer la perturbation provoquée par l'onde sur la géodésique pour pouvoir construire un système de détection de ces ondes.

1.3.1 L'équation de la déviation géodésique

La formule donnant la variation de distance ξ^μ entre deux géodésiques, appelée *équation de la variation géodésique*, s'écrit [1]

$$\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial s^2} + \xi^\nu R^\mu_{\sigma\nu\tau} u^\sigma u^\tau = 0, \tag{1.22}$$

où $R^\mu_{\nu\sigma\tau}$ est le tenseur de Riemann, qui contient l'information sur la courbure de l'espace-temps. Dans le cas d'un champ faible, en supposant que la vitesse v du corps qui suit la courbe géodésique est très inférieure à c, on a

$$u^\mu \simeq (1, 0, 0, 0). \tag{1.23}$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation (1.22), on obtient

$$\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial s^2} + \xi^\nu R^\mu_{0\nu 0} = 0. \tag{1.24}$$

En écrivant le tenseur de Riemman en terme du tenseur métrique, et en négligeant les termes du deuxième ordre en $h_{\nu\mu}$ on a dans le cas d'une onde gravitationnelle qui se propage selon l'axe Ox

$$R^{\mu}_{0\sigma 0} = -\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}h_{\sigma\nu,0}\right), \tag{1.25}$$

où $g^{\mu\sigma}$ est le tenseur métrique non perturbé. En reportant dans l'équation (1.24) on obtient

$$\frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial s^2} - \xi^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x^0}\right) = 0. \tag{1.26}$$

Si $h^{\mu\nu}$ est une perturbation à la métrique galilléenne, on a

$$ds = c\sqrt{g_{00}}dt \simeq cdt, \tag{1.27}$$

qui conduit à l'équation recherchée

$$\frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\xi^{\nu}\frac{\partial^2 h^{\mu}_{\nu}}{\partial t^2}. \tag{1.28}$$

La relation précédente exprime donc la variation de distance entre deux courbes géodésiques due à la perturbation h^{μ}_{ν} de la métrique galilléenne provoquée par une onde gravitationnelle se propageant le long de l'axe Ox.

1.3.2 Effet d'une onde gravitationnelle sur des masses libres

Soient deux points massifs à une distance l sur l'axe z et une onde gravitationnelle se propageant dans la direction x telle que la perturbation sur le quadritenseur $g_{\nu\mu}$ soit

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_{+} & h_{\times} \\ 0 & 0 & h_{\times} & h_{+} \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation (1.28) et en considérant que

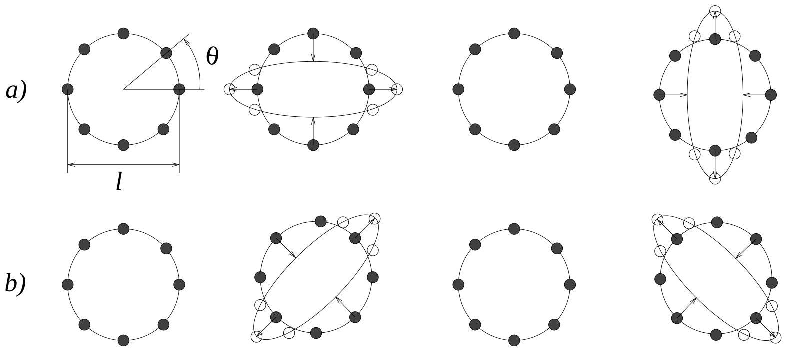

Figure 1.1: Déformations d'un anneau de masses libres, produit par une onde gravitationnelle sinusoïdale à des instants différents pour les deux états de polarisation a) $h_+ \neq 0, h_\times = 0$, b) $h_+ = 0, h_\times \neq 0$.

$$\xi^\nu = (\xi^0, \xi^1, \xi^2 + l, \xi^3), \tag{1.30}$$

on obtient le système d'équations différentielles du deuxième ordre

$$\begin{cases} \xi^0 &= 0 \\ \xi^1 &= 0 \\ \xi^2 &= \dfrac{1}{2}\left[(\xi^2 + l)h_+ + \xi^2 h_\times\right] \\ \xi^3 &= \dfrac{1}{2}\left[(\xi^2 + l)h_\times - \xi^3 h_+\right] \end{cases} . \tag{1.31}$$

L'intégration du système avec les conditions initiales suivantes:

$$\xi^\nu(0) = \dot{\xi}^\nu(0) = 0,$$

$$h_\times(0) = \dot{h}_\times(0) = 0, \tag{1.32}$$

$$h_+(0) = \dot{h}_+(0) = 0, \tag{1.33}$$

donne enfin

$$\begin{aligned} \xi_y(t) &\simeq \frac{1}{2}\, l\, h_+(t), \\ \xi_z(t) &\simeq \frac{1}{2}\, l\, h_\times(t). \end{aligned} \tag{1.34}$$

La variation de distance entre deux géodésiques, produite par la perturbation d'une onde gravitationnelle, est donc proportionelle à la leur distance.

Il existe deux modes d'oscillation selon l'état de polarisation de l'onde gravitationnelle:

+ oscillation sur l'axe y,

× oscillation sur l'axe z.

Considérons maintenant un anneau de points massifs en chute libre (voir figure 1.1) on a

$$\xi^{\nu} = (\xi^0, \xi^1, \xi^2 + l\cos\theta, \xi^3 + l\sin\theta). \tag{1.35}$$

L'intégration de l'équation (1.31) avec l'équation (1.35) et les mêmes conditions initiales qu'en (1.32) donne

$$\begin{aligned} \xi_y(t) &\simeq \frac{1}{2}\, l\, \left(h_+(t)\cos\theta + h_\times(t)\sin\theta\right), \\ \xi_z(t) &\simeq \frac{1}{2}\, l\, \left(h_\times(t)\cos\theta - h_+(t)\sin\theta\right). \end{aligned} \tag{1.36}$$

Dans ce cas on aura pour chaque polarisation les déformations suivantes:

+ l'anneau se déforme comme une ellipse avec les axes orientés comme ceux du repère;

× l'anneau se déforme comme une ellipse avec les axes orientés à $\pi/4$ par rapport à ceux du repère.

Sur la figure 1.1 sont montrées les déformations de l'anneau de masses soumis à une onde gravitationnelle sinusoïdale pour les deux états de polarisation.

1.3.3 Mise en évidence avec l'interféromètre de Michelson-Morley

Soit un interféromètre de Michelson-Morley [6] constitué de deux bras de longueur l et $l+\Delta l$ correspondant aux distances de la lame séparatrice M_{bs} aux deux miroirs M_1 et M_2 (voir figure 1.2). Si l'on suppose qu'en entrée de l'interféromètre est envoyée une onde plane monochromatique $E^{(in)}$ de longueur d'onde λ

$$E^{(in)} = E_0 e^{i\,(\omega t - kz)}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega = 2\pi\frac{c}{\lambda}, \qquad E_0 \in \mathbb{R}, \tag{1.37}$$

l'onde plane sortante $E^{(out)}$ sera le résultat de l'interférence des faisceaux réfléchis par M_1 et M_2.

Si l'on note r_{bs} et t_{bs}, les coefficients de réflexion et de transmission de la lame séparatrice et r_1 et r_2 les coefficients de réflexion de M_1 et de M_2, on a

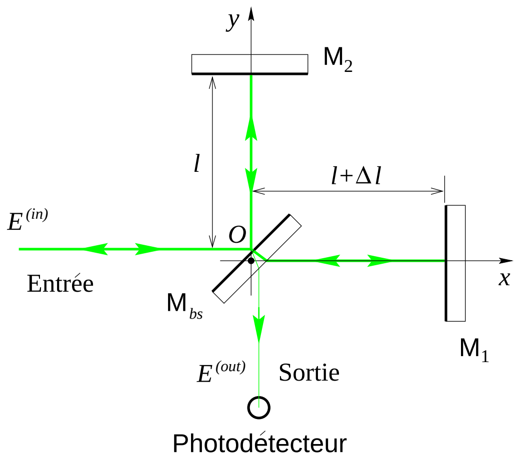

Figure 1.2: Interféromètre de Michelson.

$$E^{(out)} = E_0 e^{i(\omega t+\phi)} r_{bs} t_{bs} \left(r_1 + r_2 e^{2i\Delta\phi}\right), \tag{1.38}$$

où ϕ est la phase commune aux deux faisceaux et $\Delta\phi = k\Delta l$ la différence de phase due à la différence de chemin optique Δl .

Le module au carré du champ $E^{(out)}$ donne l'intensité du champ sortant, c'est-à-dire

$$I_{out} = I_{in} r_{bs}^2 t_{bs}^2 \left[r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(k\Delta l)\right]. \tag{1.39}$$

Si l'on définit le contraste de l'interféromètre $\mathcal{C}$ en terme des puissances maximale et minimale en sortie de l'interféromètre

$$\begin{aligned} P_{max} &= P_{in} r_{bs}^2 t_{bs}^2 (r_1 + r_2)^2, \qquad 2k\Delta l = 2\pi n \qquad \text{frange blanche} \\ P_{min} &= P_{in} r_{bs}^2 t_{bs}^2 (r_1 - r_2)^2, \qquad 2k\Delta l = 2\pi(n+1) \qquad \text{frange noire} \end{aligned}$$

on a[1]

$$\mathcal{C} \stackrel{def.}{=} \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}} = 2\frac{r_1 r_2}{r_2^2 + r_1^2}, \tag{1.40}$$

et la puissance reçue par le photodétecteur peut être écrite de la façon suivante

[1]Dans le cas d'un interféromètre réel, le contraste ne dépend pas seulement de la réflectivité des miroirs, mais aussi de plusieurs facteurs comme l'aberration du front d'onde des faisceaux, due aux surfaces des miroirs, qui détériore l'interférence destructive et donc le contraste.

$$P_{out} = P_0 \left[1 + \mathcal{C} \cos\left(2k\Delta l\right)\right], \qquad P_o = P_{in} r_{bs}^2 t_{bs}^2 (r_1^2 + r_2^2), \tag{1.41}$$

où P_{in} est la puissance incidente sur l'interféromètre.

La variation de puissance en fonction de la différence de chemin optique est

$$\frac{dP_{out}}{d\Delta l} = P_0 \mathcal{C} \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(2k\Delta l\right) \tag{1.42}$$

et on peut donc mesurer la variation de longueur d'un bras de l'interféromètre de Michelson-Morley en mesurant la variation de puissance en sortie. Le maximum de sensibilité est obtenu en se placent sur la frange noire ($2k\Delta l = \pi$) et dans ce cas

$$\frac{dP_{out}}{d\Delta l} \simeq -P_0 \mathcal{C}\, k^2 \Delta l. \tag{1.43}$$

Effet de l'onde gravitationnelle

Le passage d'une onde gravitationnelle sur l'interféromètre produit un déplacement des miroirs M_1 et M_2 par rapport à M_{bs} et la variation de puissance en sortie contient donc l'information sur l'onde gravitationnelle.

D'après l'équation (1.36) et dans le cas d'une polarisation + par rapport au repère de la figure 1.2, on a

$$\Delta l(t) = \frac{1}{2} l h_+(t), \tag{1.44}$$

et donc pour amplifier l'effet de la déformation de la métrique h_+ il faut trouver un moyen d'augmenter la longueur l.

L'interféromètre de Michelson avec des lignes à retard

Pour augmenter la distance l dans un espace raisonnable, on peut envisager de replier l en utilisant le schéma des lignes à retard [33, 34] comme indiqué sur la figure 1.3. La lumière d'un faisceau laser, dont la taille transverse augmente en se propageant, est réfléchie et focalisée plusieurs fois avec deux miroirs courbes placés sur chaque bras de l'interféromètre. Si L est la distance entre les miroirs et N le nombre impair de réflexions, on obtient une longueur efficace l_{eff}

$$l_{eff} \simeq NL \tag{1.45}$$

L'un des problèmes les plus importants rencontrés dans la mise en oeuvre des lignes à retard est celui de la construction des miroirs. En effet il faut réaliser des

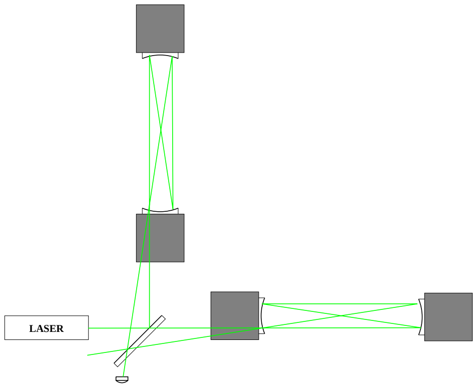

Figure 1.3: Interféromètre de Michelson avec des lignes à retard.

surfaces réfléchissantes avec une rugosité engendrant une diffusion de la lumière suffisamment faible pour introduire un bruit négligeable sur la phase des faisceaux laser et donc sur le signal de l'onde gravitationnelle. En outre pour avoir un nombre de réflexions suffisant il faut fabriquer des miroirs de grandes dimensions. La fabrication de tels miroirs n'est pas possible actuellement.

L'interféromètre de Michelson avec des cavités Fabry-Perot

Une autre méthode pour augmenter la longueur l, qui est celle choisie par VIRGO, consiste à introduire une cavité Fabry-Perot, résonnante dans chaque bras de l'interféromètre (voir figure 1.4).

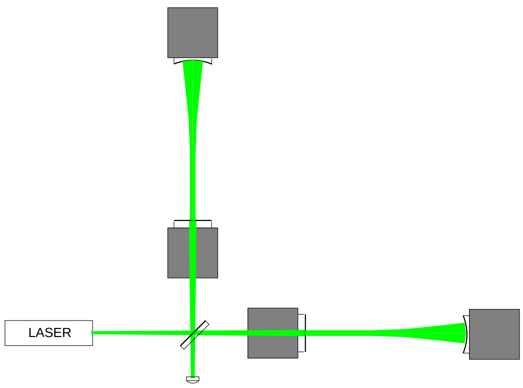

Figure 1.4: Interféromètre de Michelson avec des cavités Fabry-Perot.

Une telle cavité est un système optique centré constitué des deux miroirs maintenus à une position telle que l'on ait une interférence constructive entre le faisceau entrant et celui réfléchi par le miroir d'entrée, après un aller-retour dans la cavité.

Un photon ayant un temps de présence dans la cavité τ parcourt à la vitesse de la lumière c une distance $c\tau$ soit une longueur efficace l_{eff}

$$l_{eff} = c\tau = 2\frac{\mathcal{F}}{\pi}L, \tag{1.46}$$

où L est la longueur de la cavité Fabry-Perot et $\mathcal{F}$ sa finesse, un paramètre qui dépend des réflectivités des miroirs selon la relation suivante

$$\mathcal{F} = \pi\frac{\sqrt{|r_1 r_2|}}{1-|r_1 r_2|}, \tag{1.47}$$

où $|r_1|$ et $|r_2|$ sont les réflectivités des deux miroirs qui forment la cavité.

1.4 L'expérience VIRGO

L'expérience VIRGO, approuvée en 1993, est un collaboration franco-italienne pour la construction d'une antenne interféromètrique ayant des bras de 3km de long. Le site choisi se trouve à proximité d'une petite ville italienne Cascina près de Pise en Italie.

Actuellement VIRGO comprend les laboratoires suivants: le LAPP d'Annecy-le-Vieux, l'IPN de Lyon, l'ESPCI de Paris, le LAL d'Orsay, le groupe Laser optique d'Orsay, l'INFN de Frascati, l'INFN de Naples, l'INFN de Pérouse, l'INFN de Pise et l'INFN de l'université de Rome "La Sapienza".

Le premier objectif scientifique de VIRGO est la détection des ondes gravitationnelles. Avec sa sensibilité, VIRGO sera capable de détecter par exemple des effondrements asymétriques dans notre galaxie et les amas les plus proches de nous, comme l'amas de la Vierge qui a donné son nom au projet. A partir des spectres des ondes on peut obtenir des informations sur les sources d'ondes gravitationnelles et donc vérifier les modèles physiques qui les décrivent. Une des étapes suivantes pourra être la mesure des paramètres de l'éventuel médiateur de la force gravitationnelle, le graviton. Avec un réseau d'antennes interférométriques, deux interféromètres de 4 km sont actuellement en construction aux EUA ([13]), on pourra par exemple mesurer son spin.

On peut donc espérer disposer au prochain millénaire d'un nouvel instrument pour étudier un des aspects de la relativité générale, ainsi que pour sonder la structure de l'univers.

1.4.1 Les configurations de VIRGO

L'achèvement de la construction de VIRGO est prévu pour l'année 2002. Cependant une étape intermédiaire sera réalisée pour la fin de l'année 1998 avec la mise en service de l'interféromètre central, qui utilise l'essentiel des installations de VIRGO à l'exception des bras de 3 Km.

Cette première étape sera consacrée à la mise au point de plusieurs sous-systèmes qui seront utilisés pour l'interféromètre final, comme par exemple le système de suspension des miroirs, le "mode cleaner" (voir section 2.1.1), le laser ou le système d'acquisition. On pourra apprendre ainsi à contrôler un interféromètre plus simple et donc acquérir une certaine expérience pour l'interféromètre final.

L'interféromètre Central

La figure 1.5 montre le schéma optique de l'interféromètre central, qui sera donc composé d'un Michelson avec des bras asymétriques et d'un miroir de recyclage M_r.

Le miroir de recyclage aura une géométrie plane et les deux miroirs, M_1 et M_2, des bras seront concaves pour former deux cavités résonnantes stables [14]. Les miroirs des bras ainsi que le miroir de recyclage seront réalisés spécialement pour l'interféromètre central, tandis que la lame séparatrice et les miroirs des deux mode cleaner seront ceux de l'interféromètre final. La dimension choisie pour le "waist" (A.5), qui devrait être focalisé sur le miroir de recyclage, est de 3.25 mm. La taille du faisceau est presque constante, avec un valeur maximale de 3.48 mm sur le miroir du bras le plus long.

La puissance prévue pour le laser Nd:YAG qui a une longueur d'onde de 1.064 μm sera d'environ 10 W en continu, sur le mode fondamental (voir annexe A). Le facteur de recyclage a été fixé à 100 afin d'obtenir une puissance dans la cavité de recyclage de 1 kW.

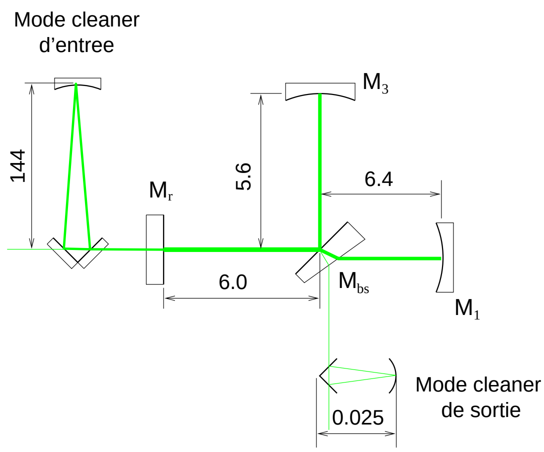

Figure 1.5: Schéma de la géométrie de l'interféromètre central de VIRGO. Le dessin n'est pas à l'échelle. Les longueurs sont en mètres.

L'interféromètre final

Par rapport à l'interféromètre de test la configuration optique de VIRGO "final", aura en plus, sur chaque bras, une cavité Fabry-Perot plan-concave de 3 km de long. Le waist de 19.80 mm, sera focalisé à la position moyenne des miroirs d'entrée des Fabry-Perot et sa taille sur les miroirs d'extrémité des Fabry-Perot sera d'environ 55 mm.

La puissance prévue pour le laser Nd:YAG est d'environ 20 W en continu, sur le mode fondamental. Le facteur de recyclage a été fixé à 50, la finesse des cavités des bras à 50 et la puissance stockée dans la cavité de recyclage, sera d'environ 1 kW et de 15 kW dans les Fabry-Perot.

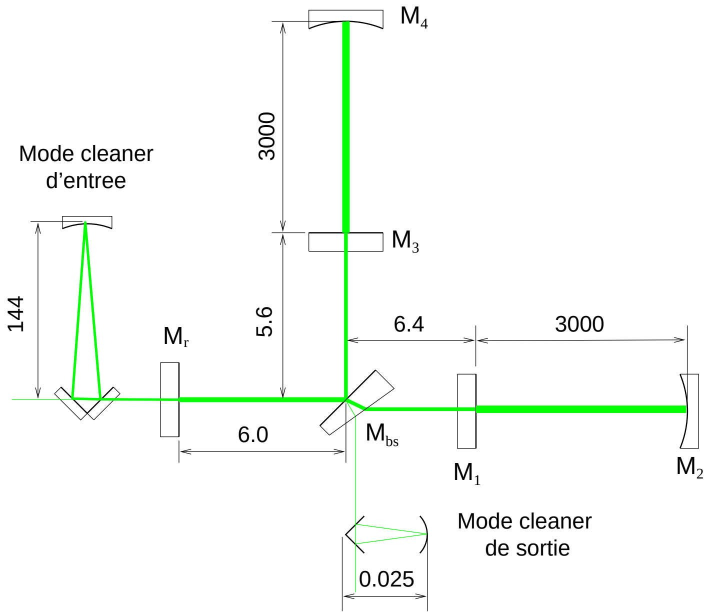

Figure 1.6: Schéma de la géométrie de l'interféromètre final de VIRGO. Le dessin n'est pas à l'échelle. Les longueurs sont en mètres.

1.5 Le bruit et la sensibilité de VIRGO

La variation de la métrique h produite par l'onde gravitationnelle est mesurée à travers la variation de phase $\Delta\phi$ induite sur le faisceau émergent de l'interféromètre (voir section 1.3.3). Un bruit quelconque introduisant une fluctuation sur la phase du faisceau laser peut donc compromettre la sensibilité d'une antenne interférométrique.

Les principales sources de bruit limitant la sensibilité de l'interféromètre sont:

- bruits de photon,

- bruit sismique,
- bruit thermique des miroirs et de leurs suspensions,

D'autres bruits "techniques" tels que le bruit introduit par la diffusion de la lumière due aux imperfections de surface des miroirs, le bruit sur l'indice de réfraction dans les cavités résonnantes, les bruits introduits par les systèmes d'asservissements sont susceptibles de nous gêner. Cependant, au prix d'efforts technologiques importants, ils ne devraient pas être dominants.

Sur la figure 1.7 sont reportées les densités spectrales estimées des sources des bruits et leur contribution à la sensibilité de l'interféromètre final de VIRGO, qui se situe dans l'intervalle de fréquence de 10 Hz à 10 kHz.

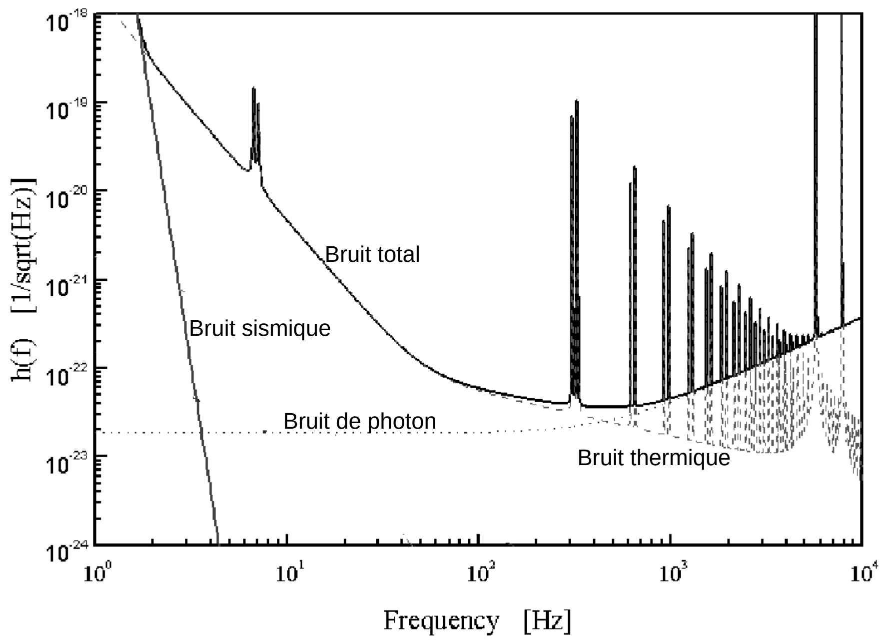

Figure 1.7: Densité spectrale estimée des sources de bruit, entre 10 Hz et 10 kHz et sensibilité attendue pour VIRGO dans sa version finale.

On espère donc obtenir la sensibilité suivante en terme de densité spectrale:

$$\begin{aligned}\tilde{h} &\simeq 1 \cdot 10^{-21}/\sqrt{Hz} \quad @10\ \text{Hz}, \\ \tilde{h} &\simeq 3 \cdot 10^{-23}/\sqrt{Hz} \quad @100\ \text{Hz}.\end{aligned} \tag{1.48}$$

1.5.1 Le bruit de photon

Les fluctuations statistiques du nombre de photons (Shot Noise)

Dans le cas d'un faisceau laser parfaitement stable en puissance et en fréquence, la limite théorique sur la résolution de la phase $\delta\phi$ provient du principe d'indétermination de Heisenberg [1]

$$\delta\phi\delta N \geq \frac{1}{2}, \tag{1.49}$$

où N est le nombre de photons. Dans la description classique, la statistique suivie par un processus de comptage de photons d'un faisceau cohérent est la statistique de Poisson, qui implique

$$\delta N = \sqrt{N}. \tag{1.50}$$

En reportant l'équation (1.50) dans l'équation (1.49) et en considérant que

$$N = \frac{\langle P \rangle \Delta t}{\hbar\omega}, \tag{1.51}$$

où $\langle P \rangle$ est la puissance moyenne du faisceau et Δt le temps de mesure, on obtient

$$\delta\phi_{shotnoise} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\langle P \rangle \Delta t}}. \tag{1.52}$$

En terme de densité spectrale, on aura

$$\delta\tilde{\phi}(\nu)_{shotnoise} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\langle P \rangle}\nu} \tag{1.53}$$

et

$$\delta\tilde{h}(\nu)_{shotnoise} = \frac{1}{2}\frac{c}{\omega L_{eff}}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\langle P \rangle}\nu}. \tag{1.54}$$

où L_{eff} est la longueur effective des bras de l'interféromètre et c la vitesse de la lumière.

En considérant les paramètres de VIRGO on obtient

$$\begin{array}{lll} L_{eff} = 150 \text{ km}, & (\mathcal{F} = 50) & \\ \langle P \rangle = 10 \text{ kW}, & (\mathcal{E} = 50 \text{ facteur de recyclage}) & \Rightarrow \quad \tilde{h} \simeq 10^{-23}/\sqrt{Hz}\,@10 \text{ Hz} \\ \omega = 1.77 \text{ Prad}, & (\lambda = 1.064 \cdot 10^{-6} \text{ m}) & \end{array}$$

La remontèe à haute fréquence du bruit de photon, est due à l'effet de filtrage du signal par les grandes cavité Fabry-Perot.

1.5.2 Le bruit sismique

Par bruit sismique on entend habituellement le bruit produit par les sources naturelles (séismes, mouvement des masses d'eau, etc.) et les sources artificielles, engendrées par les activité humaines. Ce bruit dépend du site mais en général diminue si on augmente la profondeur dans le sol. Son spectre, qui domine à basse fréquence, est approximativement donné par la formule suivante [11]

$$\tilde{x}(\nu)_{sismique} \simeq \frac{10^{-6}}{\nu^2}\frac{m}{\sqrt{Hz}}. \tag{1.55}$$

Si on veut construire un interféromètre sensible aux basses fréquences, il faut donc concevoir un systèmes d'isolation des miroirs. Un tel système doit se comporter comme un filtre mécanique passe-bas qui atténue le bruit sismique en delà d'une fréquence la plus basse possible. La solution adoptée par VIRGO est celle d'une chaîne de pendules suspendue dans une enceinte à vide appelée tour, qui soutient le miroir.

Pour expliquer le principe de filtrage, il suffit de considérer un simple pendule de longueur l, soutenant une masse m soumise à une force d'amortissement F. On notant x_0 le déplacement du point d'ancrage du pendule et x_1 le déplacement du point de masse m et en supposant que $F = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)$, on obtient la fonction de transfert pour de petits déplacements

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{i\gamma\omega + \omega_0^2}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}, \qquad \gamma = \frac{b}{m}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{1.56}$$

Pour des fréquences telles que

$$\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x_1}{x_0} \simeq \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{g}{l}\frac{1}{\omega^2}. \tag{1.57}$$

Pour des fréquences plus élevées que la fréquence de la résonance $\omega_0/2\pi$, on a une atténuation qui va comme $1/\omega^2$ et qui augmente avec l. En principe une chaîne de pendules la plus longue possible permet d'améliorer le facteur d'atténuation. Il est à noter que ce modèle est très simplifié car il ne prend pas en compte certains phénomènes comme les modes d'oscillation des fils de suspension, appelé modes violon, qui introduisent des résonances à plus haute fréquence par rapport au mode du pendule, ni les couplages entre degrés de liberté, qui obligent à construire des filtres fonctionnant dans les 6 degrés de liberté.

VIRGO (voir figure 1.8) prévoit pour chaque miroir une chaîne composée de 5 filtres dits standards qui atténuent le bruit sismique dans la direction verticale, accrochés l'un à l'autre par des fils en acier. Le miroir est accroché par quatre fils à une structure appelée marionetta qui permet de contrôler ses mouvements et qui à son tour est accrochée à la chaîne de filtres standards. Tout l'ensemble est enfin suspendu à une table oscillante appelée pendule inversé qui en plus de filtrer mécaniquement le bruit permet de contrôler l'ensemble de la chaîne.

1.5.3 Le bruit thermique

D'après le théorème de fluctuation dissipation, chaque fois qu'il y a dissipation d'énergie mécanique en énergie thermique, il existe un processus de reconversion de l'énergie thermique en une force stochastique F pour chaque degré de liberté, dont la densité spectrale est

$$\tilde{F}^2(\omega) = 4k_B T \mathrm{Re}\left\{Z(\omega)\right\}, \tag{1.58}$$

où k_B est la constante de Boltzmann, T la température absolue et $\mathrm{Re}\left\{Z(\omega)\right\}$ l'impédance mécanique

$$Z(\omega) = \frac{F_d}{\dot{x}}, \tag{1.59}$$

où F_d est la force de dissipation et $\dot{x}$ est la vitesse du degré de liberté considéré. Par exemple dans un oscillateur harmonique de masse m, on a

$$F = m\dot{x}\beta(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad Z(\omega) = \beta(\omega). \tag{1.60}$$

On considérant la dynamique de l'oscillateur harmonique de fréquence de résonance $\omega_0/2\pi$ et l'équation (1.58), on obtient

$$\tilde{x}_{thermique}(\omega) = \sqrt{\frac{4k_B T}{m^2(\omega-\omega_0)^2 + \omega^2\beta(\omega)^2}}. \tag{1.61}$$

qui devient pour des pulsations $\omega >> \omega_0$

$$\tilde{x}_{therm.pend.}(\omega) \simeq \frac{1}{\omega^2}\sqrt{\frac{4k_B T\omega_0}{mQ(\omega)}}, \qquad Q = \frac{m\omega_0}{\beta(\omega)}. \tag{1.62}$$

L'effet du bruit thermique diminue selon la puissance 1/2 si augmente m et le facteur de qualité Q.

Dans le cas de la suspension des miroirs de VIRGO la plus grande contribution au bruit thermique provient du miroir (mode propres du miroir) et du dernier étage de la chaîne (oscillations pendulaires, vibration des files).

Le bruit thermique total sera donc la somme de ces différentes contributions.

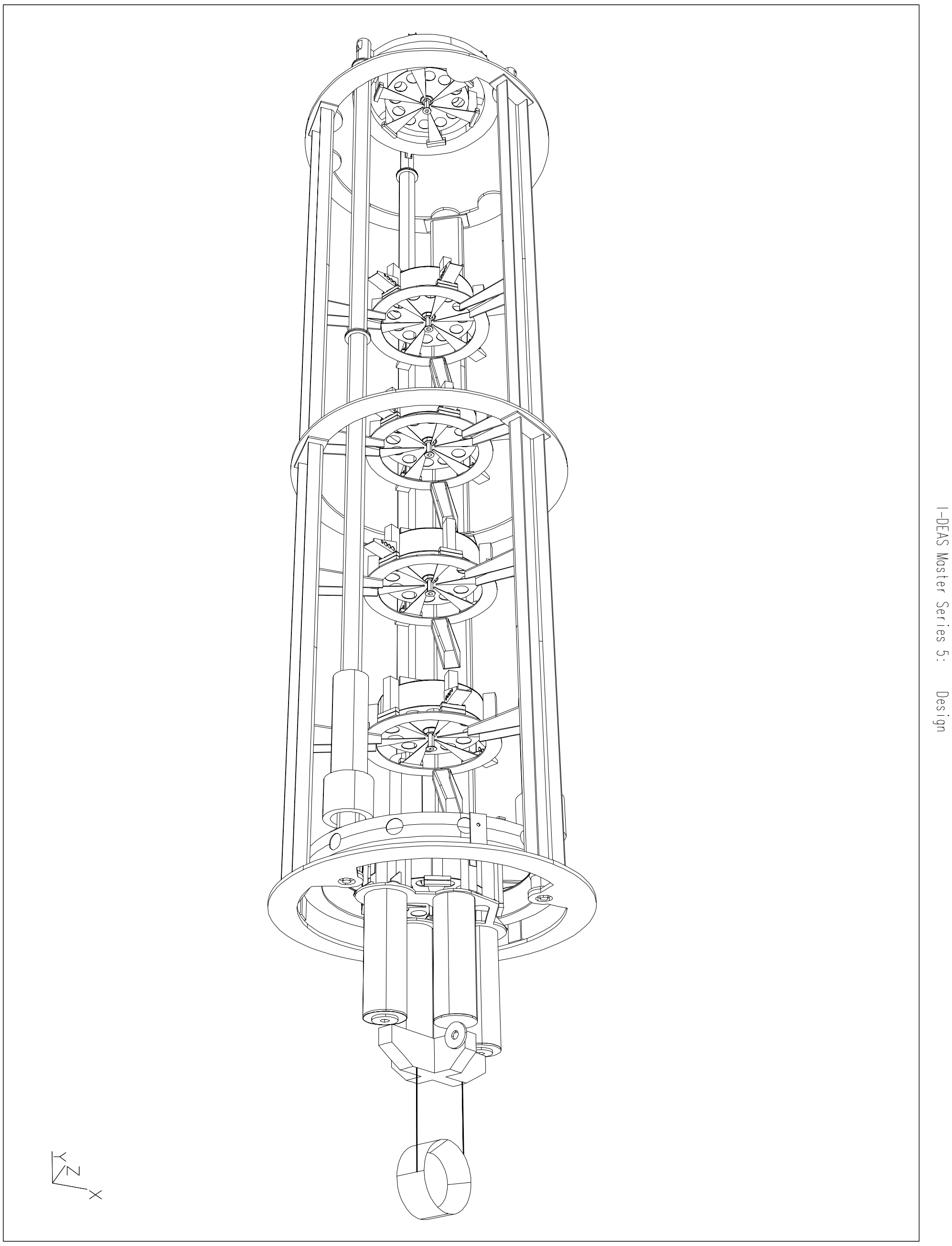

Figure 1.8: Vue en trois dimensions de la suspension mécanique d'un miroir de VIRGO. La dimension verticale de l'ensemble est d'environ 10 m.

Chapitre 2

Le banc de détection de VIRGO

Introduction

Le but de ce chapitre est de donner une vision globale des fonctions du banc de détection de VIRGO, dont celle principale est de mesurer la puissance lumineuse du faisceau de frange noire de l'interféromètre, après avoir amélioré le contraste et donc le rapport signal sur bruit.

Dans la première partie de ce chapitre, seront donc présentées les fonctions du banc de détection et les sous-systèmes nécessaires pour les mettre en oeuvre. Dans les sections suivantes, une description plus ou moins détaillée de la solution choisie pour chaque système sera présentée ainsi que quelques images des systèmes réalisés.

2.1 Les fonctions du banc de détection

Le **banc de détection de VIRGO** est l'ensemble des systèmes qui accomplissent les tâches suivantes:

- adaptation en taille et séparation des deux faisceaux sortant de l'interféromètre, le faisceau de la frange noire et le faisceau dit secondaire qui est réfléchi par la face anti-reflet de la lame séparatrice,
- filtrage spatial du faisceau de la frange noire sortant de l'interféromètre afin d'augmenter le contraste (donc le rapport signal sur bruit du signal d'onde gravitationnelle),
- photodetection et traitement du signal fourni par l'interféromètre,
- acquisition numérique du signal.

Pour accomplir ces tâches une série de sous systèmes est nécessaire. La fonction de chacun sera expliquée de façon plus détaillée dans les sections suivantes. Voyons donc la liste de ces sous systèmes:

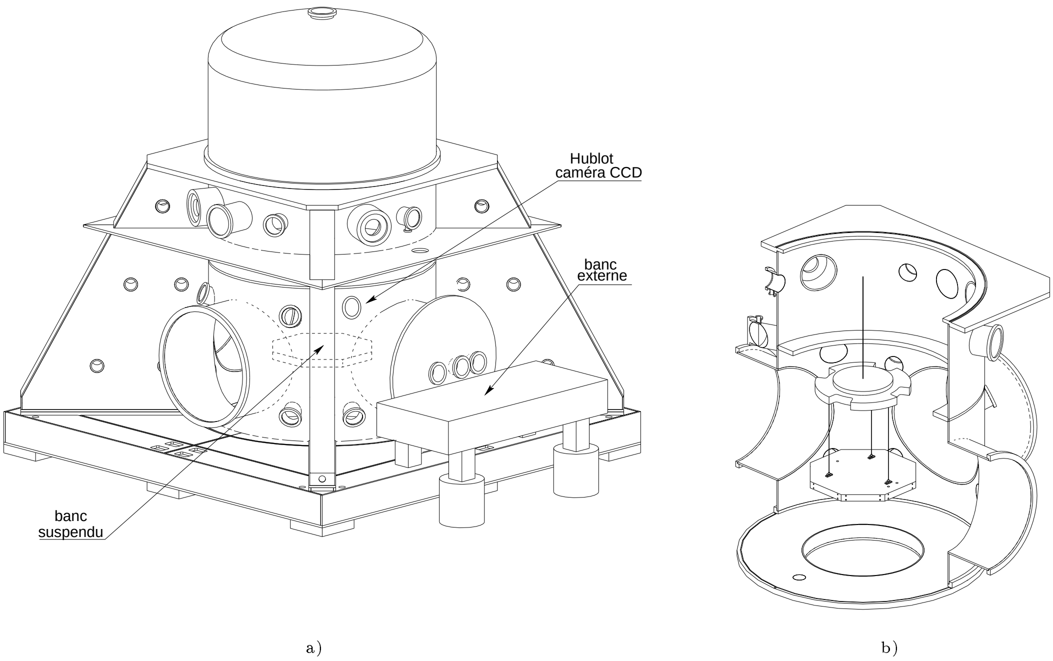

Figure 2.1: a) Vue en trois dimensions de la tour contenant le banc de détection interne et du banc externe. b) Section de la tour et vue du banc de détection interne accroché à la “marionetta” par les trois fils.

- Un banc optique suspendu à une chaîne de filtres mécaniques pour atténuer le bruit sismique et installé dans une enceinte à vide(**tour de détection**) pour supprimer le bruit acoustique et sur lequel sont placés les dispositifs suivants:

  - un cavité optique triangulaire et monolithique(**mode cleaner**), maintenue en résonance, pour le filtrage spatial du faisceau de la frange noire,
  - un système optique (**télescope**) pour adapter la taille du faisceau à la cavité optique et aux dimensions de la partie sensible des photodétecteurs,
  - un système optique d'alignement du banc pour pouvoir suivre le faisceau secondaire (**système de contrôle de position global**).

- Un système de contrôle de position du banc suspendu par rapport au repère fixe local (**système de contrôle de position local**), pour pouvoir aligner grossièrement le faisceau secondaire par rapport aux capteurs de position global.

- Un banc externe où se situe l'ensemble des photodétecteurs du signal de l'onde gravitationnelle.

- Un système d'amplification, filtrage, démodulation et échantillonnage des signaux provenant des photodétecteurs.

Il convient de souligner qu'actuellement, le banc suspendu dans enceinte à vide a été conçu essentiellement pour atténuer le bruit sismique et acoustique sur le mode cleaner. Dans le cas où ces bruit seraient trop élevés sur le site, on pourra aussi placer sur le banc les photodiodes de détection du signal de la frange noire.

2.1.1 Le "Mode Cleaner"

La cavité optique "mode cleaner", dont un prototype a été réalisé et testé avec succès au LAPP [19, 26], est une cavité monolithique triangulaire dont la fonction est de filtrer spatialement le faisceau de la frange noire, afin d'augmenter le contraste de l'interféromètre et donc, le rapport signal sur bruit.

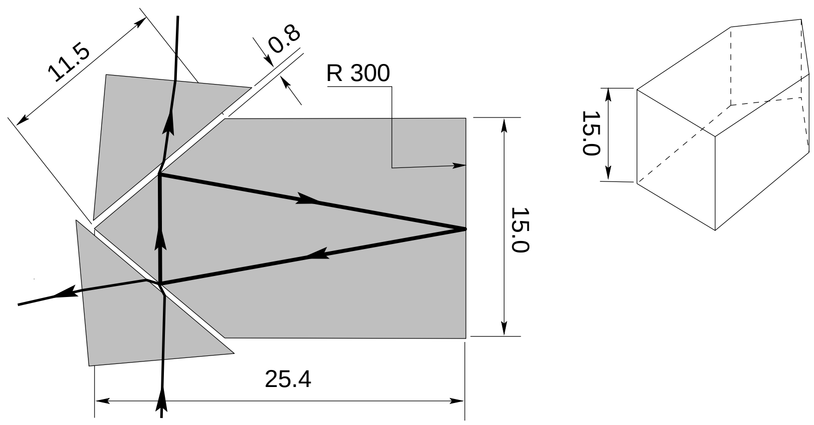

Figure 2.2: La cavité optique mode cleaner avec les prismes d'adaptation et le chemin optique du faisceau.

Autrement dit, le mode cleaner se comporte comme un filtre résonnant, par rapport à la superposition des modes TEM_{mn} (les fréquences à filtrer) qui constituent le faisceau. On peut ainsi sélectionner à la sortie du mode cleaner le mode TEM_{00} à la fréquence de la porteuse et des deux premières bandes latérales contenant l'information nécessaire pour la reconstruction du signal de la frange noire.

Les dimensions de la cavité sont reportées dans la figure 2.2, qui montre aussi les deux prismes nécessaires pour diminuer l'astigmatisme des faisceaux d'entrée et de sortie [26].

Le défaut de contraste attendu après filtrage est

$$1 - \mathcal{C} \simeq 10^{-4} \tag{2.1}$$

Le bruit résiduel en position admissible sur le faisceau d'entrée pour ne pas introduire de bruit sur le signal de l'onde gravitationnelle [19], est:

$$\begin{array}{ll} \delta r_{rms} = 4.2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} & \text{à basse fréquence } (\nu < 10\ \mathrm{Hz}) \\ \delta \theta_{rms} = 7.3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{rad} & \text{à basse fréquence } (\nu < 10\ \mathrm{Hz}) \\ \delta r = 1.2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}, & \text{à } 100\ \mathrm{Hz} \\ \delta \theta = 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}, & \text{à } 100\ \mathrm{Hz} \end{array}$$

2.1.2 Les photodiodes

Les photodiodes nécessaires pour la détection du signal d'onde gravitationnelle seront disposées selon le schéma de la figure 2.3.

Si les bruits acoustique et sismique sont trop importants sur le site de Cascina, elles pourront être installées sur le banc de détection interne.

D'après une simulation de l'interféromètre central [28], les valeurs des composantes les plus importantes du spectre en puissance de la frange noire sont:

$$\begin{array}{lcll} P_{D.C.} & = & 0.7 & \mathrm{W} \\ P_{\nu_0} & = & 0.6 & \mathrm{W} \\ P_{2\nu_0} & = & 0.1 & \mathrm{W} \end{array} \quad \Rightarrow \quad P_{tot} = 1.4\ \mathrm{W} \tag{2.2}$$

En limitant la puissance sur une photodiode à 100 mW, on a besoin d'au moins 14 photodiodes.

La configuration finalement choisie, est de 16 photodiodes selon le schéma de la figure 2.3 qui utilise des lames séparatrices pour répartir la puissance.

Les caractéristiques principales du détecteur Hamamatsu G511G03, choisi essentiellement pour son efficacité quantique élevée [19] et sa capacité relativement faible, sont les suivantes:

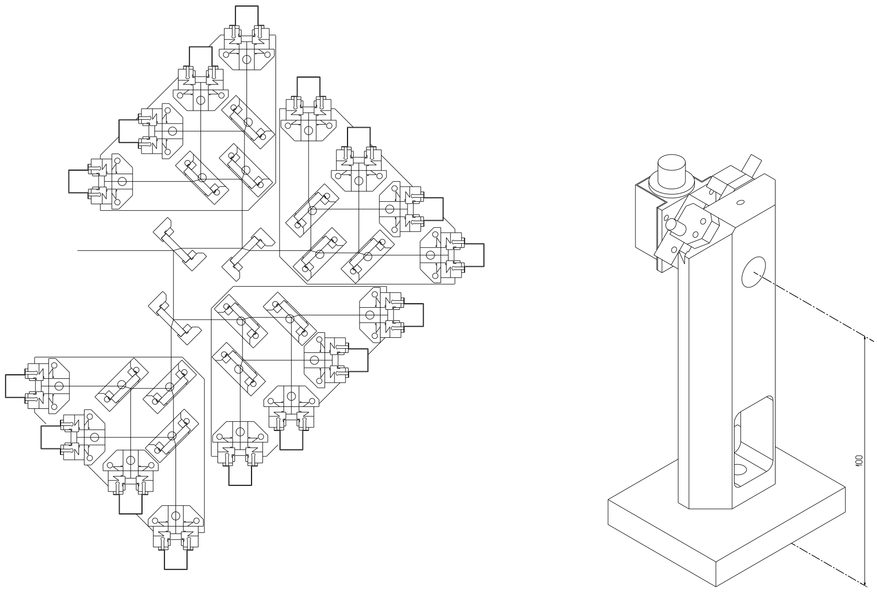

Figure 2.3: Ensemble des photodiodes pour le faisceau de la frange noire et vue en trois dimensions du support pour une photodiode. On peut distinguer les deux vis pour les déplacements orthogonaux du photodétecteur placées à 45° par rapport au plan d'appuie.

Substrat	:	InAsGa
Diamètre surface active	:	$d = 3$ mm
Efficacité quantique	:	$n \simeq 85\%$
Sensibilité	:	$\eta \simeq 0.73$ A/W
Courant d'obscurité	:	$I_d = 2$ nA
Capacité circuit équivalent	:	$C \simeq 250$ pF

Chaque photodiode sera connectée à une électronique dont les caractéristiques sont fixées par la sensibilité de l'interféromètre et par le système de contrôle longitudinal [28] et sont essentiellement les suivantes:

- un canal DC avec une bande de fréquence de 0 Hz à 50 kHz,
- deux canaux AC, filtrés et démodulés à la fréquence de modulation frontale de VIRGO et déphasés de 90° avec une dynamique de 160 dBV.
- un canal de tension pour la polarisation inverse de la photodiode.

On estime qu'un système d'isolation mécanique pour les photodiodes de la frange noire, il n'est pas nécessaire, mais si le niveau de bruit (sismique et acoustique) sur le site sera plus important que celle prévue, on pourra placer les photodiodes sur le banc suspendu dans l'emplacement entre les photodiodes à quadrant.

2.2 Description générale des bancs

2.2.1 Le banc suspendu

Le banc de détection suspendu (voir figure 2.4) a été conçu pour accueillir le télescope, le système de positionnement global, la cavité optique et éventuellement les photodiodes pour la détection du signal.

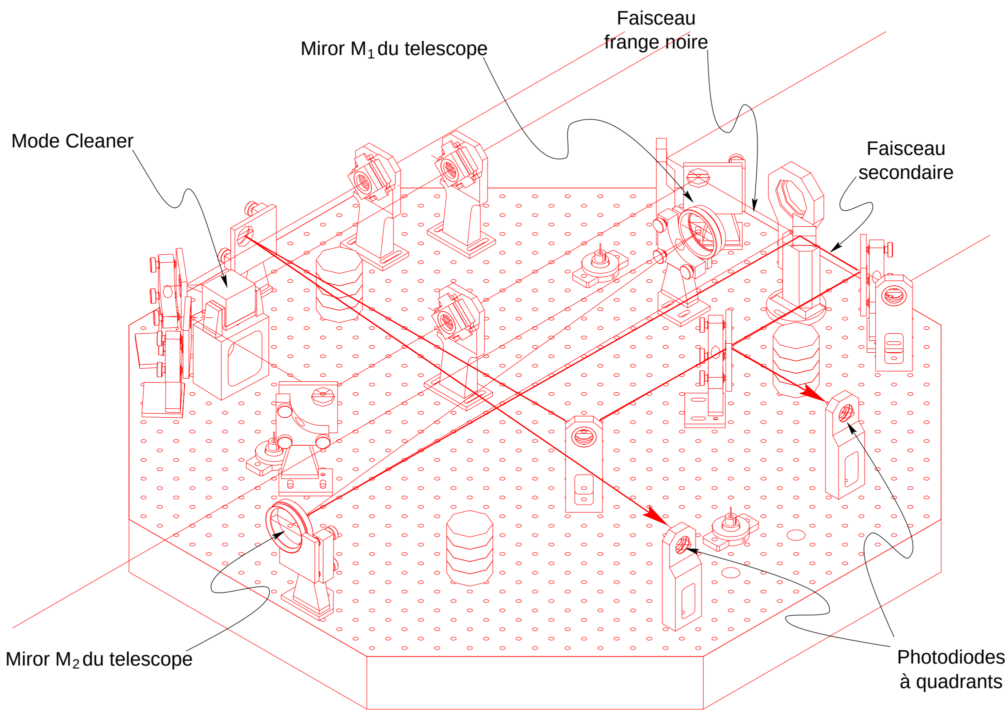

Figure 2.4: Vue en trois dimensions du banc de détection.

La géométrie octogonale a été choisie essentiellement pour obtenir une structure qui soit la plus rigide possible et qui optimise la place disponible dans l'enceinte à vide. Le banc (inscrit dans un cercle de 880 mm de diamètre et lourd 60 kg) à été usiné dans un bloc en alliage d'aluminium ALPLAN afin de le rendre le plus rigide possible. La structure du banc a été simulée pour estimer ses résonances, en utilisant le logiciel appelé systus. Les fréquences des modes sont toutes supérieures à 400 Hz.

Tout comme pour une table optique ordinaire, une matrice de trous filetés standards M6 avec un pas de 25 mm couvre la surface supérieure du banc afin de pouvoir installer les composants du banc et pour avoir une certaine liberté d'installation des appareils de tests. De plus, deux trous traversant ont été percés pour pouvoir éventuellement amener les faisceaux du côté inférieur du banc.

2.2.2 La suspension mécanique

La suspension mécanique utilisée pour le test du banc au LAPP, qui ne pourrait pas être celle prévue pour la version finale pour des raisons d'encombrement et de "planning", a cependant été réalisée en utilisant des pièces prototypes développées à Pise ainsi que des éléments qui seront utilisés dans VIRGO. En regardant la figure 2.5, on trouve de bas en haut:

- deux des quatre jambes qui tiennent les 8 bobines magnétiques (4 horizontales et 4 verticales) pour le contrôle en position du banc,
- le banc de détection (conçu et réalisé au LAPP) accroché, grâce à trois fils en acier de 1.5 mm de diamètre et de 755 mm de longueur, à la structure appelée dans le jargon de l'expérience VIRGO "marionetta",
- la marionetta, accrochée par un seul fil de 1110 mm de longueur et 2.2 mm de diamètre,
- la structure de support des bobines magnétiques, pour le contrôle (éventuel) en position du banc, en appliquant les forces sur la marionetta,
- le prototype du filtre [35] qui est lui-même accroché au moyen d'un fil de 2.8 mm de diamètre et qui atténue le bruit vertical en position, au moyen de plusieurs lames horizontales faites d'un acier appelé MARAGIN, particulièrement stable en température,
- une table appuyée sur 3 sphères qui permet de déplacer l'ensemble de la chaîne dans un plan horizontal. Cette table permet aussi de tourner le point d'accrochage de la chaîne autour de l'axe vertical ainsi que de le faire monter et descendre de plusieurs centimètres.

Cette chaîne est donc composée de plusieurs pendules couplés, dont trois constitués par les fils de suspensions qui ont une longueur totale d'environ 2.5 m et qu'il faudra contrôler en position avec un système automatique. Le poids total de la chaîne du filtre, la marionetta et du banc complet) est d'environ 300 kg.

Par rapport à la solution finale prévue pour VIRGO, la suspension utilisée diffère par l'absence d'un filtre et du pendule inversé qui soutient la table et donc on aura une plus mauvaise isolation sismique.

De toute façon, les tests faits avec cette suspension mécanique réduite, nous donne un moyen d'évaluer la limite supérieure du bruit résiduel auquel il faut s'attendre et de tester un système d'asservissement qui ne sera pas très différent du système final.

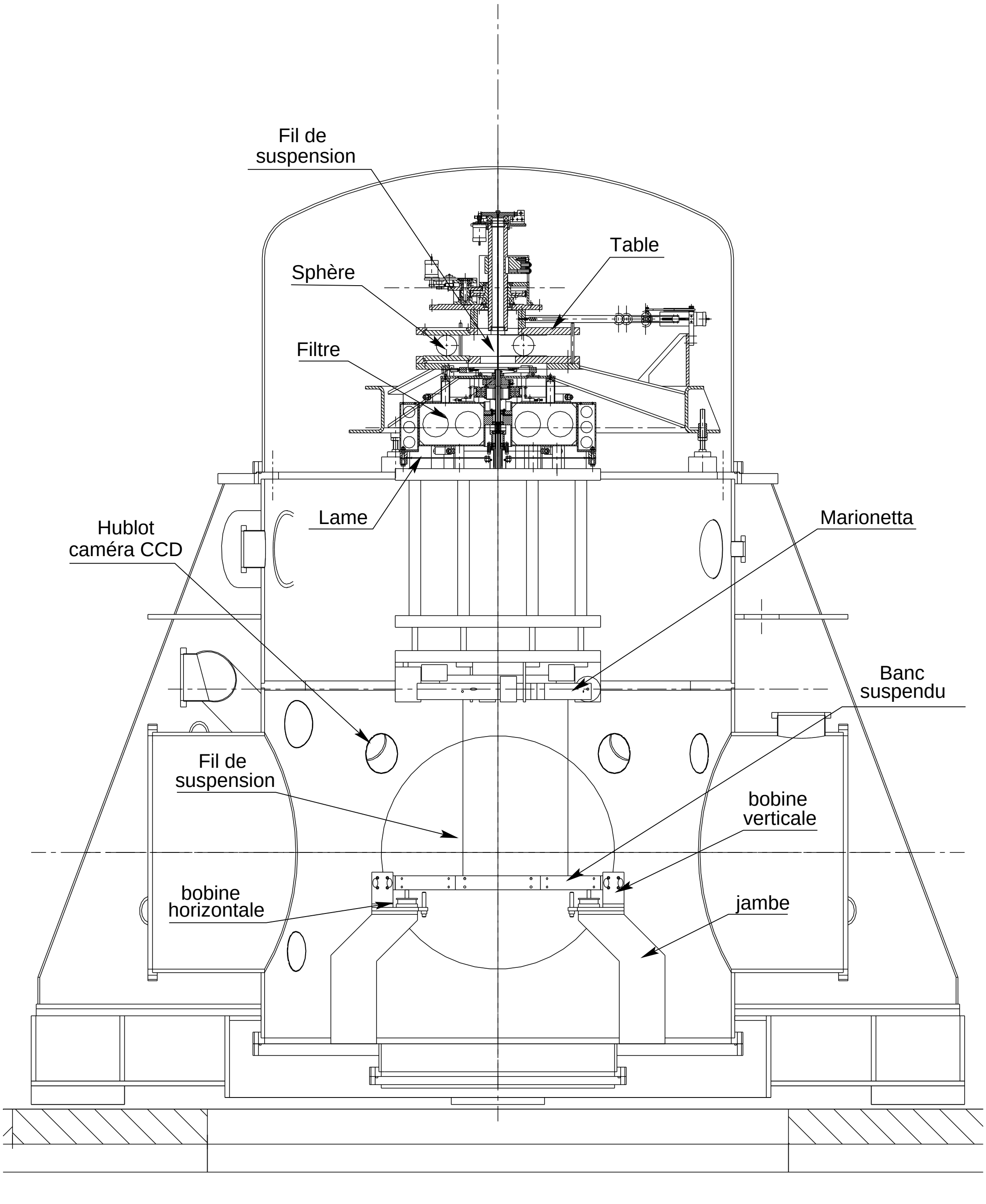

Figure 2.5: Section de la tour du banc de détection. On peut reconnaître la structure de la table posée sur sphère, le prototype du filtre avec les lames, la structure d'accrochage des bobines, la marionetta, le banc de détection et enfin les jambes avec les bobines.

2.2.3 Le télescope

Le télescope est un système optique composé de deux miroirs courbes étudiés pour focaliser et séparer les deux faisceaux sortant de l'interféromètre au niveau du banc de détection.

La focalisation consiste à adapter la taille des faisceaux à la taille du mode cleaner ("matching") et à celle des photodiodes de détection du signal d'onde gravitationnelle et de contrôle longitudinal de l'interféromètre.

Une description plus détaillée de la conception et des caractéristiques du système est donnée dans le chapitre 3.

2.2.4 Le système de positionnement global

Le système de positionnement global est constitué de deux photodiodes quadrants Q_1 et Q_2, placées à différentes distances sur le chemin optique du faisceau secondaire, qui mesurent quatre des six degrés de liberté du banc de détection par rapport à ce faisceau. On est donc insensible aux déplacements longitudinaux le long de l'axe de propagation du faisceau et aux rotations autour de ce même axe.

La fonction de ce système de positionnement global est de maintenir le mode cleaner aligné par rapport au faisceau de la frange noire en utilisant le système d'asservissement automatique du banc suspendu.

Une description plus détaillée de la conception et des caractéristiques du système est donnée dans le chapitre 4.

2.2.5 Le banc externe

Le banc externe dont l'emplacement est montré sur la figure 2.1, devrait accueillir les photodiodes pour le contrôle longitudinal de l'interféromètre et du mode cleaner, les photodiodes pour la détection du signal, des photodiodes à quadrants pour le contrôle automatique des miroirs de l'interféromètre [24, 25] et enfin le système de test du mode cleaner.

Ce banc a dejà été utilisé pour monter le système de génération des faisceaux de l'interféromètre central de VIRGO, nécessaire pour faire les tests du banc suspendu, pour l'asservissement du mode cleaner et pour des tests de vérification des asservissements global et local.

2.2.6 Le système de positionnement local

Le système de positionnement local est constitué d'une caméra CCD qui mesure la position du banc de détection (les six degrés de liberté: les trois rotations et les trois translations) par rapport à un repère local arbitraire.

Il sera placé extérieurement sur la tour (voir figure 2.1 et photo 2.11) et sera donc sensible aux bruits locaux, sismique et acoustique.

Sa fonction est de permettre les mouvements contrôlés du banc suspendu dans les six degrés de liberté, afin de centrer le faisceau secondaire sur les photodiodes à quadrants qui constituent le système de positionnement global, ceci pour pouvoir ensuite déclencher le système de positionnement global. Pour conduire cette opération, il faut avoir une sensibilité de l'ordre de 1 m pour les translations et 100 μradrad pour les rotations.

En considérant les contraintes d'alignement grossiers de l'interféromètre, la dynamique requise pour ce système doit être de l'ordre de 10 mm pour les translations et $2°$ pour les rotations.

Le principe de mesure, le fonctionnement et la réalisation de ce système seront l'objet des chapitres suivants.

2.2.7 Images du banc de détection

Les figures 2.6 à 2.11 retracent les tests du banc de détection réalisés au LAPP en 1997 et début 1998.

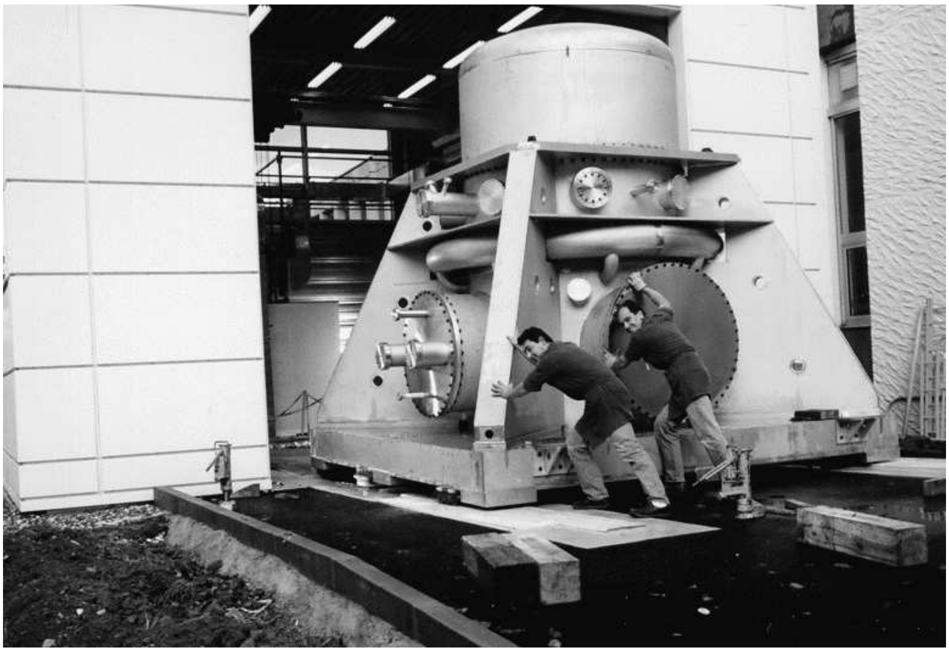

Figure 2.6: Arrivée du prototype de la tour à Annecy, Rico et Laurent (décembre 1994).

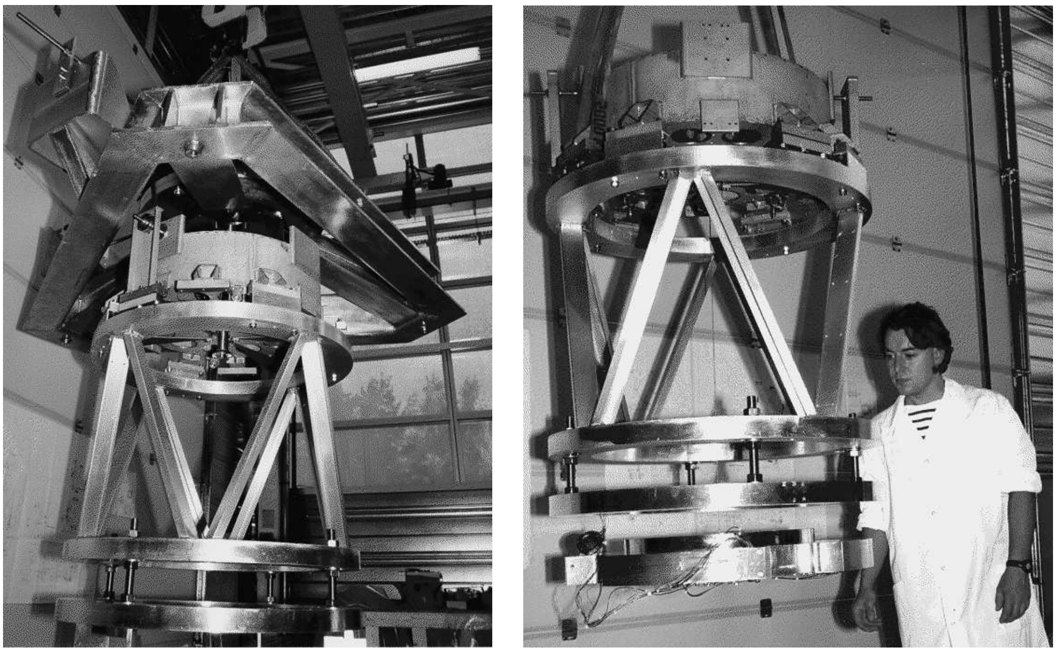

Figure 2.7: Vues de la suspension du banc de détection avant son montage dans la tour. On peut voir, en partant du haut, la structure triangulaire de la table avec les trois sphères qui s'appuient sur une corniche située dans la tour. On peut aussi voir la partie inférieure du filtre standard avec les lames élastiques d'atténuation du bruit vertical de position, la structure accrochée au filtre et qui devra supporter les éventuelles bobines et la marionetta. Rico (1997).

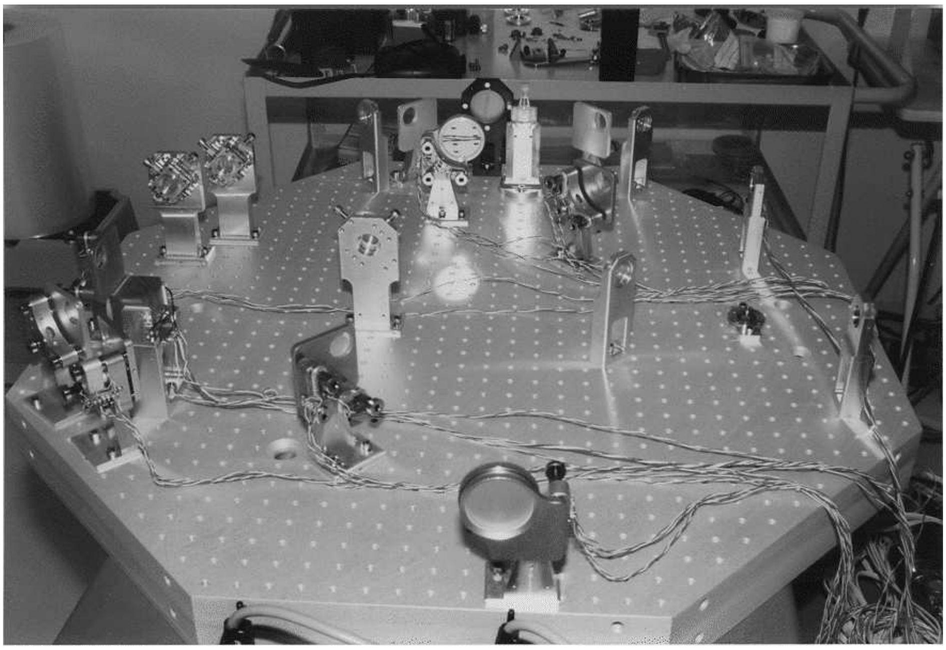

Figure 2.8: Vue du banc de détection dans la salle blanche après l'assemblage de touts les composants et le câblage (provisoire) pour les tests de fonctionnement et pour la compatibilité au vide. On peut apercevoir sur la gauche, la petite boîte en cuivre, qui contient le mode cleaner, les deux prismes et les composants pour l'asservissement automatique de la longueur de la cavité. Sur la droite sont visibles les deux photodiodes à quadrants du système de positionnement global. Le prisme qui sépare les deux faisceaux se situe au milieu de la photo, dans la partie supérieure.

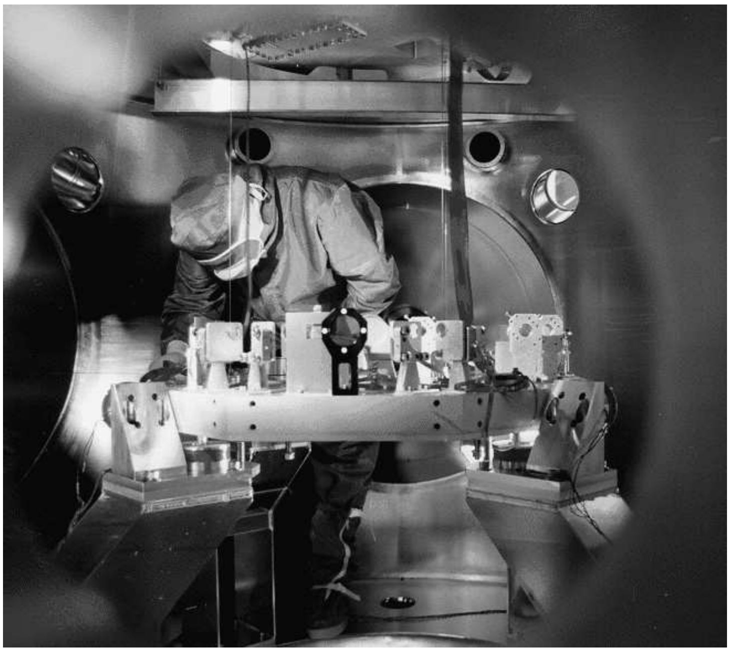

Figure 2.9: Vue du banc dans la tour, suspendu à la chaîne mécanique d'atténuation. Les fils de suspension du banc, les trois limandes en kapton et deux des quatre "jambes" (sur lesquelles sont accrochées les bobines) sont bien visibles.

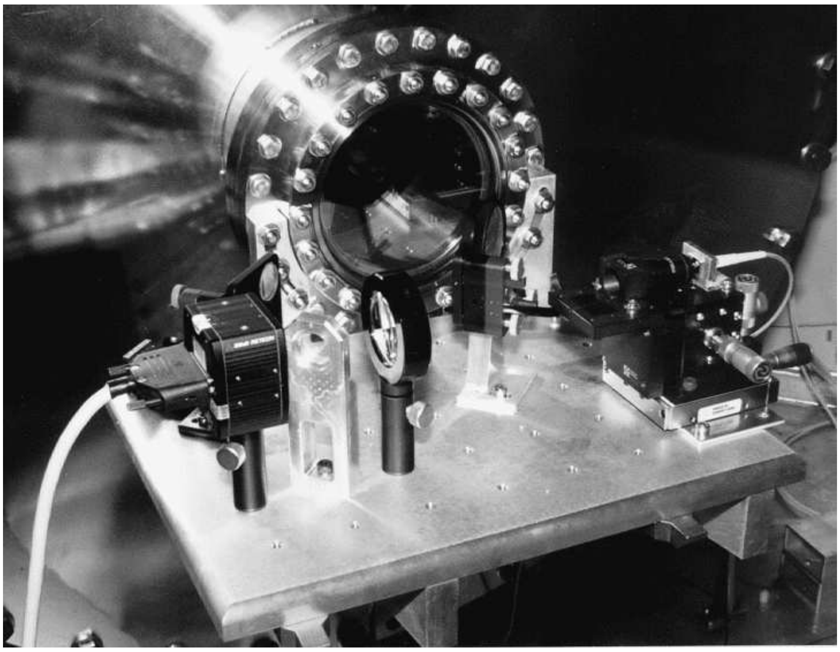

Figure 2.10: Vue du hublot et de la petite table d'injection des faisceaux dans la tour du banc de détection. On voit sur la gauche, une caméra CCD utilisée pour la mesure de la taille du faisceau sortant du système de focalisation de la fibre optique (à droite).

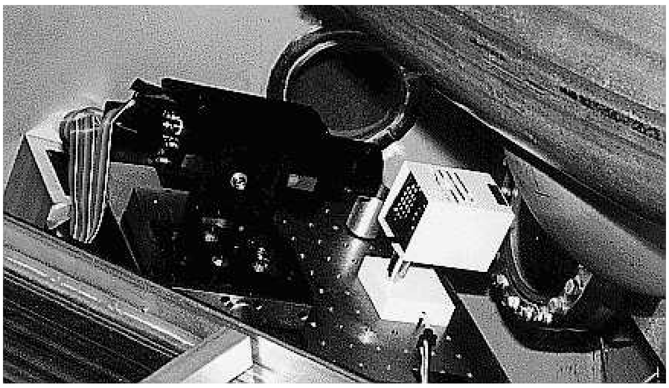

Figure 2.11: Système d'accrochage de la caméra CCD à la tour. On voit le petit support de la lampe utilisée pour éclairer le banc de détection.

Chapitre 3

Le télescope du banc de détection

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude et la conception du télescope du banc de détection de VIRGO. Cette description est faite dans le cas de l'interféromètre central, mais certain résultats sont aussi directement utilisables pour la version finale de l'interféromètre.

En particulier, les aspects liés aux pertes de puissance engendrées par les phénomènes d'aberration seront examinés en détails, ainsi que les problèmes liés à la diaphonie due à la diffusion des surfaces optiques.

3.1 Fonctions du télescope

La nécessité d'avoir des niveaux de pression différents entre l'enceinte de l'interféromètre et la tour de détection, impose de placer une fenêtre dans le tube de connexion de la tour de la lame séparatrice à celle du banc de détection.

En donnant à la lame séparatrice un angle entre les deux faces de 3.6 mrad, (voir figure 3.1) de façon à faire rapprocher les faisceaux émergents, on peut limiter la dimension de cette fenêtre.

La contrepartie de cette solution, est qu'il faut séparer les deux faisceaux, pour qu'ils ne se croisent pas vers le centre du banc de détection. En outre leur distance sur le banc reste de l'ordre de leur taille (voir figure 3.2), qui est une valeur trop petite pour les séparer avec des miroirs.

Pour résumer, le télescope du banc de détection doit donc remplir les fonctions suivantes:

- Séparation du faisceau de la frange noire de celui réfléchi par la deuxième face de la lame séparatrice (**faisceau secondaire**).
- Réduction de la taille du faisceau de frange noire pour l'adapter au mode cleaner.

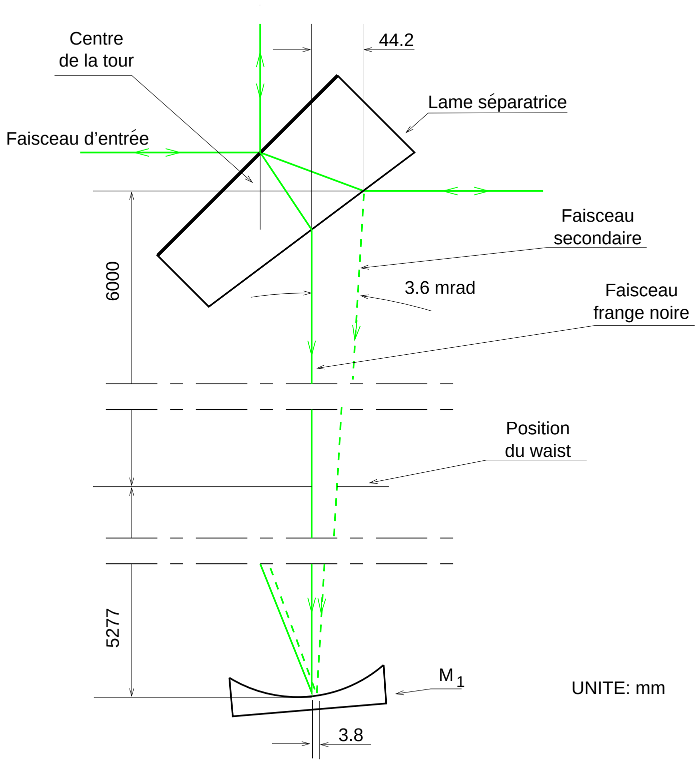

Figure 3.1: Géométrie de la lame séparatrice de VIRGO avec les chemins optiques des faisceaux. Le dessin n'est pas à échelle afin de mettre en évidence les différents chemins optiques.

- Réduction de la taille des faisceaux sortant du banc de détection pour l'adapter à celle des photodiodes de détection.

Une manière de séparer les faisceaux est de réduire leur taille au moyen d'un système optique qui augmente aussi les angles des rayons d'entrée.

3.1.1 Contraintes sur le télescope

Une règle générale dans VIRGO (pour des raisons évidentes de rapport signal sur bruit) est de minimiser le plus possible les pertes de puissance sur les faisceaux de l'interféromètre et en particulier sur le TEM_{00} qui contient le signal d'onde gravitationnelle. Les phénomènes les plus importants qui sont responsables des pertes en puissance dans des éléments optiques comme lentilles et miroir sont les suivants:

- diffusion et absorption de la puissance incidente.
- aberrations sphériques qui déforment le front d'onde du faisceau et donc diminuent la puissance transportée par le mode TEM_{00}.

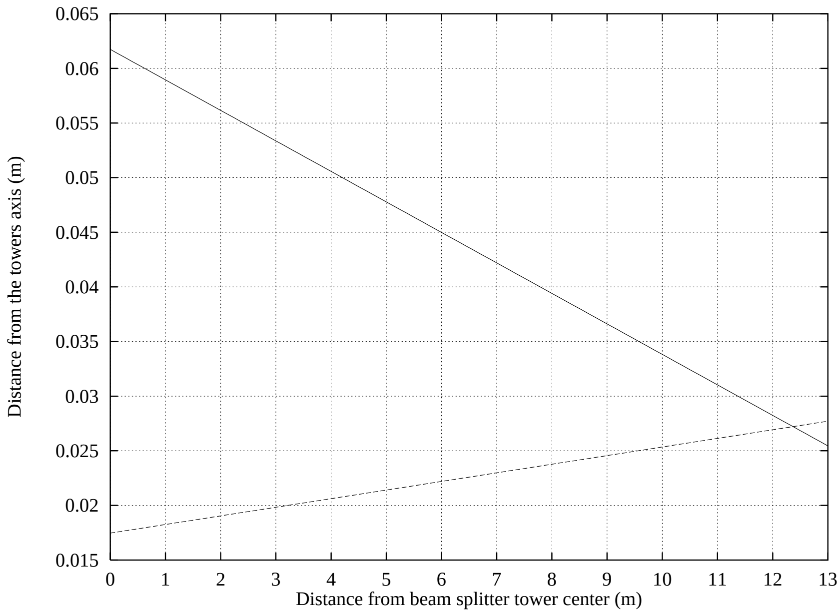

Figure 3.2: Distance entre le faisceau de la frange noire (ligne continue) et le faisceau secondaire (tirets) en fonction de la distance par rapport au centre de la tour de la lame séparatrice. Le banc de détection est situé à 11 m.

- astigmatisme du faisceau qui dégrade l'adaptation au mode cleaner et donc diminue la puissance transmise par la cavité sur le mode TEM_{00}.

La contribution de chaque source de pertes a été fixée à 10^{-3}. En considérant que l'efficacité quantique des photodiodes pour les faisceaux de VIRGO est 85% et que les pertes seront donc de l'ordre de 10^{-2} pour toutes les optiques du banc (sans compter le mode cleaner), on aura un valeur acceptable d'efficacité effective de 84%.

Une autre contrainte importante est que l'implantation du banc de détection pour l'interféromètre central et pour l'interféromètre final, soient les plus proches possibles.

3.2 Géométrie du télescope

La propagation d'un faisceau à travers un système optique centré dans l'approximation paraxiale est entièrement définie par la matrice ABCD [14]du système

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad \hat{M} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{3.1}$$

dont les éléments dépendent de la géométrie du système.

Un rayon translaté de r_{in} et incliné de θ_{in} à l'entrée du système optique sera translaté de r_{out} et incliné de θ_{out} suivant la relation

$$\begin{pmatrix} r_{out} \\ \theta_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{in} \\ \theta_{in} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Cette description permet de calculer facilement la position du faisceau par rapport à l'axe de propagation et donc de déterminer un système optique qui sépare suffisamment les deux faisceaux sortant de l'interféromètre.

La propagation d'un faisceau gaussien dans l'approximation d'onde paraxiale est aussi entièrement définie par la matrice $ABCD$ du système optique (voir l'annexe B) selon les formules (B.10).

Une configuration optique particulièrement intéressante est le doublet confocal (voir figure 3.3), composé de deux lentilles de focale f_1 et f_2 séparées d'une distance $d_2 = f_1 + f_2$. Si le waist du faisceau d'entrée est positionné à une distance $d_1 = f_1$ de la première lentille, celui du faisceau de sortie sera positionné à une distance $d_3 = f_2$ de la deuxième lentille. La matrice d'un tel système est

$$\begin{pmatrix} -\frac{f_2}{f_1} & 0 \\ 0 & -\frac{f_1}{f_2} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

et donc, selon les (B.13) et (A.9), on a

$$\frac{w_0^{(2)}}{w_0^{(1)}} = \left|\frac{f_2}{f_1}\right|, \qquad \frac{\theta_\infty^{(2)}}{\theta_\infty^{(1)}} = \left|\frac{f_1}{f_2}\right|, \tag{3.4}$$

Dans notre cas cette configuration présente l'avantage que la condition $d_1 = f_1$ peut être négligée pour l'étude de la réduction de la taille du faisceau, en raison de la faible divergence des faisceaux d'entrée ($\theta_\infty^{(1)} = 104.2$ μrad). Un deuxième avantage est que la dimension du système optique peut être limitée en choisissant par exemple $f_1 > 0$ et $f_2 < 0$.

Pour réduire le plus possible le nombre de surfaces qui introduisent de la diffusion et des aberrations, on peut utiliser des miroirs courbes comme éléments focalisants. En contrepartie il faudra tourner les miroirs et donc introduire de l'astigmatisme. En revanche cette solution présente un autre avantage, qui est que le télescope devient bien plus compact.

La matrice du télescope reliant les faisceaux au niveau du waist de VIRGO et à une distance d de deuxième miroir M_2 est

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2'}{f_1'} & \frac{f_2'}{f_1'}(d_1 - f_1') + \frac{f_1'}{f_2'}(d - f_2') \\ 0 & -\frac{f_1'}{f_2'} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

où, en notant ϕ_i l'angle de rotation du miroir M_i autour de l'axe Oy

$$\begin{aligned} f_i' &= f_i \cos\phi_i, \text{ (plan Oxz)} \\ f_i' &= \frac{f_i}{\cos\phi_i}, \text{ (plan Oyz)} \end{aligned} \qquad i = 1, 2 \tag{3.6}$$

3.2.1 Séparation des faisceaux

Les fractions de puissance d'un mode TEM_{00} (un courbe gaussienne) contenu dans un rayon de $w, 2w$ et $2.5w$, sont

$$\begin{aligned} P_{tot}(w) &= 1 - 1.35 \cdot 10^{-1}, \\ P_{tot}(2w) &= 1 - 3.35 \cdot 10^{-4}, \qquad \text{(valeur acceptable)} \\ P_{tot}(2.5w) &= 1 - 3.73 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Afin de limiter les pertes de puissance et aussi la diaphonie entre les signaux transporté par les faisceaux (voir section 3.5) de taille w_1 et w_2, nous imposerons qu'ils soient séparés de

$$\Delta x \geq 2(2w_1 + 2w_2), \tag{3.7}$$

ce qui correspond à dire que la distance entre le centre des faisceaux est au moins de 4 σ fois un facteur 2 de marge . Un prisme avec des surfaces totalement réfléchissantes, comme montré figure 3.3, sera donc l'objet idéal pour séparer les deux faisceaux.

3.2.2 Valeurs géométriques et optiques

Le choix des valeurs des focales et des distances a été fait en considérant essentiellement deux contraintes. La première, d'obtenir un faisceau d'environ un millimètre de waist, qui puisse se propager suffisamment sans devoir être refocalisé sur les photodiodes de détection. La deuxième, bien plus évidente, de pouvoir faire entrer le télescope dans les dimensions du banc de détection.

Avec $f_1 = +1000$ mm, $f_2 = -300$ mm, $d_2 = 700$ mm et $\phi_1 = \phi_2 = 3.08°$ on obtient les valeurs de waist en sortie

$$\begin{aligned} w_0^{(2)} &= 0.9787 \text{ mm}, \qquad \text{plan Oxz}, \\ w_0^{(2)} &= 0.9035 \text{ mm}, \qquad \text{plan Oyz}, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \left\langle w_0^{(2)} \right\rangle = 0.9411 \text{ mm},$$

La séparation obtenue à un distance $d^* = 770$ mm est

$$\Delta x = 10.7 \text{ mm}, \tag{3.8}$$

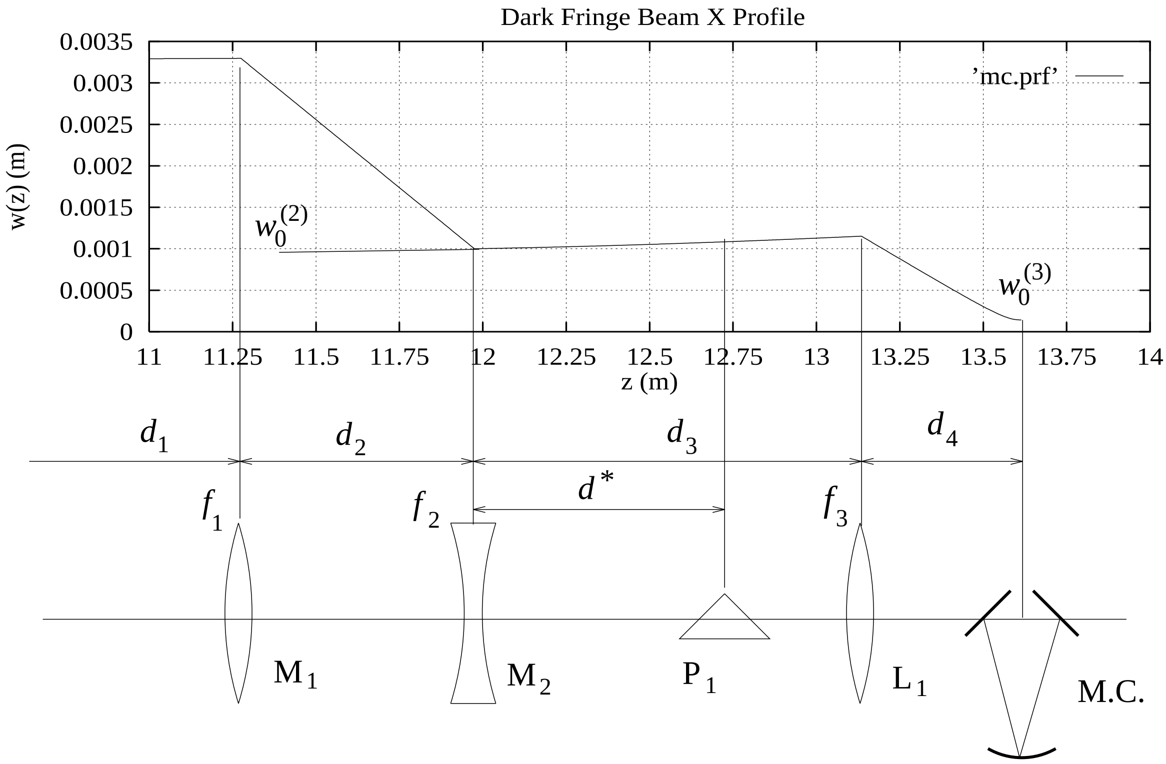

Figure 3.3: Profil du faisceau de frange noire. Le premier waist $w_0^{(1)}$ est positionné à 6m par rapport à l'origine du repère.

soit 2.5 fois $(2w_1 + 2w_2)$, où $w_1 = w_2 = 1.09$ mm.

En ajoutant une lentille L_1 de focale $f_3 = +450$ mm, pour focaliser le faisceau de la frange noire sur le waist $w_0^{(3)}$ du mode cleaner, à une distance $d_3 = 1160$ mm du miroir M_2, on obtient

$$\begin{array}{ll} w_0^{(3)} = 141.36\ \mu\text{m}, & \text{plan Oxz}, \\ w_0^{(3)} = 138.64\ \mu\text{m}, & \text{plan Oyz}, \end{array} \quad \Rightarrow \left\langle w_0^{(3)} \right\rangle = 140.00\ \mu\text{m},$$

Le calcul des valeurs géométriques et optiques a été fait numériquement suivant le formalisme décrit dans l'annexe B.

3.2.3 Les erreurs sur les longueurs focales

Un erreur sur la longueur focale commise lors de la réalisation des lentilles et des miroirs du télescope pourra être corrigée en changeant la distance entre les éléments optiques.

Le graphiques de la figure 3.4 montrent que l'on peut facilement corriger des erreurs sur les longueurs focales de l'ordre de 1%, valeurs typiques des optiques commerciales considérées de “bonne qualité”, avec la distance d_2 entre les miroirs M_1 et M_2.

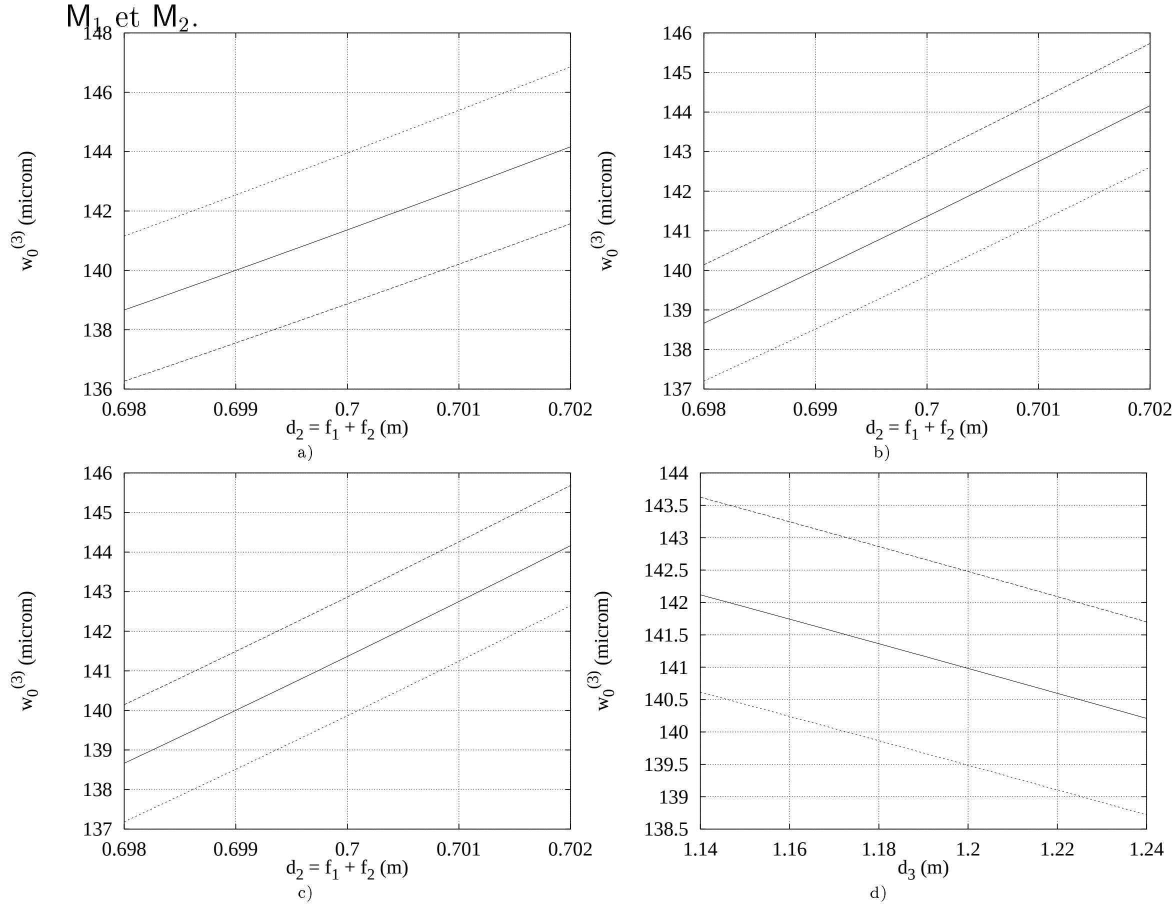

Figure 3.4: Waist $w_0^{(3)}$ après la lentille L_1 en fonction de la distance d_2 entre les miroirs M_1 et M_2 et d_3 entre M_2 et L_1. Les lignes en pointillés et en tirets on été obtenues en considérant une erreur relative sur les longueurs focales. a) $w_0^{(3)}$ en fonction de d_2 et avec $\Delta f_1/f_1 = \pm 0.2\%$. b) $w_0^{(3)}$ en fonction de d_2 et avec $\Delta f_2/f_2 = \pm 0.5\%$. c) $w_0^{(3)}$ en fonction de d_2 et avec $\Delta f_3/f_3 = \pm 1\%$. d) $w_0^{(3)}$ en fonction de d_3 et avec $\Delta f_3/f_3 = \pm 1\%$.

Les sensibilités, calculées à partir de la figure 3.4, de la taille du waist $w_0^{(3)}$ en fonction des distances d_2 et d_3 sont respectivement:

$$\frac{\Delta w_0^{(3)}}{\Delta d_2} = 1.4 \frac{\mu\text{m}}{\text{mm}},$$

$$\frac{\Delta w_0^{(3)}}{\Delta d_3} = 0.019 \frac{\mu\text{m}}{\text{mm}}.$$

Pour un réglage fin du waist au niveau du mode cleaner, on peut donc agir sur la distance entre les deux miroirs M_1 et M_2.

3.3 Pertes par astigmatisme

Pour estimer les pertes en sortie du mode cleaner produites par astigmatisme, il faut calculer la projection du faisceau d'entrée (astigmat) sur le mode fondamental du mode cleaner. Le module au carré du produit des projections dans les deux directions octogonales à celle de la propagation, représente le pourcentage de la puissance du faisceau qui va être transmise par la cavité. Cette valeur soustraite à 1 donne les pertes.

Soit

$$|R, w, 0\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{w}}\, e^{\displaystyle i\phi - x^2 \left(\frac{1}{w^2} + i\frac{k}{2R}\right)} \tag{3.9}$$

le mode propre TEM_0, de la cavité mode cleaner dans le plan Oxz, où w, et R sont respectivement la taille et le rayon de courbure du faisceau.

La projection du faisceau incident sur le mode propre au niveau du waist de la cavité est

$$C_{x,y} = \langle \infty, w_0, 0\, | R_{x,y}, w_{x,y}, 0 \rangle \tag{3.10}$$

où $R_{x,y}$ et $w_{x,y}$ sont respectivement le rayon de courbure et la taille du faisceau incident dans le plan. On pourra donc écrire les pertes par astigmatisme comme

$$\mathcal{L}_{astig} = 1 - |C_x|^2\, |C_y|^2 \tag{3.11}$$

où

$$|C_{x,y}|^2 = \frac{4 w_0 w_{x,y} R_{x,y}}{\sqrt{4(w_0^2 + w_{x,y}^2)^2 R_{x,y}^2 + k^2 w_0^4 w_{x,y}^4}} \tag{3.12}$$

Si l'on a

$$\frac{k}{2R} << 1, \qquad \Rightarrow |C_{x,y}|^2 \simeq 2\frac{w_0 w_{x,y}}{w_0^2 + w_{x,y}^2} \tag{3.13}$$

et on obtient une formule pour les pertes beaucoup plus simple

$$\mathcal{L}_{astig} \simeq 1 - 4\frac{w_x w_y w_0^2}{(w_x^2 + w_0^2)(w_y^2 + w_0^2)}\ . \tag{3.14}$$

En utilisant les valeurs précédentes on obtient la valeur suivante pour les pertes

$$\mathcal{L}_{astig} \simeq 5.2 \cdot 10^{-4}. \tag{3.15}$$

3.4 Les aberrations sphériques

Une onde électromagnétique qui est réfléchie ou transmise par une interface entre deux milieux, peut être déformée (aberrée), si la surface de l'interface n'a pas la géométrie appropriée au front d'onde incident (selon le principe de Huygens-Fresnel). Si on considère des interfaces sphériques, on parlera donc d'aberration de type sphérique.

Dans le cas d'un faisceau gaussien dont le front d'onde est de type parabolique, on aura des aberrations sphériques si on utilise des miroirs ou des lentilles de type standard dont les interfaces sont des parties de sphère.

Les aberrations ont comme conséquence une redistribution de la puissance sur des modes d'ordre supérieur au mode TEM_{00} fondamental qui contient l'information du signal d'onde gravitationnelle et donc une perte du signal sortant du mode cleaner.

3.4.1 Principe de calcul

Soit un TEM_{00} $\Psi_{in} = |R, w, 0, 0\rangle$, où R et w sont le rayon de courbure et la taille du faisceau, qui arrive sur une interface quelconque. Si Ψ_{out} est le faisceau qui émerge, la fraction $|c_{mn}|^2$ de TEM_{mn} contenu dans le faisceau est

$$|c_{mn}|^2 = |\langle R', w', m, n \, |\Psi_{out}\rangle|^2 \,,$$

où R' and w' sont respectivement le rayon de courbure et la taille du faisceau après l'interface.

Les pertes $\mathcal{L}_{aberr}$ dans ce cas seront donc l'énergie totale du TEM_{00} transmise vers les autres modes, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_{aberr} = 1 - |\langle R', w', 0, 0 \, |\Psi_{out}\rangle|^2 \tag{3.16}$$

Le problème se ramène donc à calculer Ψ_{out}, R' et w' puis à déterminer la projection de Ψ_{out}sur le TEM_{00}.

3.4.2 Première méthode (déphasage)

Soit r la coordonnée transverse à celle de propagation z. Si les dimensions du système optique dans la direction z sont négligeables, le système optique introduira une variation de phase sur le faisceau qui en général dépendra de la coordonnée r. On aura donc

$$\Psi_{out} = e^{i\phi(r)} \, |R, w, 0, 0\rangle \,.$$

et l'expression des pertes sera

$$\mathcal{L}_{aberr} = 1 - \left| \langle R', w', 0, 0| \, e^{i\phi(r)} \, |R, w, 0, 0\rangle \right|^2$$

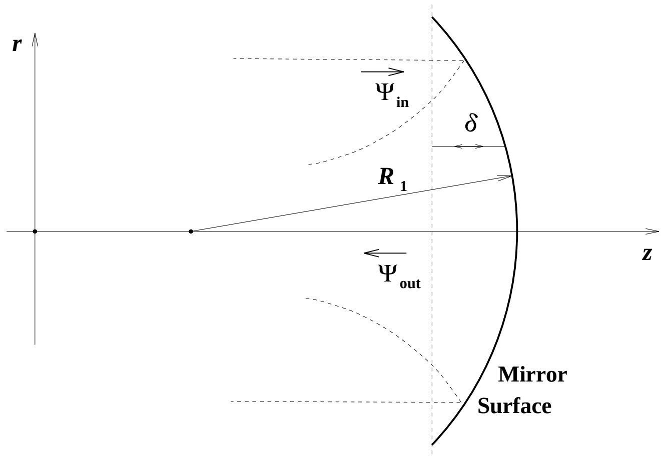

Figure 3.5: Chemin optique δ produit par le miroir courbe ($R_1 < 0$).

Cas d'un miroir

Si l'on considère le cas d'un miroir courbe (voir figure 3.5), le déphasage produit par le chemin optique δ_{tot} du système est

$$\delta_{tot}(r) = 2\delta = 2\left(R_1 - \sqrt{R_1^2 - r^2}\right),$$

où R_1 est le rayon de courbure du miroir et r la distance par rapport à l'axe de propagation Oz.

En adoptant la convention de signe usuelle en optique géométrique et si $r/R << 1$, le développement en série de Taylor au première ordre de la racine de l'expression précédente sera

$$\delta_{tot}(r) \simeq 2\left(-\frac{r^2}{4f} + \frac{r^4}{8R_1^3}\right).$$

où f est la longueur focale du miroir

$$\frac{1}{f} = -\frac{2}{R}.$$

Si l'on néglige le terme de phase constant l'expression du faisceau réfléchi devient

$$\begin{aligned} \Psi_{out} &= e^{-ik\delta_{tot}} \left|R, w, 0, 0\right\rangle && (3.17)\\ &= A_0 e^{-\frac{r^2}{w^2} - ik\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{f}\right) - ik\frac{r^4}{4R_1^3}} && (3.18)\\ &= e^{-ik\frac{r^4}{4R_1^3}} \left|R', w, 0, 0\right\rangle, && (3.19) \end{aligned}$$

où R' est défini par la relation suivante:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}.$$

Dans le cas de l'approximation de Fresnel on peut négliger le terme en r^4 dans Ψ_{out} et donc le faisceau sortant est un pur TEM_{00} avec un rayon de courbure R' et une taille $w' = w$.

$$\Psi_{out} \simeq A_0 e^{-\frac{r^2}{w^2} - ikr^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{f}\right)} = |R', w, 0, 0\rangle .$$

Cas d'une lentille mince

En procédant comme pour le cas d'un miroir, on obtient le chemin optique pour une lentille mince:

$$\delta_{tot}(r) \simeq -\frac{r^2}{2f} - \frac{r^4}{8}(n-1)\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right),$$

où f est la longueur focale de la lentille, c'est-à-dire

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

où n est l'indice de réfraction du milieu et R_1 et R_1 les rayons de courbure des deux surfaces de la lentille.

Le faisceau émergeant devient donc

$$\begin{aligned}
\Psi_{out} &= e^{-ik\delta_{tot}}\,|R, w, 0, 0\rangle && (3.20)\\
&= A_0 e^{-\frac{r^2}{w^2} - ik\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{f}\right) + ik(n-1)\frac{r^4}{8}\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)} && (3.21)\\
&= e^{+ik(n-1)\frac{r^4}{8}\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)}\,|R' w, 0, 0\rangle , && (3.22)
\end{aligned}$$

Dans ce cas on peut donc minimiser les pertes si on minimise le terme suivant:

$$g(R_1, R_2) = \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}.$$

pour une longueur focale donnée, on peut exprimer R_2 en fonction de R_1 et f et donc $g(R_1, R_2)$ en fonction de R_1 uniquement. On obtient la valeur minimale de $g\left[R_1, R_2(R_1, f)\right]$ pour:

$$R_2 = -R_1,$$

ce qui correspond à une lentille bi-convexe avec le même rayon de courbure.

La figure 3.6 montre l'allure de $g(R_1)$ en fonction de R_1 pour une longueur focale $f = 1$ et un indice de réfraction $n = 1,5$.

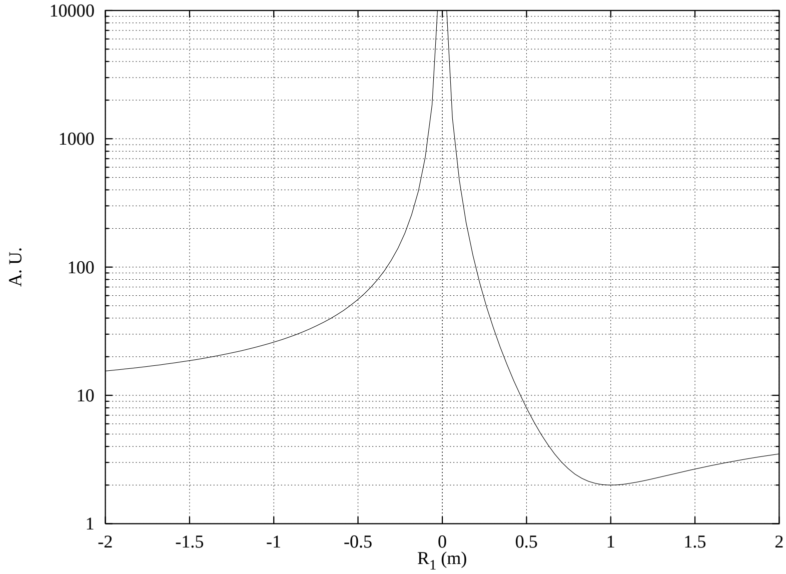

Figure 3.6: “Terme de pertes ” $g(R)$ en fonction du rayon de courbure de la lentille, pour un longueur focale donnée.

3.4.3 Calcul des pertes

En partant de l'équation (3.16) on peut obtenir la formule des pertes pour le TEM$_{mm}$

$$\mathcal{L}(\epsilon) = 1 - 2\left|\int_0^\infty d\zeta\,\zeta\, e^{-\zeta^2 - i\epsilon\zeta^4}\right|^2,$$

où ϵ est une variable réelle qui dépend du chemin optique considéré.

Dans le cas du miroir on obtient

$$\epsilon = k\frac{w_0^4}{16R_1^3},$$

et pour la lentille mince de rayons de courbure R_1, R_2

$$\epsilon = -kw_0^4\frac{(n-1)}{32}\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right).$$

Pour obtenir des résultats numériques de comparaison on a utilisé les valeurs suivantes

$$\begin{array}{lcll} n & = & 1.5, & \\ w_0 & = & 1.984\cdot 10^{-2}\ m & \text{(waist de VIRGO finale).} \\ R & = & \infty & \end{array}$$

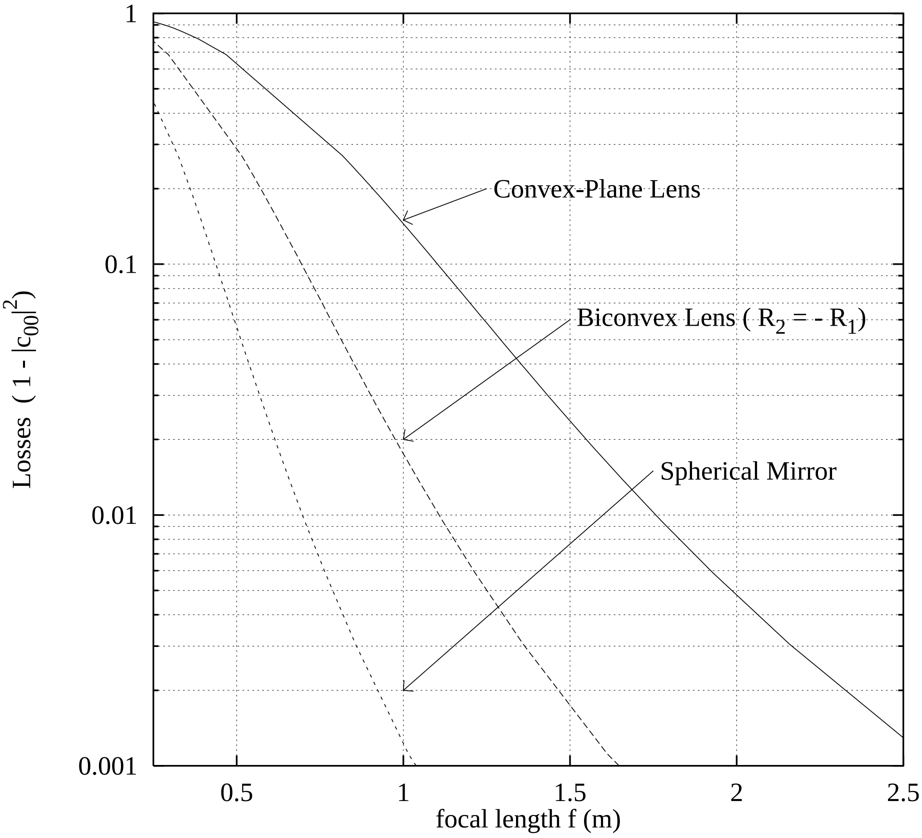

Figure 3.7: Pertes du TEM_{00} en fonction de la longueur focale.

Pour intégrer numériquement $\mathcal{L}(\epsilon)$, on a utilisé le logiciel Maple V, capable de manipuler des formules de façon symbolique et numérique.

Les courbes de la figure 3.7 montrent les pertes attendues en fonction de la longueur focale dans le cas d'un miroir sphérique, d'une lentille bi-convexe symétrique et d'une lentille plan-convexe.

La table référencée donne la longueur focale minimale qui peut être utilisée si l'on admet des pertes de 0.1% et 1%, pour les trois cas considérés

Pertes (%)	Miroir sphérique f (m)	Lentille bi-convexe $(R_2 = -R_1)$ f (m)	Lentille plan-convexe f (m)
1	0.7	1.1	1.8
0.1	1.0	1.7	2.2

Ce résultat ne concorde pas avec les prédictions de l'optique géométrique dans l'approximation du troisième ordre nécessaire pour décrire les aberrations sphériques [9].

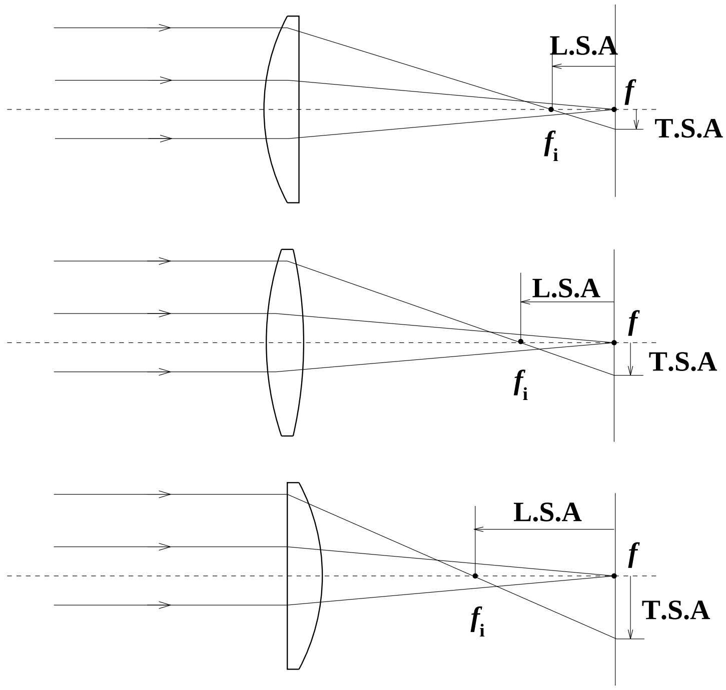

Figure 3.8: Aberration sphérique transverse (T.S.A) et longitudinale (L.S.A) pour une onde plane traversant trois types de lentilles convergentes.

Les aberrations sphériques peuvent être mesurées avec deux paramètres:

- la distance entre le point focal F et le point F_i intersection d'un rayon générique qui n'appartient pas au régime paraxiale avec l'axe optique (aberration sphérique longitudinale) (LSA).
- La distance entre le point focal F et l'intersection d'un rayon générique qui n'appartient pas au régime paraxiale avec le plan focal (aberration sphérique transversale)(TSA).

Les résultats de l'optique géométrique sont résumés sur la figure 3.8, dans le cas d'une onde plane traversant trois types possibles de lentilles.

On peut donc raisonnablement s'attendre à ce que les pertes soient plus petites dans le cas des aberrations sphériques produites par une lentille convexe-plan.

De plus la méthode précédente ne permet pas de distinguer l'orientation de la lentille et indique que les pertes minimales sont obtenues dans le cas d'une lentille bi-convexe avec le même rayon de courbure.

La raison d'un tel résultat erroné vient de ce que l'on ne peut pas schématiser la lentille comme un objet qui change simplement la phase de l'onde en fonction de la position transverse, mais qu'il faut considérer la propagation dans le milieu de la lentille.

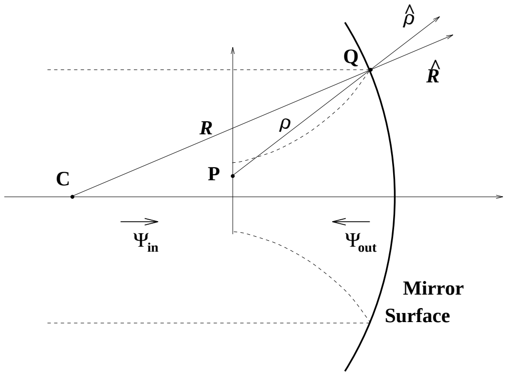

Figure 3.9: Chemin optique pour l'intégrale de Kirchhoff dans le cas d'un miroir.

Une méthode plus rigoureuse est donc nécessaire pour calculer le faisceau émergent et donc les pertes par aberrations sphériques.

3.4.4 Deuxième méthode (intégrale de Kirchhoff)

La formule de Kirchhoff est la solution intégrale de l'équation de Helmholtz, qui est l'équation d'onde dans l'approximation scalaire et dans le cas d'une onde monochromatique [6].

La formule de Kirchhoff permet de calculer le champ en chaque point P de l'espace en connaissant la distribution du champ dans une surface qui contient P.

Si l'on considère la surface d'un miroir ou d'une lentille comme la surface où le champ est connu, on pourra calculer les champs réfléchis et transmis.

Cas d'un miroir

Pour un miroir sphérique (voir figure 3.9), l'intégrale de Kirchhoff qui donne le faisceau réfléchi Ψ_{out} au point P est l'intégrale de surface

$$\Psi_{out}(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left[\Psi_{in}(Q)\frac{\partial}{\partial\hat{n}}\left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right) - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\hat{n}}\Psi_{in}(Q)\right]dS,$$

où $\partial/\partial\hat{n}$ est la dérivée vectorielle dans la direction du vecteur perpendiculaire à la surface du miroir, Q un point sur le miroir, ρ le chemin optique entre P et Q et enfin

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho},$$

est un onde sphérique, solution particulière de l'équation de Helmholtz.

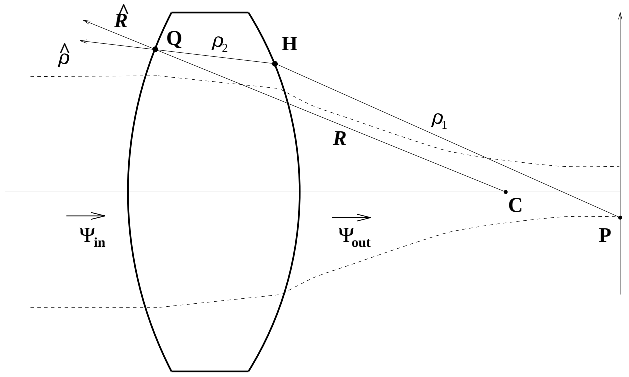

Figure 3.10: Chemin optique pour l'intégrale de Kirchhoff dans le cas d'une lentille épaisse.

Cas d'une lentille épaisse

Pour une lentille épaisse, l'intégrale de Kirchhoff prend la forme (voir figure 3.10)

$$\Psi_{out}(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left[\Psi_{in}(Q)\frac{\partial}{\partial \hat{n}}\left(\frac{e^{-ik(\rho_1+n\rho_2)}}{\rho_1+n\rho_2}\right) - \frac{e^{-ik(\rho_1+n\rho_2)}}{\rho_1+n\rho_2}\frac{\partial}{\partial \hat{n}}\Psi_{in}(Q)\right] dS,$$

où n est l'indice de réfraction du matériau de la lentille.

Dans ce cas, la solution particulière est

$$\frac{e^{-ik(\rho_1+n\rho_2)}}{\rho_1+n\rho_2},$$

où le chemin optique total $\rho_1+n\rho_2$ entre les points P et Q est calculé en utilisant la loi de réfraction de Snell.

Résultats numériques

Sur la figure 3.11 sont portés les résultats numériques obtenus pour les trois cas considérés en utilisant la règle simple de l'approximation par des rectangles étendus à trois dimensions.

Les calculs qui ont été effectués avec les mêmes paramètres que ceux utilisés avec la première méthode, montrent un plein accord avec les résultats de l'optique géométrique.

- La lentille épaisse convexe-plan (la moins aberrante d'après l'optique géométrique) est celle qui produit le moins de pertes par aberration sphérique.

- La lentille bi-convexe avec les mêmes rayons de courbures produit plus de pertes que la concave-plan et moins que la plan-convexe.

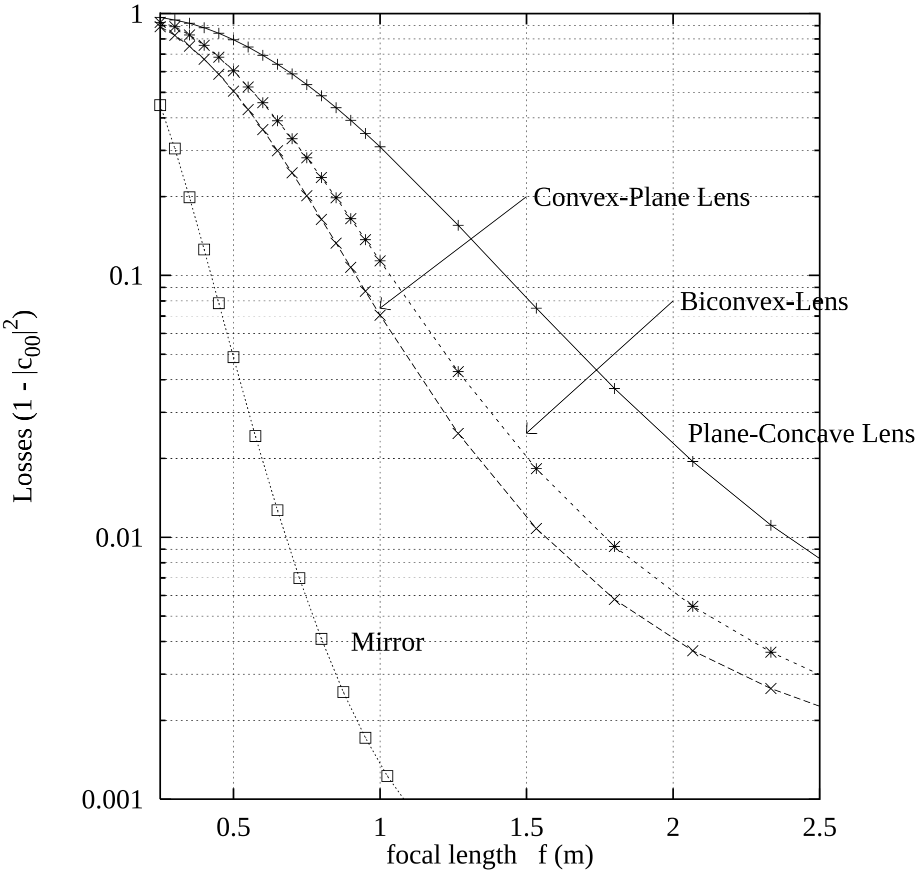

Figure 3.11: Pertes sur le TEM_{00} calculées à partir de l'intégrale de Kirchhoff.

- La lentille plan-concave (la pire pour ce qui est des aberrations sphériques) produit plus de pertes que toutes les autres.

Il est intéressant de noter que le résultat obtenu dans le cas d'un miroir en utilisant la première méthode (déphasage) est très proche de celui obtenu avec l'intégrale de Kirchhoff.

3.4.5 Conclusions

- Pour évaluer correctement les pertes sur le TEM_{00} produites par aberration sphérique il faut utiliser la formule de l'intégrale de Kirchhoff.

- La méthode du déphasage peut être appliquée dans les cas du miroir sphérique puis qu'elle donne des résultats très proches de ceux obtenus avec la méthode de Kirchhoff.

- Les contraintes sur le télescope du banc de détection imposant des pertes pour le TEM_{00} de l'ordre de 1%, il faut donc appliquer des restrictions particulières sur le premier élément optique du télescope de VIRGO version finale qui sont:

- Des lentilles convexe-plan de longueur focale $f \geq 2\ m$,
- Des miroirs de longueur focale $f \geq 1\ m$.

3.5 La "diaphonie" entre les faisceaux

Deux faisceaux gaussien avec la même polarisation et longueur d'onde, qui arrivent sur une surface avec des angles différents, peuvent produire un phénomène interférence. Dans le cas d'optiques idéales, cette interférence ne se produit pas car les faisceaux sont suffisamment séparés. Cependant ce phénomène peut se vérifier essentiellement à cause de la diffusion cohérente produite par les surfaces optiques. Ceci est le cas des deux faisceaux qui sortent de l'interféromètre VIRGO, le faisceau de la frange noire et le faisceau secondaire réfléchi par la deuxième face de la séparatrice.

Cette interférence entre les deux faisceaux ("diaphonie" des faisceaux), associée à un bruit en position sur les éléments optiques, peut produire un bruit sur le signal de la frange noire. Il faut donc étudier ce problème pour déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles ce bruit est négligeable.

3.5.1 Le bruit par "diaphonie" sur le signal

La forme du champ à la sortie de l'interféromètre réglé sur la frange noire est

$$A_f = rA_1 - tA_2, \tag{3.23}$$

où A_1 est le faisceau de la frange noire, A_2 le faisceau secondaire, r^2 et t^2 sont la réflectivité et la "transmittivité" de la séparatrice.

La diffusion du faisceau engendrée par la réflexion sur le premier miroir du télescope du banc de détection produit un champ dans la même direction que celui de la frange noire.

Si on néglige un facteur de phase commun, le faisceau de la frange noire après la réflexion sera

$$A_f = rA_1 - tA_2 + r'\beta e^{i\Delta\phi} A_1, \tag{3.24}$$

où r'^2 est la réflectivité de la deuxième face de la séparatrice, β est le coefficient réel de la "diaphonie" (qui dépendra de l'angle entre les faisceaux incidents et de la rugosité de la surface du miroir) et enfin où $\Delta\phi$ est la différence de chemin optique entre les faisceaux. En considérant un bruit $\delta\phi \ll 1$, la différence de phase entre les deux faisceaux s'écrit

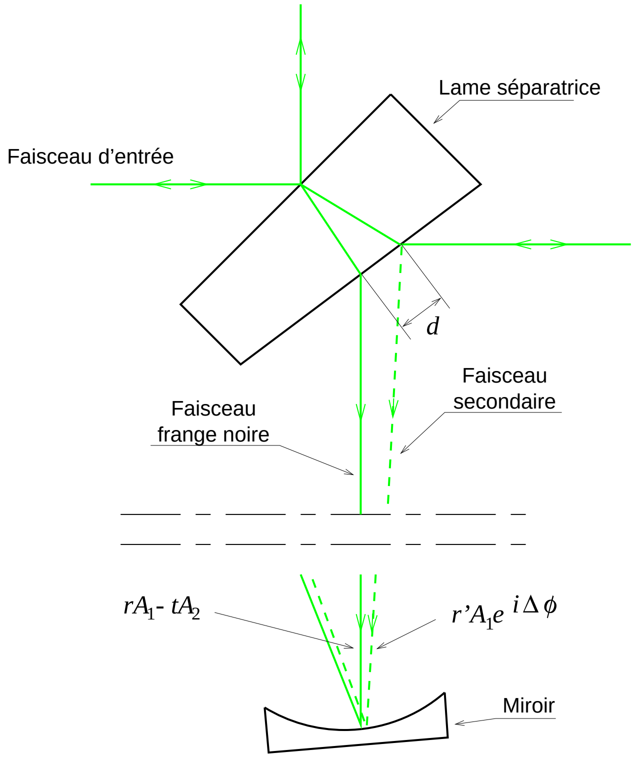

Figure 3.12: Lame séparatrice et premier miroir du télescope.

$$\Delta\phi = \Delta\phi_0 + \delta\phi, \tag{3.25}$$

et (3.24) prend la forme approchée suivante

$$\begin{aligned} A_f &= rA_1 - tA_2 + r'\beta e^{i\Delta\phi_0} A_1 \left(1 + i\delta\phi\right) \\ &= a + r'\beta \left(\cos\Delta\phi_0 - \delta\phi \sin\Delta\phi_0\right) A_1 + \\ & \quad ir'\beta \left(\sin\Delta\phi_0 + \delta\phi \cos\Delta\phi_0\right) A_1, \end{aligned} \tag{3.26}$$

où

$$a = rA_1 - tA_2 \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

Dans le cas où le faisceau de frange noire porte le signal d'une onde gravitationnelle et sans considérer le phénomène de la “diaphonie”, le faisceau réfléchi par le premier miroir du télescope est

$$A_f = rA_1 e^{i\delta\phi_{GW}} - tA_2 e^{-i\delta\phi_{GW}}, \qquad A_1, A_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.28}$$

où $\delta\phi_{GW}$ est le déphasage produit par l'onde gravitationnelle.

Si $\delta\phi_{GW}, \ll 1$ la formule précédente devient

$$A_f = a + i\,(rA_1 + tA_2)\,\delta\phi_{GW}. \tag{3.29}$$

La partie imaginaire contient l'information sur le signal de l'onde gravitationnelle.

En comparant les équations (3.26) et (3.29), on peut déduire que:

- le bruit sur le signal de l'onde gravitationnelle est proportionnel à $r'\beta$,
- la qualité de la frange noire est dégradée

Si l'on suppose que

$$A_1 \simeq A_2, \qquad t \simeq r \qquad \text{(contraste parfait)}, \tag{3.30}$$

on obtient la condition suivante pour rendre le bruit produit par la "diaphonie" négligeable

$$\beta < \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{r'}\frac{\delta\phi_{GW}}{\delta\phi}. \tag{3.31}$$

Il faut donc estimer le paramètre β et le bruit de phase $\delta\phi$.

3.5.2 La "diaphonie" dans le cas de faisceaux modulés en phase

Cette section est consacrée au calcul de l'effet de la"diaphonie" dans le cas d'une détection fondée sur la technique de modulation en phase du faisceau.

Pour un indice de modulation m faible, l'expression d'un champ modulé en phase est

$$A = \left\{ J_0(m)A^{(0)} + J_1(m)\left[A^{(+)}e^{i\Omega t} - A^{(-)}e^{-i\Omega t}\right]\right\} e^{i\omega t}, \tag{3.32}$$

où $A^{(0)}, A^{(+)}, A^{(-)}$ sont respectivement les amplitudes de la porteuse, de la bande latérale gauche et de la bande latérale droite, $\omega/2\pi$ est la fréquence de la porteuse, $\Omega/2\pi$ est la fréquence de modulation et enfin J_0, J_1 les fonctions de Bessel.

Les composantes en phase et en quadrature à la fréquence de modulation sont donc

$$\left[|A|^2\right]_{\sin\Omega t} = -2J_0J_1\,\mathrm{Im}\left\{A^{(0)^*}A^{(+)} - A^{(0)}A^{(-)^*}\right\}, \tag{3.33}$$

$$\left[|A|^2\right]_{\cos\Omega t} = +2J_0J_1\,\mathrm{Re}\left\{A^{(0)^*}A^{(+)} - A^{(0)}A^{(-)^*}\right\}. \tag{3.34}$$

Dans notre cas, la forme du champ réfléchi par M_1 est

$$A^{(k)} \simeq a^{(k)} + r'\beta\,(1+i\delta\phi)\,A_1^{(k)}e^{i\Delta\phi_0}, \qquad k=-,0,+, \tag{3.35}$$

où k est l'indice de la bande de fréquence et

$$a^{(0)} = A_1^{(0)}r - A_2^{(0)}t \qquad \in \mathbb{R}, \tag{3.36}$$

$$a^{(\pm)} = A_1^{(\pm)}r + A_2^{(\pm)}t \qquad \in \mathbb{C}. \tag{3.37}$$

La différence de phase due à la différence de fréquence est négligée ($\Delta\phi(\omega\pm\Omega)\simeq\Delta\phi(\omega)$).

En négligeant les termes du deuxième ordre en $r'\beta$, l'argument de la partie réelle et de la partie imaginaire de (3.33) et (3.34) devient

$$\begin{aligned} A^{(0)^*}A^{(+)} - A^{(0)}A^{(-)^*} \simeq\; & a^{(0)}\left[(1+i\delta\phi)\,A_1^{(+)}e^{i\Delta\phi_0} - (1-i\delta\phi)\,A_1^{(-)^*}e^{-i\Delta\phi_0}\right]r'\beta \\ & \left[(1-i\delta\phi)\,a^{(+)}A_1^{(0)}e^{i\Delta\phi_0} - (1+i\delta\phi)\,a^{(-)^*}e^{-i\Delta\phi_0}\right]r'\beta \\ & a^{(0)}\left(a^{(+)} - a^{(-)^*}\right). \end{aligned} \tag{3.38}$$

La condition de frange noire (qui implique un signal démodulé nul en l'absence de "diaphonie") impose

$$a^{(+)} = a^{(-)^*}. \tag{3.39}$$

En supposant que

$$\left|A_k^{(+)}\right| = \left|A_k^{(-)}\right|, \qquad k=1,2, \tag{3.40}$$

et que la phase des bandes latérales réfléchies par les cavités Fabry-Perot satisfait la condition suivante

$$\varphi_k^{(+)} = \varphi_k^{(-)}, \qquad k=1,2, \tag{3.41}$$

on obtient

$$\begin{aligned} A^{(0)*}A^{(+)} - A^{(0)}A^{(-)*} &= 2a^{(0)}r'\beta \left|A_1^{(\pm)}\right| \left[\cos\left(\Delta\phi_0 \ + \varphi_1^{(\pm)}\right) - \delta\phi \sin\left(\Delta\phi_0 \ + \varphi_1^{(\pm)}\right)\right] \\ &\quad -2a^{(+)}r'\beta A_1^{(0)} \left(\sin\Delta\phi_0 + \delta\phi\cos\Delta\phi_0\right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

On obtient finalement les composantes en phase et en quadrature

$$\begin{aligned} |A_f|_I^2 &= \ -4J_0J_1A_1^{(0)}\mathrm{Im}\left\{a^{(+)}\right\} r'\beta \left(\sin\Delta\phi_0 + \delta\phi\cos\Delta\phi_0\right), \\ |A_f|_Q^2 &= \ +4J_0J_1A_1^{(0)}\mathrm{Re}\left\{a^{(+)}\right\} r'\beta \left(\sin\Delta\phi_0 + \delta\phi\cos\Delta\phi_0\right) \\ &\quad +4J_0J_1a^{(0)}r'\beta \left|A_1^{(\pm)}\right| \left[\cos\left(\Delta\phi_0 \ + \varphi_1^{(\pm)}\right) - \delta\phi\sin\left(\Delta\phi_0 \ + \varphi_1^{(\pm)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Dans le cas d'une onde gravitationnelle, on obtient

$$\begin{aligned} |A_{GW}|_I^2 &= \ 4J_0J_1\left(A_1^{(0)}r + tA_2^{(0)}\right)\mathrm{Re}\left\{a^{(+)}\right\}\delta\phi_{GW}, \\ |A_{GW}|_Q^2 &= \ 4J_0J_1\left(A_1^{(0)}r + tA_2^{(0)}\right)\mathrm{Im}\left\{a^{(+)}\right\}\delta\phi_{GW}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

On comparant (3.43) et (3.44), on observe

- un décalage en DC sur le signal démodulé (lié à dégradation de la frange noire),
- un bruit sur le signal démodulé (bruit entre les deux faisceaux).

On considérant donc $a^{(0)} \simeq 0$, on vérifie aussi que dans le cas d'une extraction du signal fondée sur la technique de modulation en phase, on obtient les mêmes résultats que ceux obtenus précédemment dans le cas d'une détection continue.

3.5.3 Le bruit sur la différence de chemin optique

Le bruit de phase $\delta\phi$ sur $\Delta\phi$ provient essentiellement du bruit angulaire sur la séparatrice de VIRGO.

Le bruit de phase $\delta\phi$ est relié à la distance d entre les faisceaux, mesurée au niveau de la deuxième face (voir figure 3.12) et à la densité spectrale $\tilde{\alpha}(\omega)$ du bruit angulaire, par

$$\delta\phi(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda}\tilde{\alpha}(\omega)d. \tag{3.45}$$

Dans la bande de fréquence considérée (dominée par le bruit sismique), l'amplitude de $\tilde{\alpha}(\omega)$ peut être estimée en considérant la rotation maximale permise par le banc de détection [37] et à "plus haute" fréquence [38] en considérant le bruit thermique. On aura donc

$$\begin{array}{lll} \delta\alpha_{RMS} & \simeq & 1.0\cdot 10^{-6}\ rad, \qquad \nu < 1 \text{ Hz}, \\ \delta\tilde{\alpha} & \simeq & 2\cdot 10^{-17}\ rad/\sqrt{Hz}, \quad \nu \simeq 10 \text{ Hz}. \end{array} \tag{3.46}$$

En prenant $d \simeq 0,06\ m$, on obtient

$$\begin{array}{lll} \delta\phi_{RMS} & \simeq & 3.6\cdot 10^{-1}\ rad, \qquad \nu < 1 \text{ Hz}, \\ \delta\tilde{\phi} & \simeq & 7.4\cdot 10^{-12}\ rad/\sqrt{Hz}, \quad \nu \simeq 10 \text{ Hz}. \end{array} \tag{3.47}$$

La sensibilité attendue pour VIRGO correspond à

$$\begin{array}{lll} \langle\delta\phi_{GW}\rangle_{RMS} & \simeq & 1,3\cdot 10^{-8}, \qquad \nu < 1 \text{ Hz}, \quad \text{(surestimé)} \\ \delta\tilde{\phi}_{GW} & \simeq & 1,1\cdot 10^{-9}/\sqrt{Hz}, \quad \nu \simeq 10 \text{ Hz}, \end{array} \tag{3.48}$$

et si $r' = 10^{-2}$ [32], de (3.31) on déduit

$$\begin{array}{l} \beta \ll 2.5\cdot 10^{-6}, \quad \nu < 1 \text{ Hz}, \\ \\ \beta \ll 1.1\cdot 10^{+4}, \quad \nu \simeq 10 \text{ Hz}. \end{array} \tag{3.49}$$

La sensibilité en phase de l'interféromètre central de VIRGO étant presque la même que celle de l'interféromètre complet, on obtient les mêmes conditions sur β.

3.5.4 Le coefficient β de "diaphonie"

Pour estimer le coefficient β, on peut calculer la projection du faisceau diffusé sur le TEM_{00} de la frange noire. Le module au carré de la projection sera donc proportionnel à β.

La méthode de calcul du faisceau diffusé est fondée sur le modèle statistique de la rugosité de la surface [39]. Dans ce cas, la forme d'un TEM_{00} $|\psi_{00}\rangle$ réfléchi par un surface avec un angle d'incidence θ dans le repère du miroir (voir figure 3.13) est

$$|\Psi(\underline{x})\rangle = \sqrt{P_0}e^{ik\,[2f(\underline{x}) + x\theta]}\,|\psi_{00}(\underline{x})\rangle\,, \tag{3.50}$$

où $\underline{x} = (x, y)$ est un variable aléatoire bi-dimensionelle, $f(\underline{x})$ est une fonction stochastique stationnaire et P_0 est la puissance du faisceau secondaire. La valeur moyenne, la variance et l'autocorrélation de la fonction f sont respectivement $\langle f(\underline{x})\rangle = 0$, $\langle f^2(\underline{x})\rangle = \sigma^2$, $\langle f^2(\underline{x}) f^2(\underline{x}')\rangle / \sigma^2 = C(|\underline{x} - \underline{x}'|)$. Si l'on suppose que $\sigma << \lambda$ la projection sur le TEM_{00} de la frange noire $\sqrt{P_{d.f.}}\,|\psi_{00}(\underline{x})\rangle$ devient

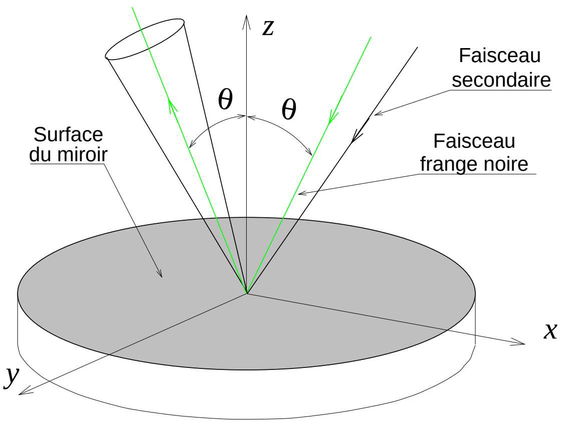

Figure 3.13: Repère du Miroir.

$$\gamma = \sqrt{P_0 P_{d.f.}}\,\langle \psi_{00}\,|\Psi\rangle = 2ik\sqrt{P_0 P_{d.f.}} \int_{\mathbb{R}^2} d\underline{x}\ \psi^*_{00}(\underline{x})\psi_{00}(\underline{x}) f(\underline{x}) e^{2ikx\theta}, \quad (3.51)$$

et si l'on calcule la valeur moyenne du module au carré de γ, on obtient

$$\langle \gamma^*\gamma\rangle = \epsilon P_0 P_{d.f.} \int d\underline{x} \int d\underline{x}'\ I(\underline{x}) I(\underline{x}') e^{2ik(x - x')\theta} C(|\underline{x} - \underline{x}'|), \qquad (3.52)$$

où $I(\underline{x}) = |\psi_{00}(\underline{x})|^2$ est l'intensité du TEM_{00} et $\epsilon = 4k^2\sigma^2$ le pourcentage de pertes par diffusion.

A l'aide de la transformée de Fourier, du théorème de Wiener-Khintchine et d'un peu d'algèbre, la formule précédente devient

$$\langle \gamma^*\gamma\rangle = \frac{\epsilon}{4\pi^2} P_0 P_{d.f.} \int_{\mathbb{R}^2} d\underline{s}\ \tilde{C}(s - 2k\theta)\tilde{I}^2(s). \qquad (3.53)$$

Dans le cas d'un TEM_{00}, $\tilde{I}^2(s)$ est un fonction très étroite par rapport à $\tilde{C}(s - 2k\theta)$ et donc (3.53) peut être approchée de la façon suivante

$$\langle \gamma^*\gamma\rangle \simeq \frac{\epsilon}{4\pi^2} P_0 P_{d.f.} \tilde{C}(2k\theta) \int d\underline{s}\ \tilde{I}^2(s). \qquad (3.54)$$

En calculant l'intégrale et en considérant que

$$\tilde{C}(k\theta) = \frac{\lambda^2}{2\pi} p(\theta), \tag{3.55}$$

on obtient le résultat

$$\beta = \frac{\sqrt{\langle \gamma^* \gamma \rangle}}{P_{d.f.}} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}\epsilon \frac{P_0}{P_{d.f.}} p(\theta)}\ \theta_\infty. \tag{3.56}$$

Pour des angles $\theta > 10^{-3}\ rad$, on a $p(\theta) \simeq a/\theta^2$ et la formule précédente devient

$$\beta \simeq \sqrt{\frac{1}{2}\frac{P_0}{P_{d.f.}} a\epsilon}\ \frac{\theta_\infty}{\theta}. \tag{3.57}$$

Le rapport $P_0/P_{d.f.}$ peut être estimé par la relation

$$\frac{P_0}{P_{d.f.}} = \frac{r'^2}{1 - \mathcal{C}} \tag{3.58}$$

où $\mathcal{C}$ est le contraste en sortie de l'interféromètre.

En utilisant les valeurs suivantes pour VIRGO "final"

$$\begin{array}{ll} \theta = 5^\circ\ , & \\ a\epsilon = 10^{-5}\ , & \theta_\infty = 1.7 \cdot 10^{-5}\ rad \\ 1 - \mathcal{C} = 10^{-3}\ , & r' = 10^{-2} \end{array}$$

on obtient

$$\beta \simeq 1.38 \cdot 10^{-7}, \qquad \text{(VIRGO final)}. \tag{3.59}$$

Pour l'interféromètre central

$$\begin{array}{ll} \theta = 2.5^\circ\ , & \\ a\epsilon = 10^{-5}\ , & \theta_\infty = 9.68 \cdot 10^{-5}\ rad \\ 1 - \mathcal{C} = 10^{-3}\ , & r' = 10^{-2} \end{array}$$

et donc on obtient

$$\beta \simeq 1.56 \cdot 10^{-6}, \qquad \text{(VIRGO interf. central)}. \tag{3.60}$$

3.5.5 Conclusions

A des fréquences $\nu \geq 10$ Hz, on peut négliger l'effet de "diaphonie" pour les composants des télescopes de VIRGO.

En considérant que la sensibilité en phase de VIRGO à la fréquence de $\nu \sim 1$ Hz a été surestimée, l'effet de "diaphonie" reste négligeable à cette fréquence.

3.6 Spécifications des éléments du télescope

La table ci-dessous récapitule les paramètres des éléments optiques du télescope. La plupart d'entre eux ont déjà été discutés dans les sections précédentes. Le matériau de fabrication, la silice de qualité optique, a été choisi pour avoir des caractéristiques d'absorption et de stabilité satisfaisantes.

Élément	Miroir M_1	Prisme P_1	Miroir M_2	LentilleL_1
Angle d'incidence	$\sim 3.08°$	$\sim 45°$	$\sim 3.08°$	$0°$
Reflec. $1^{ère}$Face (polarisation s)	H.R. ($\mathcal{L} \sim 10^{-4}$)	H.R. ($\mathcal{L} \sim 10^{-4}$)	H.R. ($\mathcal{L} \sim 10^{-4}$)	A.R. ($\mathcal{L} \sim 10^{-4}$)
Reflec. $2^{ème}$Face (polarisation s)	No	H.R. ($\mathcal{L} \sim 10^{-4}$)	No	A.R.
$1^{ère}$ Rayon Courb..	$-(2000 \pm 4)$mm	/	(600 ± 3)mm	/
$2^{ème}$ Rayon Courb..	∞	/	∞	/
f_i	1000mm	/	-300mm	(450 ± 5)mm
Rugosité $1^{ère}$Face (RMS)	$\sim 10^{-9}\ m$	$\sim 10^{-9}\ m$	$\sim 10^{-9}\ m$	$\sim 10^{-9}\ m$
Rugosité $2^{ème}$Face (RMS)	non traité	$\sim 10^{-9}\ m$	non traité	$\sim 10^{-9}\ m$
Matériau	Silice	Silice	Silice	Silice
Diamètre/côté	ø2"	25 mm(coté)	ø2"	ø1"
Épaisseur	10 mm	/	10 mm	/

Chapitre 4

Les systèmes de mesure de position du banc de détection

Introduction

Ce chapitre présente les systèmes de mesure de position local et global dont les fonctions ont été déjà discutées dans le chapitre 2.

Tout d'abord la méthode de mesure des six degrés de liberté d'un objet par rapport à un repère local, grâce à une caméra CCD, sera détaillée, les propriétés du système, le matériel et logiciel qui ont été développés seront aussi présentés. Dans la deuxième partie seront montrés les résultats théoriques pour la conception du système de positionnement global du banc, par rapport au faisceau laser sortant de l'interféromètre (position globale). Les caractéristiques du capteur utilisé, une photodiode à quadrants, les mesures faites pour la valider et la caractériser, sont enfin présentées dans les deux dernières sections.

L'utilisation de ces systèmes et les performances obtenues feront l'objet des deux prochains chapitres.

4.1 Le système de positionnement local

Nous allons voir qu'un dispositif d'imagerie peut être utilisé pour mesurer, par rapport à un repère local arbitraire, les six degrés de liberté d'un objet rigide quelconque (les trois translations et les trois angles autour de trois axes orthogonaux).

Il y a plusieurs moyens de déterminer les six coordonnées d'un objet. Celui présenté ici a été choisi car c'est l'un des plus simples à réaliser et installer. En effet il suffit de disposer d'un point de vue de l'objet, d'avoir au moins trois marques sur l'objet et d'avoir une lampe pour les éclairer. La mesure de la variation des coordonnées des trois images des marques sur le plan focale de la caméra (six informations indépendantes), permet de calculer les six degrés de liberté de l'objet $(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$. L'utilisation de marques additionnelles permet d'améliorer la résolution du système.

4.1.1 Principe de mesure

Coordonnées de l'image de l'objet

Considérons un objet quelconque, dont l'image est focalisée sur un plan, dit plan image, au moyen d'une lentille de focal f. Soit $Oxyz$ le repère lié à l'objet et $O_c x'_c y'_c$ celui lié au plan de l'image. Les paramètres géométriques des transformations qui relient les deux repères peuvent être définis de la façon suivante (voir figure 4.1):

- α : angle de rotation autour de l'axe Oy
- β : angle de rotation autour de l'axe Ox'
- $|\vec{r_0}|$: distance entre l'axe du système optique de la lentille et le centre O du repère de l'objet.
- D : distance du plan de la lentille f au centre du repère de l'objet $Oxyz$
- γ : angle de rotation autour de l'axe du système optique de la lentille $O_c z_c$

Il faut donc appliquer les transformations suivantes aux points $\vec{x} = (x, y, z)$ de l'objet, pour avoir leurs images sur le plan $O_c x'_c y'_c$:

- rotation α autour de l'axe Oy,
- rotation β autour de l'axe Ox',
- translation définie par le vecteur $\vec{r_0}$,
- projection au moyen de la loi de l'optique géométrique pour les lentilles minces [9].

Le première matrice de rotation $\hat{R}(\alpha)$ à appliquer est

$$\hat{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 1 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 1 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

et la deuxième matrice de rotation $\hat{R}(\beta)$ est

$$\hat{R}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

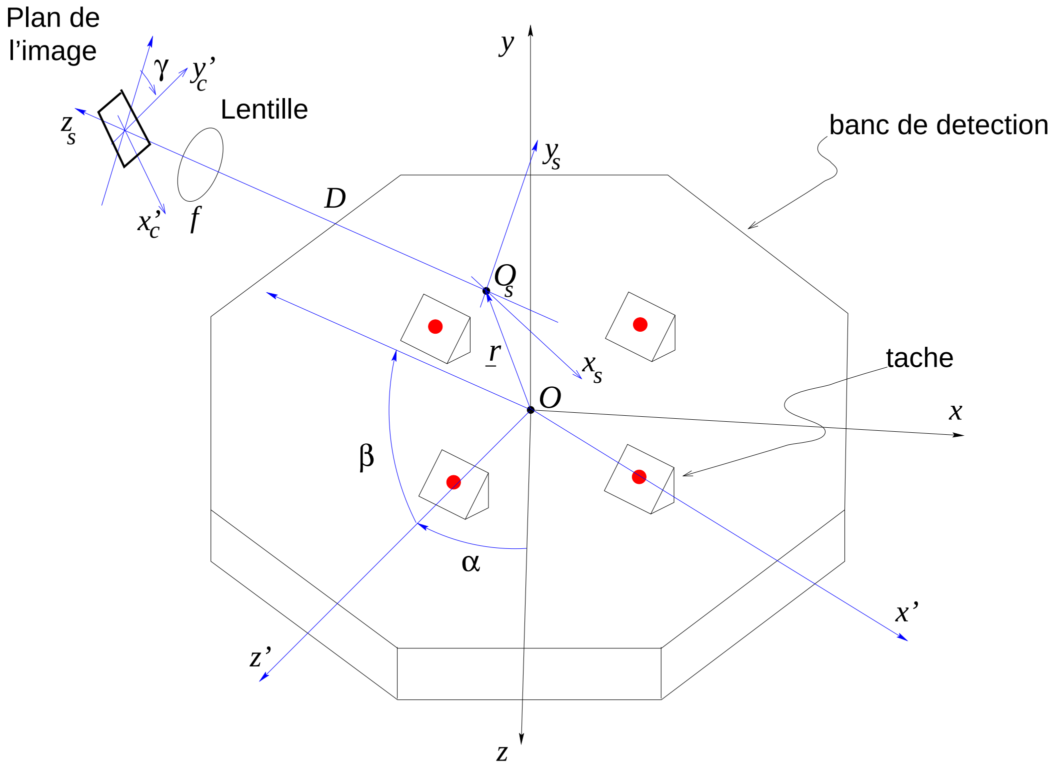

Figure 4.1: Le différents repères et paramètres géométriques pour la détermination de l'image des marques sur le plan $O_c x'_c y'_c$ de l'image.

Donc en appliquant l'opérateur fait des deux rotations et d'une translation au point $\vec{x}$ de l'objet, on obtient

$$\vec{x}_s = \left(\hat{R}(\beta)\hat{R}(\alpha) - \vec{r}_0\right)\vec{x} \tag{4.3}$$

qui donne les coordonnées du points $\vec{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$ par rapport à un repère aligné sur l'axe du système optique. L'application de la loi de l'optique géométrique pour la lentille mince, fournit l'opérateur de projection $\hat{P}$ qui donne les coordonnées du point $\vec{x}_c = (x_c, y_c, z_c = 0)$ sur le plan image de $\vec{x}_s$

$$\hat{P} = \frac{f}{f - (D - z_s)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

On aura donc

$$\vec{x}_c = \hat{P}(z_s)\vec{x}_s \tag{4.5}$$

Dans le cas général, pour obtenir enfin les coordonnées de la projection $\vec{x'}_c = (x'_c, y'_c, 0)$ par rapport au repère du plan image il faut appliquer la rotation d'un angle γ, autour de l'axe du système optique

$$\hat{R}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

et donc

$$\vec{x'}_c = \hat{R}(\gamma)\vec{x}_c \tag{4.7}$$

L'opérateur total $\hat{M}$, qui fait passer du repère de l'objet à celui du plan image, est finalement

$$\hat{M} = \hat{R}(\gamma)\hat{P}(z)\left(\hat{R}(\beta)\hat{R}(\alpha) - \vec{r}_0\right) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x'}_c = \hat{M}\vec{x}. \tag{4.8}$$

Linéarisation de $\hat{M}$

Remarquons que $\hat{M}$ n'est pas linéaire à cause de la structure de $\hat{P}$. En fait nous n'utilisons que de petites rotations ou translations autour de la position moyenne. Il est donc possible de linéariser $\hat{P}$ et donc $\hat{M}$, ce qui simplifie considérablement l'inversion de la relation (4.8) et permet de calculer les coordonnées de l'objet à partir des images. Les opérateurs linéaires s'écrivent

$$\hat{M}_0 = \hat{R}(\gamma)\hat{P}_0(z_s)\left(\hat{R}(\beta)\hat{R}(\alpha) - \vec{r}_0\right), \tag{4.9}$$

avec

$$\hat{P}_0(z_s) = \frac{f}{f-D}\left(1 - \frac{1}{f-D}z_s\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Pseudo inversion de $\hat{M}_0$

Pour calculer les variations des dégrés de liberté $\vec{\zeta} = (x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$ de l'objet, il faut donc calculer au premier ordre les variations $\Delta\vec{x}$ de chaque point de l'objet

$$\Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\theta_x z_0 \\ \theta_x y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_y z_0 \\ 0 \\ -\theta_y x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\theta_z y_0 \\ \theta_z x_i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

où (x_0, y_0, z_0) sont les coordonnées de chaque point dans le repère lié à l'objet.

En appliquant la relation (4.9) nous pourrons déterminer les variations de position sur le plan de l'image de chaque point de l'objet

$$\Delta\vec{x}_c^{\prime(0)} = \hat{M}_0\Delta\vec{x}. \tag{4.12}$$

Pour N points, il y a donc $N \times 2$ équations linéaires. Il faut donc au moins 3 points pour déterminer les six degrés de liberté. Dans ce cas, l'inversion de la relation (4.12) permet d'obtenir $\vec{\zeta}$.

Pour bien optimiser l'information que donne l'image, il est possible d'utiliser plus que trois points de l'objet pour obtenir les six degrés de liberté. Dans ce cas nous pouvons résoudre l'équation (4.9) par une pseudo inversion basée sur la minimisation d'un χ^2. Cette méthode permet notamment d'estimer statistiquement les meilleures valeurs des paramètres d'une fonction quelconque, en minimisant la formule du χ^2. Dans notre cas, les paramètres sont les dégrés de liberté $\vec{\zeta}$ et la formule à minimiser est [1]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\Delta \vec{x}_c^{\prime(i)} - \hat{M}_0 \Delta \vec{x}^{(i)}}{\vec{\sigma}^{(i)}} \right|^2 , \tag{4.13}$$

où N est le nombre de points de l'objet considéré et $\vec{\sigma}^{(i)} = (\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)})$ le vecteur d'erreur sur la variation du point image $\Delta \vec{x}_c^{\prime(i)}$.

La condition de minimisation est donc la suivante

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{\zeta}} \right) \chi^2 = \vec{0} , \tag{4.14}$$

faisons les substitutions suivantes afin de simplifier la notation

$$\begin{aligned} &\left(\Delta\ x_c^{\prime(1)}, \Delta\ y_c^{\prime(1)}, ..., \Delta\ x_c^{\prime(N)}, \Delta\ y_c^{\prime(N)} \right) \to \vec{y} \\ &\left(\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, ..., \sigma_x^{(N)}, \sigma_y^{(N)} \right) \to \vec{\sigma} && (4.15) \\ & && (4.16) \end{aligned}$$

on obtient, à partir de la condition de minimisation

$$\sum_{i=1}^{2N} \frac{y_i m_{ik}}{\sigma_i^2} = \sum_{ij=1,1}^{2N,6} \frac{m_{ij} m_{ik}}{\sigma_i^2} \zeta_j, \qquad k = 1, ..., 6 \tag{4.17}$$

qui peut être réarrangée de la façon suivante

$$\sum_{i=1}^{2N} \left(\frac{m_{ki}}{\sigma_i} \right)^* \frac{y_i}{\sigma_i} = \sum_{j=1}^{6} \left[\sum_{i=1}^{2N} \left(\frac{m_{ki}}{\sigma_i} \right)^* \frac{m_{ij}}{\sigma_i} \right] \zeta_j \tag{4.18}$$

[1] L'écriture est impropre. Il faut considérer comme résultat de la "division" des deux vecteurs un vecteur dont les composantes correspondent à la division des composantes homologues des deux vecteurs.

A l'aide des définitions

$$\{\hat{\sigma}\}_{ij} = \delta_{ij}\sigma_i,$$

$$\hat{M}' = \hat{M}_0\hat{\sigma}^{-1}, \tag{4.19}$$

la relation (4.18) peut être écrite comme

$$\hat{M'}^*\hat{\sigma}^{-1}\vec{y} = \hat{M'}^*\hat{M}'\vec{\zeta}, \tag{4.20}$$

où dans ce cas $\hat{M}' \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ et donc inversible.

La solution du système est enfin

$$\vec{\zeta} = \hat{T}\vec{y}, \qquad \hat{T} = \left(\hat{M}'^*\hat{M}'\right)^{-1}\hat{M}'^*\hat{\sigma}^{-1} \tag{4.21}$$

4.1.2 Etalonnage

L'étalonnage du système de positionnement c'est-à-dire la mesure des paramètres géométriques et optiques, peut être fait facilement, en utilisant la même méthode de minimisation du χ^2. La géométrie de l'objet est supposée connue, les paramètres à ajuster sont

$$\vec{p} = (\alpha, \beta, \gamma, \vec{r}_0, D, f). \tag{4.22}$$

Pour construire le χ^2, il faut utiliser à nouveau la formule (4.8) qui relie les coordonnées des points de l'objet $\vec{x}^{(i)}$ à celles sur le plan image et donc

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\vec{x}_c'^{(i)} - \hat{M}(\vec{p})\vec{x}^{(i)}}{\vec{\sigma}^{(i)}}\right|^2, \tag{4.23}$$

où N est le nombre de points considérés et $\vec{\sigma}^{(i)} = (\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)})$ le vecteur d'erreur sur le point image. La valeur minimale de N est la moitie du nombre des paramètres et il faut donc dans notre cas au moins 4 points pour obtenir 8 coordonnées.

Dans la pratique la minimisation de la (4.23) en fonction des paramètres $\vec{p}$, est faite numériquement [16].

4.1.3 Sensibilité

La sensibilité du système de mesure est définie notamment selon la formule suivante

$$\frac{\partial \{\text{Réponse de l'instrument}\}}{\partial \{\text{sollicitation}\}}, \tag{4.24}$$

Plus simplement, en considérant le repère aligné sur l'axe de la lentille et en appliquant la loi de l'optique géométrique pour les lentilles minces, le déplacement Δx de l'image de la marque est

$$\Delta x = \frac{f}{d-f}x, \tag{4.25}$$

où d est la distance de la marque par rapport à la lentille dont la distance focale est f et x le déplacement de la tache par rapport à l'axe optique. En utilisant la relation (4.24), on obtient une estimation de la sensibilité pour les déplacements

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial x} &= \frac{f}{d-f} && (4.26) \\ &\simeq \frac{f}{d} \qquad \text{si} \qquad d >> f, && (4.27) \end{aligned}$$

Ce résultat correspond à notre intuition qui nous dit que plus on est proche de l'objet, plus on est sensible aux déplacements.

Dans le cas de la sensibilité en angle $\Delta\theta$, on a

$$\Delta\theta = \frac{f}{d-f}R\theta, \tag{4.28}$$

où R est la distance de la marque au centre de rotation. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial \theta} &= \frac{f}{d-f}R && (4.29) \\ &\simeq \frac{f}{d}R \qquad \text{si} \qquad d >> f, && (4.30) \end{aligned}$$

La sensibilité en angle, au contraire de celle en déplacement, dépend aussi du bras de levier optique R (plus le point est loin du centre de rotation et plus les déplacements sont amplifiés et donc la sensibilité augmente).

Rappelons que ces résultats sont obtenus dans une configuration géométrique simple, qui revient à considérer la matrice $\hat{M}$ comme diagonale. Dans un cas plus général, la sensibilité en angle et en déplacement va dépendre de la matrice $\hat{M}$.

4.1.4 Dynamique

La dynamique de la mesure de position sur le plan image d'une seule marque est quasiment égale à la taille du CCD dans le cas d'une petit marque de dimension l_{marque}.

Dans le cas de plusieurs marques, la dynamique du système de mesure est donnée essentiellement par la différence entre le champ de la camerá L et la dimension l de l'objet visé.

La dynamique potentielle du système est donc très grande. Remarquons cependant que nous serons d'abord limités par les effets de non linéarité des formules utilisées. En effet il est par exemple possible d'avoir un objet tournant de 360° et restant dans le champ de la caméra, mais dans ce cas il n'est plus possible de linéariser les angles.

4.2 La Caméra CCD comme capteur de position local

Par sa structure en matrice, le capteur CCD [21] est un dispositif idéal pour le développement d'un système d'imagerie numérique. La lecture de la matrice de points par un convertisseur analogique/numérique et le stockage de l'image dans la mémoire d'un ordinateur, au moyen d'une interface appropriée, permet de faire des calculs sur l'image et donc de réaliser la méthode de mesure de position précédemment décrite.

4.2.1 Calcul des coordonnées de l'image de la tache

Pour calculer les coordonnées $\vec{x'}_c$ de l'image de la marque, on a utilisé la formule du "barycentre lumineux" de l'image c'est-à-dire à partir de la puissance P_{ij} de chaque pixel et de ses coordonnées n_{ij}

$$\vec{x'}_c = \frac{\sum_{i,j=0,0}^{N,N} P_{ij}\vec{n}_{ij}}{\sum_{i,j=0,0}^{N,N} P_{ij}}, \qquad \vec{n}_{ij} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \tag{4.31}$$

4.2.2 Limite de la mesure

La résolution maximale sur la position de la tache est donnée par la formule suivante [18]

$$\sigma_x \simeq d\frac{\sigma_{LSB}}{2^b}, \tag{4.32}$$

où d est la dimension du pixel, b le nombre de bits du convertisseur utilisé, N le nombre des pixels que contient l'image et enfin σ_{LSB} l'erreur sur la mesure du photocourant de chaque pixel qui correspond au le LSB effectif.

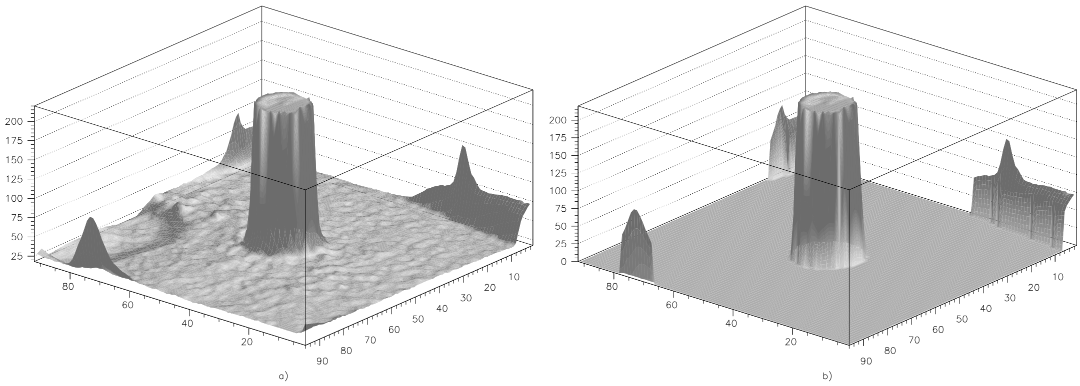

Figure 4.2: Filtrage à seuil sur l'histogramme de l'image de la tache. Malheureusement l'effet de filtrage introduit des non linéarités pour avoir éliminé les pixels du bord de la marque.

Pour essayer d'atteindre cette sensibilité, il faut donc utiliser la dynamique maximale du convertisseur et ne faire intervenir que les pixels qui forment l'image.

Une méthode pour enlever les pixels qui ne contiennent pas l'information sur la marque est d'introduire un seuil sur les valeurs de puissance des pixels (comme montré dans la figure 4.2). La contrepartie de cette méthode est que l'on introduit des phénomènes de non linéarité dus à l'élimination des pixels au bord de la marque. Un solution à ce problème, qui n'a pas été testée, est d'utiliser des filtres qui prennent en compte la géométrie des marques. Si l'on a une marque circulaire par exemple, on ne devrait filtrer que la zone au-dehors d'un cercle centré sur la marque et de rayon un peu plus grand que celui de la marque.

4.2.3 La caméra CCD EEV CAM17-16/X219

La caméra CCD choisie est un système commercial qui intègre un capteur CCD, l'électronique de lecture, un convertisseur analogique/numérique et la transmission de l'image numérisée au moyen d'un bus numérique. Les caractéristiques principales sont les suivantes[17]:

- Capteur carré de 512×512 pixels
- Convertisseur 8 bits.
- Dimension du pixel 15×15 μm^2.
- taille du CCD 7.7×7.7 μm^2.
- Fréquence maximale ν_c de transmission d'un image 56.8 Hz
- Temps d'exposition (intégration) par image variable entre 100 μs et 1s.
- Gain variable (amplification du photocourant).

Selon le théorème de Nyquist et avec une marge de sécurité $k = 2$, la fréquence ν_{max} limite de la bande d'un asservissement automatique réalisé avec la caméra CCD est

$$\nu_{max} = \frac{\nu_c}{2}\frac{1}{k} \sim 14 \text{ Hz}, \tag{4.33}$$

Cette valeur est suffisante pour réaliser le contrôle des systèmes mécaniques tels que les superattenuateurs de VIRGO qui ont des fréquences de résonances inférieures au Hertz.

4.2.4 L'interface VME de la Caméra CCD

Cette interface VME permet de contrôler depuis un processeur la caméra CCD et de mémoriser une image. Elle a été développée au LAPP [18] et présente les caractéristiques suivants:

- Interface aux bus VME et VSB.
- Déclenchement interne ou externe
- Contrôle du temps d'intégration et du gain de l'image
- Sortie vidéo analogique.
- Sortie d'interruption logique sur la fin d'acquisition de l'image.

4.2.5 Le logiciel GalaXie

Le logiciel GalaXie de gestion du système d'acquisition et de traitement d'image a aussi été développé au LAPP [18]. Il présente une architecture dite client serveur, c'est-à-dire que les tâches à effectuer sont partagées entre deux applications qui communiquent entre elles.

Dans notre cas, le serveur GxServer qui "tourne" sur un ordinateur situé dans un châssis VME, est le programme qui gère en temps réel la communication avec l'interface caméra et donc qui exécute toutes les opérations de gestion de la caméra. Pour accomplir ces fonctions, cet ordinateur utilise un système appelé Lynx-OS [23], qui est une version Unix capable de gérer des applications temps réel.

Figure 4.3: Image de l'interface utilisateur GalaXie pour l'alignement. Il est possible de distinguer les marques du banc de détection et les rectangles qui délimitent la zone utilisée pour le calcul des coordonnées des taches.

Le client GXmain est lancé sur un système Unix et est relié via internet à GxServer. GXmain est l'application qui configure le serveur et qui visualise les résultats (l'image, les statistiques sur l'image, les coordonnées de l'objet, etc ...).

La figure 4.3, présente la page graphique utilisée pour configurer le calcul de la position des images des taches sur le CCD. Notons que l'utilisateur doit sélectionner pour chaque tache, la zone rectangulaire d'analyse. La dimension de cette zone détermine la dynamique des degrés de liberté de l'objet visé. Toutes les opérations et les fonctions disponibles sont accessibles grâce à des boutons et des "gadgets" virtuels dessinés selon la philosophie habituelle des interfaces graphiques.

4.3 Le système de positionnement global

4.3.1 Méthode de mesure

La mesure des déplacements et des rotations d'un faisceau laser par rapport à son axe de propagation, peut être effectuée avec des capteurs capables de ne mesurer que des déplacements.

En effet, soit un faisceau laser qui entre dans deux systèmes optiques $ABCD$ et $A'B'C'D'$ (au moyen par exemple d'une lame séparatrice) décalés et tournés respectivement de r_{in} et θ_{in}, nous aurons en sortie

$$\begin{pmatrix} r_{out} \\ \theta_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{in} \\ \theta_{in} \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

$$\begin{pmatrix} r'_{out} \\ \theta'_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{in} \\ \theta_{in} \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

et donc en n'utilisant que la première ligne de chaque système

$$\begin{pmatrix} r_{out} & = & Ar_{in} + B\theta_{in} \\ r'_{out} & = & A'r_{in} + B'\theta_{in} \end{pmatrix}, \qquad \hat{S} = \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

Par conséquent l'inversion du système obtenu donne les relations permettant de calculer les degrés de libertés r_{out} et θ_{out} à partir des déplacements sur les capteurs.

Système optique sensible aux angles

Un système optique décrit par une matrice $\hat{M}$ suivante

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{4.37}$$

a la propriété d'être insensible aux déplacements (voir figure 4.4). En effet cette matrice correspond à un système qui focalise au point focal F de sortie, les rayons parallèles à l'axe optique. Un capteur de translations placé à la sortie de ce système, ne pourra donc mesurer que des rotations. Une façon simple de construire un tel système est par exemple de placer le capteur au point focal d'une simple lentille.

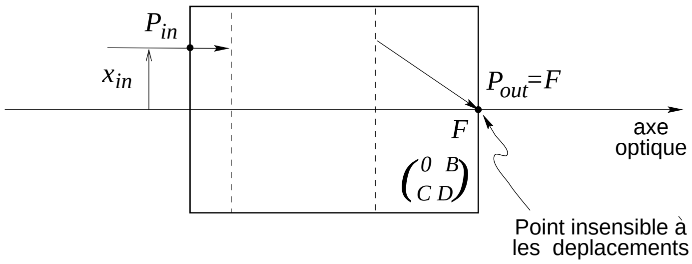

Figure 4.4: Système optique décrit par la matrice $ABCD$, insensible aux déplacements.

Système optique sensible aux déplacements

Un système optique décrit par la matrice $\hat{M}$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

a la propriété d'être insensible aux angles. Dans ce cas, le système optique transporte le point d'entrée P_{in} dans son image P_{out} (voir figure 4.5)et donc si l'axe de rotation passe par P_{in}, l'image P_{out} ne varie pas.

La méthode la plus simple pour réaliser ce système est d'utiliser à nouveau une lentille et de placer le capteur sur le point P_{out} image du point de rotation P_{in}.

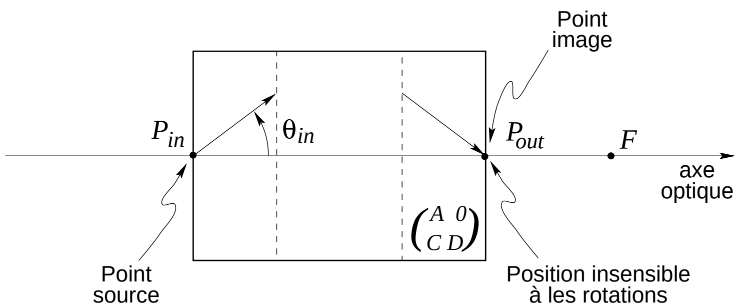

Figure 4.5: Système optique décrit par la matrice $ABCD$, insensible aux rotations.

4.3.2 Configuration pour le banc de détection

La configuration choisie pour le banc de détection est la plus simple possible. Deux photodiodes à quadrants sont placées sur le faisceau secondaire, à différentes distances, le faisceau étant préalablement divisé par une lame séparatrice.

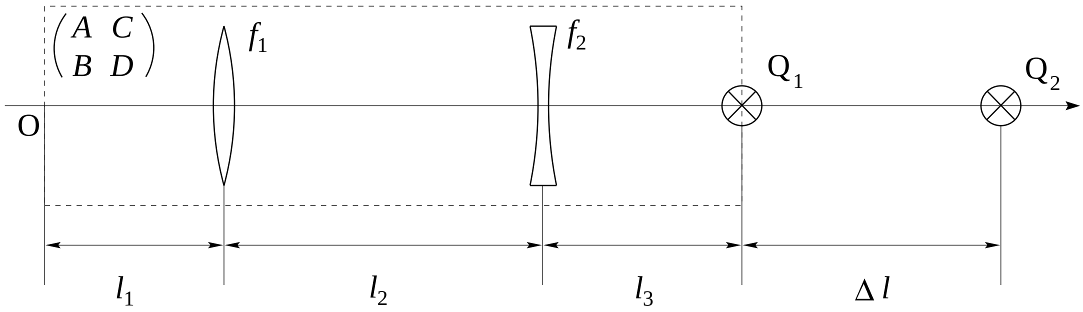

Figure 4.6: Schéma du système de positionnement global. Les miroirs du télescope M_1 et M_2 ont été remplacés par des lentilles équivalentes, pour simplifier le dessin.

La figure 4.6 représente un tel système. La matrice $\hat{S}$ (4.36) qui permet de déterminer les paramètres du faisceau s'écrit en fonction de la distance entre les photodiodes Δl

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} A & B \\ A + C\Delta l & B + D\Delta l \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad det(\hat{S}) = \Delta l. \tag{4.39}$$

Donc l'inversion du système dépend uniquement de la distance entre les deux capteurs.

Après l'analyse de plusieurs configurations de position des capteurs sur le banc de détection, les valeurs suivantes des distances(voir figure 4.6) on été retenues

$$\begin{array}{rcll} l_1 & = & 275 \text{ mm} & \text{(projection sur l'axe optique du centre du banc)} \\ l_2 & = & 700 \text{ mm} & \text{(distance déjà fixée par le télescope)} \\ l_3 & = & 1241 \text{ mm} & \\ \Delta l & = & 1327 \text{ mm} & \end{array} \tag{4.40}$$

L'angle des deux miroirs du télescope fait que les focales dans les plans Oxz et Oyz sont différentes. Il y a donc deux matrices $\hat{S}$, une pour chaque plan (voir la relation (3.6))

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0.2948 & 4921.9 \; mrad^{-1} \\ 0.2903 & 9348.5 \; mrad^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.41}$$

$$\hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0.3052 & 4916.4 \; mrad^{-1} \\ 0.3096 & 9336.5 \; mrad^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

Pour pouvoir utiliser ces matrices et déterminer les déplacements et rotations du banc, il faut mesurer les positions des faisceaux sur les capteurs.

4.4 La photodiode à quadrants

L'intensité d'un faisceau gaussien qui arrive sur une photodiode à quadrants désalignée d'une quantité Δy dans l'axe Oy est (voir figure 4.7)

$$|\Psi_{00}(x,y)| = P_{tot}\frac{2}{\pi}\frac{1}{w_x w_y}e^{-2\frac{x^2}{w_x^2}-2\frac{(y-\Delta y)^2}{w_y^2}}, \tag{4.43}$$

où P_{tot} est la puissance totale du faisceau incident et w_x, w_y sont les tailles du faisceau dans les axes Ox et Oy dans le plan de la photodiode.

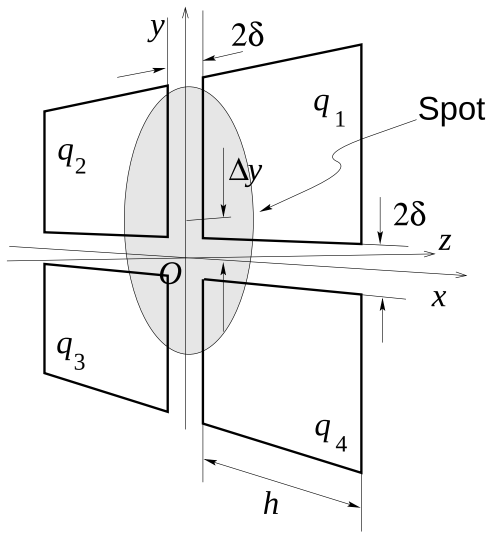

Figure 4.7: Repère de la photodiode à quadrants.

En considérant par simplicité une photodiode carrée, les puissances P_1, P_2, P_3, P_4 qui arrivent respectivement sur les quadrants q_1, q_2, q_3, q_4, sont

$$\begin{aligned} P_1(\Delta y) = \quad P_2(\Delta y) = \quad & \frac{P_{tot}}{4}\beta(w_x)\left[\mathrm{erf}\left(\sqrt{2}\frac{h+\delta-\Delta y}{w_y}\right)-\mathrm{erf}\left(\sqrt{2}\frac{\delta-\Delta y}{w_y}\right)\right] \\ P_3(\Delta y) = \quad P_4(\Delta y) = \quad & \frac{P_{tot}}{4}\beta(w_x)\left[\mathrm{erf}\left(\sqrt{2}\frac{h+\delta+\Delta y}{w_y}\right)-\mathrm{erf}\left(\sqrt{2}\frac{\delta+\Delta y}{w_y}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.44}$$

où

$$\beta(w_x) = \left[\mathrm{erf}\left(\sqrt{2}\frac{h+\delta}{w_x}\right)-\mathrm{erf}\left(\sqrt{2}\frac{\delta}{w_x}\right)\right], \tag{4.45}$$

$$\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\zeta e^{-\zeta^2}, \tag{4.46}$$

h est la longueur du côté de chaque quadrant et 2δ est la séparation entre les quadrants.

Les relations précédentes peuvent être facilement linéarisées en imposant les conditions suivantes:

$$\Delta y << w_{x,y}, \qquad h >> w_{x,y}, \qquad \delta << w_{x,y} \tag{4.47}$$

dans ces conditions

$$\begin{aligned} P_1(\Delta y) = \quad P_2(\Delta y) &\simeq \frac{P_{tot}}{4}\beta(w_x)\left(1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\delta - \Delta y}{w_y}\right) \\ P_3(\Delta y) = \quad P_4(\Delta y) &\simeq \frac{P_{tot}}{4}\beta(w_x)\left(1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\delta + \Delta y}{w_y}\right) \end{aligned} \tag{4.48}$$

où

$$\beta(w_x) \simeq \left(1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\delta}{w_x}\right). \tag{4.49}$$

En faisant la différence entre les puissances des quadrants et en normalisant par la puissance totale de la façon suivante

$$\Sigma_y = \frac{[P_1(\Delta y) + P_2(\Delta y)] - [P_3(\Delta y) + P_4(\Delta y)]}{P_1(\Delta y) + P_2(\Delta y) + P_3(\Delta y) + P_4(\Delta y)}, \tag{4.50}$$

on obtient un signal proportionnel au déplacement du faisceau dans la direction y

$$\Sigma_y \simeq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Delta y}{w_y}. \tag{4.51}$$

4.4.1 Sensibilité

La sensibilité de la photodiode à quadrants est la dérivée de la réponse du système Σ_y par rapport à la sollicitation Δy et donc dans l'approximation linéaire devient

$$\frac{\partial \Sigma_y}{\partial \Delta y} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{w_y}. \tag{4.52}$$

On peut voir que pour augmenter la sensibilité il faut diminuer la taille du faisceau.

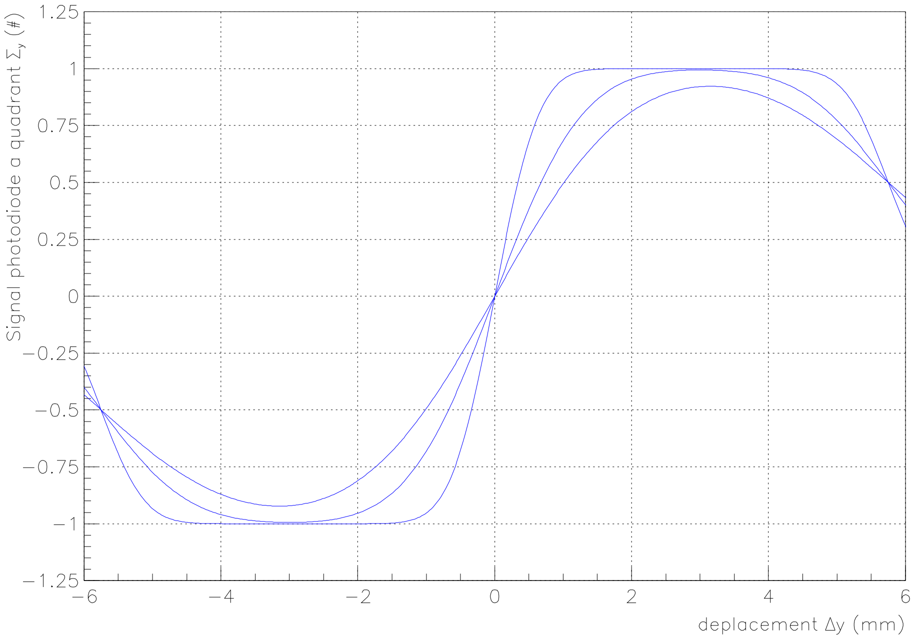

Figure 4.8: Réponse de la photodiode à quadrants pour trois tailles différentes de faisceau: 1 mm (ligne continue), 2 mm (ligne en tirets), 2 mm (ligne pointillée).

La figure 4.8 montre, pour des tailles différentes du faisceau ($w_y = 1, 2, 3$ mm), la réponse d'une photodiode à quadrants en fonction de Δy dans le cas d'une séparation de 125 μm et un diamètre de la surface sensible de 11.5 mm. Les trois réponse différentes sont dues évidemment, à la taille du faisceau par rapport aux dimensions des quadrants de la photodiode.

4.4.2 Limite de mesure

On utilisant la formule de la propagation de l'erreur statistique, le déplacement minimal théorique mesurable avec la photodiode à quadrants est

$$\sigma_y = \sqrt{\pi}\, w_y \frac{\sigma_P}{P}, \tag{4.53}$$

où P est la puissance totale incidente sur la photodiode et σ_P la fluctuation de la puissance mesurée sur chaque quadrant.

Supposons que le bruit de l'électronique soit plus faible que le bruit de photons, alors

$$\sigma_P = \sigma^{(s.n.)}(\nu) = \sqrt{2e\eta P\nu}, \tag{4.54}$$

où e est la charge de l'électron, η la sensibilité de la photodiode (le photocourant divisé par la puissance incidente) et ν la fréquence.

La formule précédente devient

$$\sigma_y = w_y \sqrt{\frac{2\pi e\nu}{\eta P}}. \tag{4.55}$$

La limite sur la mesure de position vient donc de la puissance totale incidente sur la photodiode à quadrants et de la taille du faisceau.

Si l'on considère les valeurs prévues pour le système de positionnement global de VIRGO, on obtient

$$\begin{array}{rcl} w_{x,y} & \simeq & 1 \text{ mm}, \\ \eta & \simeq & 0.42 \text{ A/W}, \\ P & \sim & 0.5 \text{ mW}, \\ \nu & \sim & 100 \text{ Hz} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{x,y} \simeq 0.69 \text{ nm}_{\text{RMS}} \tag{4.56}$$

c'est-à-dire une valeur plus que négligeable par rapport à la résolution requise [37] et surtout beaucoup plus petite que le bruit électronique à basse fréquence que l'on peut espérer.

4.4.3 Dynamique

La dynamique d'un photodiode à quadrants correspond au déplacement maximal Δy^* pour lequel la photodiode fournit un signal univoque.

La figure 4.8 nous montre que:

- la dynamique est de l'ordre de la taille du faisceau incident
$$\Delta y^* \simeq w_y, \tag{4.57}$$
- la dynamique "utile" pour un système de contrôle est plus large que celle où la réponse est linéaire,
- la dynamique augmente si la taille du faisceau augmente. En fait la dynamique est inversement proportionelle à la sensibilité d'un instrument.

4.4.4 Étalonnage

On peut envisager deux méthodes pour l'étalonnage de la photodiode à quadrants:

- étalonnage théorique au moyen de la relation (4.51). Dans ce cas il faut connaître la taille du faisceau selon les deux axes Ox et Oy.
- étalonnage expérimental avec un système qui permet de déplacer les faisceaux d'une quantité connue, dans les deux directions Ox et Oy. On peut donc reconstruire expérimentalement la relation (4.51)

L'avantage de la méthode expérimentale est que les éventuelles couplages des degrés de liberté peuvent être pris en compte facilement.

4.5 La photodiode à quadrants comme capteur pour le système de position globale

Si on veux utiliser les photodiodes à quadrants comme capteur de position, il faudra déterminer la matrice qui permet de calculer, à partir des signaux s_x normalisés par la puissance totale, les degrés de liberté du système.

Définissons les constantes suivantes

$$\alpha_x^{(i)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}w_x^{(i)}, \qquad i = 1, 2 \tag{4.58}$$

où $w_x^{(i)}$, est la taille du faisceau sur la i-ème photodiode à quadrants, et en utilisant la relation (4.51), on a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(1)} s_x^{(1)} \\ \alpha_x^{(2)} s_x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_x^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x^{(1)} \\ s_x^{(2)} \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

où x_1 et x_2 sont les déplacements sur les photodiodes à quadrants et $s_x^{(1)}$, $s_x^{(2)}$ sont les signaux normalisés par la puissance totale incidente. En notation matricielle on a

$$\vec{x}_q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\alpha}_x = \begin{pmatrix} \alpha_x^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_x^{(2)}, \end{pmatrix} \qquad \vec{s}_x = \begin{pmatrix} s_x^{(1)} \\ s_x \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{x}_q = \hat{\alpha}_x \vec{s}_x, \tag{4.61}$$

On utilisant le systéme (4.36), la relation entre les degrés de liberté $\vec{x} = (x, \theta_y)$ et les signaux sur les photodiodes à quadrants $\vec{s}_x = (s_x^{(1)}, s_x^{(2)})$ est donc

$$\vec{x}_q = \hat{\alpha}_x \vec{s}_x = \hat{S}_x \vec{x}. \tag{4.62}$$

La matrice qui relie les signaux des photodiodes à quadrants aux degrés de liberté est donc

$$\hat{T}_x = \hat{S}_x \hat{\alpha}_x^{-1}, \tag{4.63}$$

ce qui donne enfin la relation cherchée

$$\vec{x} = \hat{T}_x^{-1} \vec{s}_x. \tag{4.64}$$

On partant des signaux $\vec{s}_y = (s_y^{(1)}, s_y^{(2)})$ on peut obtenir la matrice $\hat{T}_y^{-1}$ pour les deux autres degrés de liberté $\vec{y} = (y, \theta_x)$.

4.6 La photodiode EG&G YAG-444A-4

La photodiode à quadrants choisie pour le banc de détection est le modèle YAG-444A-4 de la compagnie EG&G, en raison de sa compatibilité au vide, de sa sensibilité à la lumière infrarouge et à la grande taille de sa surface active.

Une série de mesures a été faite pour s'assurer que l'on pouvait utiliser la photodiode comme capteur du système global de positionnement. On a donc vérifié quelques-unes des caractéristiques données par le constructeur:

Nombre d'éléments	4
Diamètre surface active	11.5 mm
Séparation entre les quadrants	0.125 mm
Sensibilité @ 1064 μm	0.5 A/W
Courant d'obscurité	$<$ 75 nA
Linéarité	$<$ 1 % sur 7 décades
Diaphonie ("Cross-Talk")	$<$ 1 % @ 633 nm
Température de fonctionnement	$(-55 \div 125)$ C°

Nous allons maintenant présenter ces mesures.

4.6.1 Mesure de la sensibilité ("Responsivity")

La sensibilité (ou "responsivity") est définie comme

$$\eta = \frac{\text{Photocourant } I}{\text{Puissance incidente } P_{in}} \qquad \left(\frac{\text{A}}{\text{W}}\right). \tag{4.65}$$

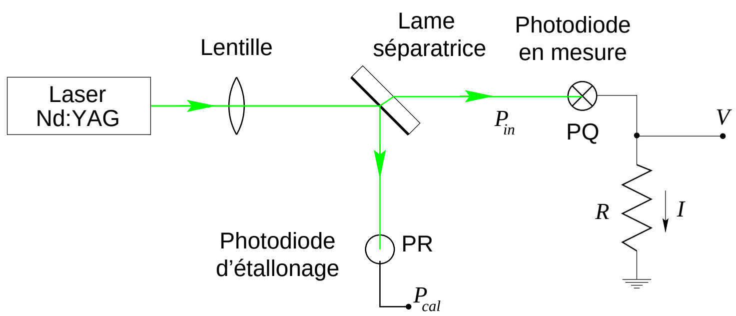

Figure 4.9: Schéma pour la mesure de la sensibilité (responsivity) de la photodiode.

Sa mesure a été faite avec une photodiode étalonnée de référence (voir figure 4.9).

La mesure se déroule en deux phases. La première consiste à étalonner la photodiode de référence PR en fonction de la puissance P_{in}, qui arrive sur un "puissance-mètre" PM mis à la place de la photodiode à quadrants PQ.

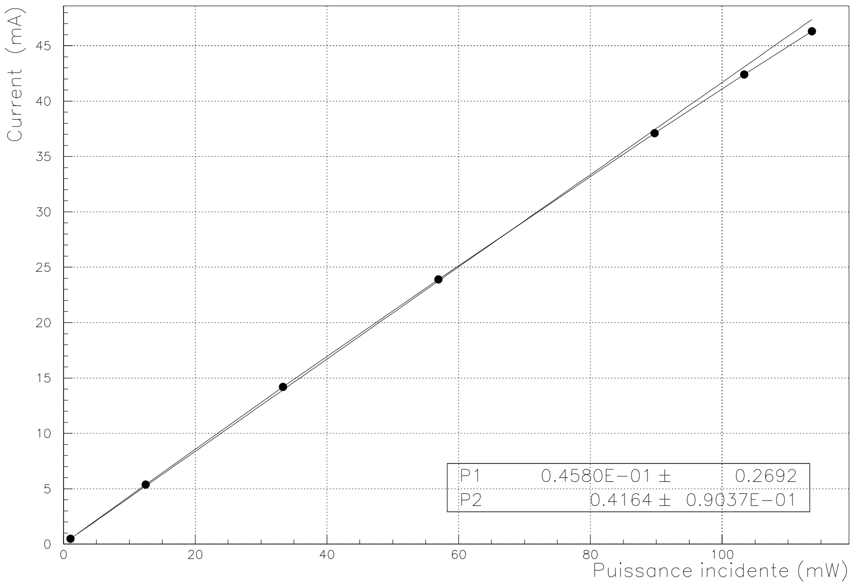

Figure 4.10: Photocourant produit par un des quadrants de la photodiode en fonction de la puissance incidente. La valeur de la sensibilité (responsivity) est le paramètre P2 en unité A/W.

Dans la deuxième phase, on connaît la puissance incidente sur PQ grâce à PR et on mesurera la tension V de PQ, tension qui nous donne la courant qui passe au travers de R.

La figure 4.10 montre le résultat obtenu. La pente de la courbe estimée avec la méthode de minimisation du χ^2 est donc la sensibilité dont la valeur mesurée est

$$\langle \eta \rangle_{exp} = (0.42 \pm 0.09) \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{W}} \right). \tag{4.66}$$

Cette valeur est plus petite mais comparable avec celle déclarée par le constructeur.

Notons que l'on observe une non linéarité de la réponse, pour des valeurs de puissance > 80 mW environ.

4.6.2 Mesure de la linéarité

La linéarité de la réponse de la photodiode à quadrants en fonction de la puissance incidente P_{in}, a été mesurée en détail, pour des valeurs allant de 0 à ~ 0.5 mW, c'est-à-dire dans un intervalle de valeur de puissance que l'on pense avoir dans VIRGO.

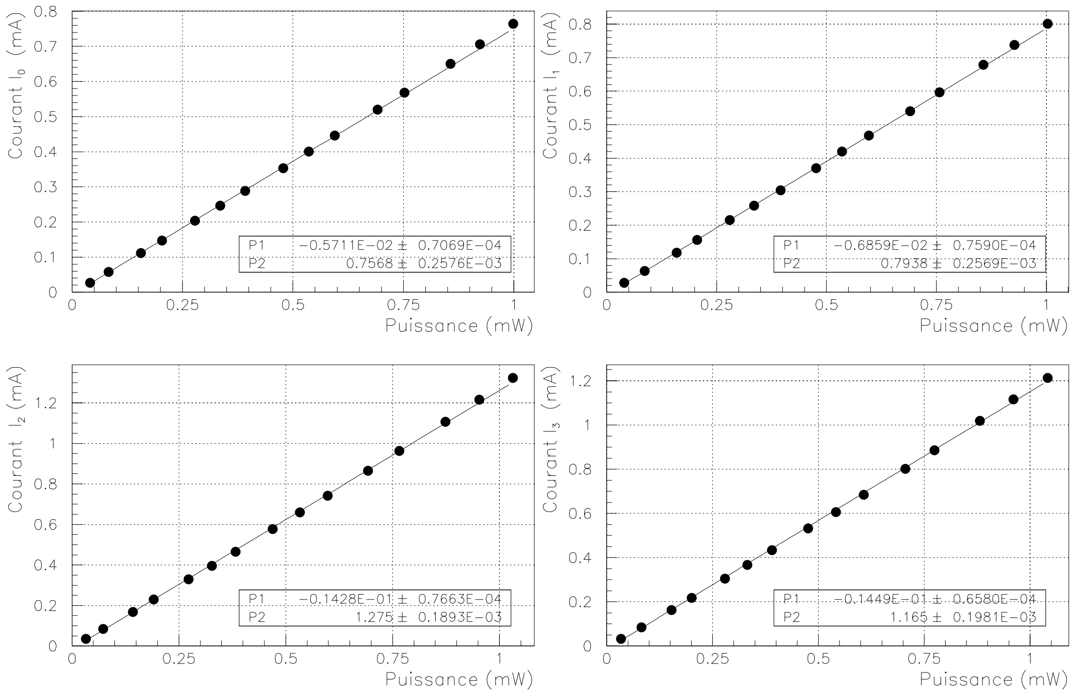

Figure 4.11: Photocourant produit par les quatre quadrants de la photodiode en fonction de la puissance incidente sur le puissancemètre.

La méthode de mesure a été similaire à celle utilisée pour la responsivity, mais sans effectuer l'étalonnage de la photodiode de référence PR. La puissance considérée est donc celle mesurée par le puissancemètre mis à la place de PR.

On a mesuré pour chaque quadrant la chute de tension proportionelle au photocourant de la photodiode, au moyen d'une résistance $R_i \simeq 1\text{k}\Omega$ connectée entre la masse et les cathodes.

La figure 4.11 qui montre les résultats obtenus pour les quatre quadrants, révèle une bonne linéarité sur tous les quadrants. La différence des pentes est explicable par des valeurs des résistances R_i légèrement différentes et par la fenêtre en plexiglas placée entre la photodiode et le laser, dont la "transmittivité" varie en fonction de sa position.

4.6.3 Mesure de diaphonie ("Cross-Talk")

La présence d'un signal dans un circuit électronique et donc dans une photodiode à quadrants, est susceptible de produire pour différentes raisons (électromagnétique par exemple) de la diaphonie, c'est-à-dire des signaux induits dans les autres circuits plus ou moins proches. On pourra donc exprimer la diaphonie comme le rapport entre le signal parasite et le signal appliqué.

Pour quantifier cet effet, dans le cas de la photodiode à quadrants, on éclaire

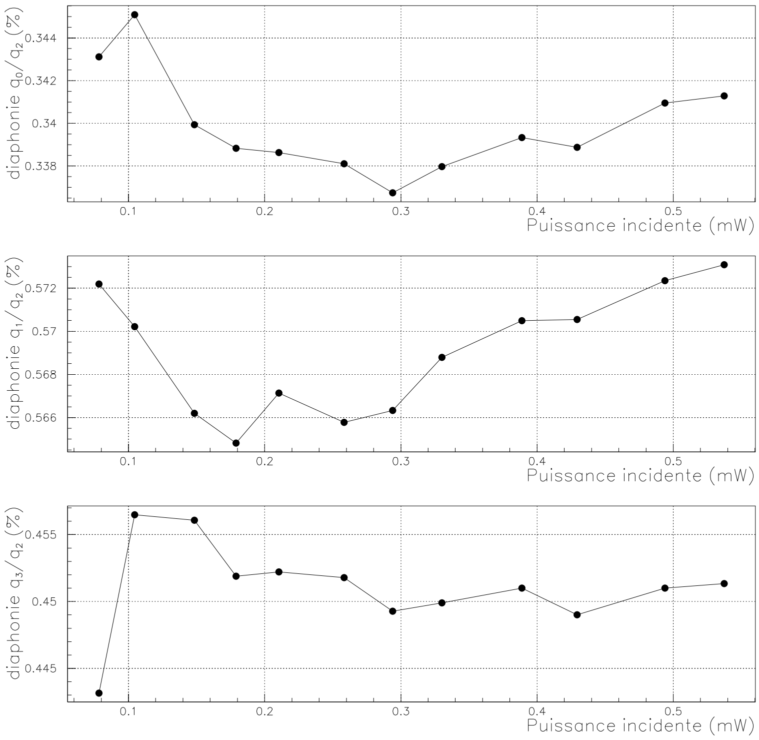

Figure 4.12: Diaphonie de la photodiode à quadrants en fonction de la puissance incidente.

un quadrant et on mesure la courant sur tous les autres.

La figure 4.12 montre la diaphonie en fonction de la puissance des trois quadrants lorsque le quatrième est éclairé par un faisceau laser. Le niveau mesuré est donc inférieur à celui donné par le constructeur à la fréquence de 633 nm.

4.6.4 Mesure de compatibilité au vide

Deux tests de compatibilité au vide ont été faits. Le premier, pour vérifier l'absence des problèmes d'échauffement, a été conduit avec la photodiode dans une enceinte à vide, à une pression de $p = (67 \pm 7)$ mbar (valeur suffisante pour ne pas avoir la propagation de la chaleur par conduction et/ou convection avec l'air). On a envoyé un faisceau laser Nd:YAG de puissance $\langle P_{in} \rangle \simeq 3.4$ mW sur un des quadrants et on a mesuré la température de la photodiode en fonction du temps.

La figure 4.13 montre la variation de la température de la photodiode pendant 18 heures. La première partie de la courbe montre un probable échauffement dû à la puissance du laser, pendant que le reste de la courbe suit essentiellement la température de la pièce. La figure 4.14 montre que la puissance du laser est restée stable et donc ne peut pas être à l'origine de la variation de température de la photodiode à quadrants.

Le deuxième test a été fait pour vérifier la compatibilité à un vide de 10^{-6} mbar, de tous les matériaux nécessaires au câblage de la photodiode, c'est-à-dire un petit circuit imprimé avec un condensateur en technologie "SMD", soudé en utilisant une alliage étain-plomb à faible ténor de flux.

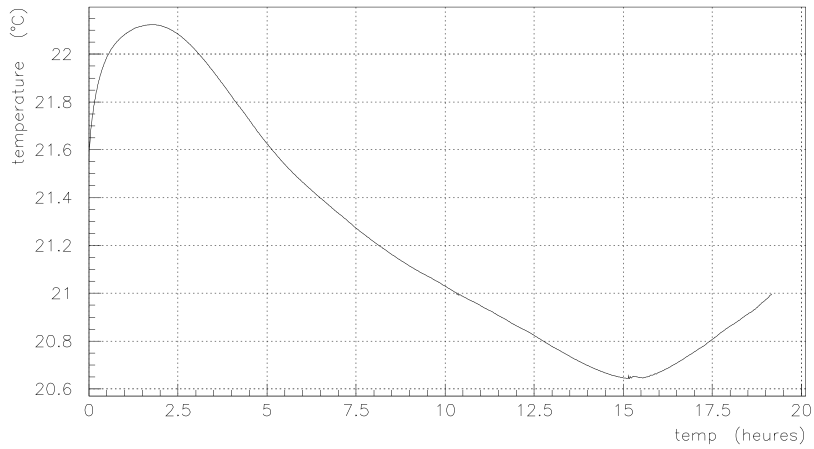

Figure 4.13: Variation de la température de la photodiode à quadrants en fonction du temps.

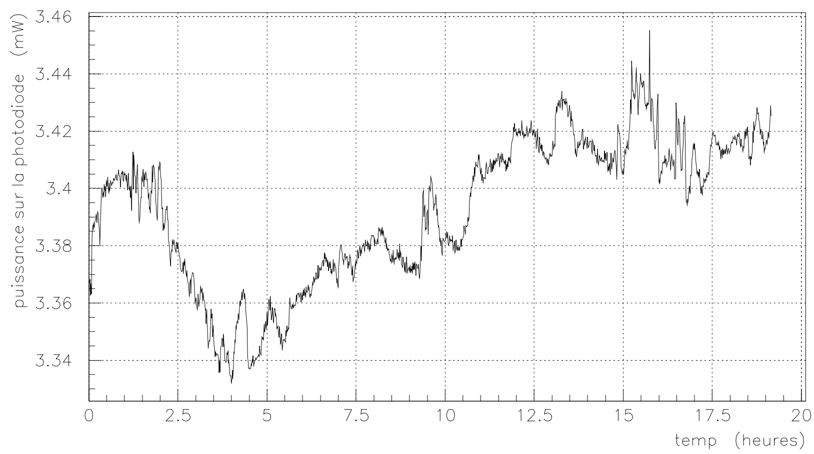

Figure 4.14: Variation de puissance totale mesurée par la photodiode à quadrants en fonction du temps.

Le test dans une enceinte à vide (sans étuvage) a été arrêté après avoir constaté un résultat plus que satisfaisant avec une pression totale de $P \simeq 5 \cdot 10^{-7}$ mbar. La figure 4.15 du spectre du gaz résiduel observé dans la bouteille de mesure, révèle qu'il n'y a pas de pollution du vide due aux matériaux testés. En effet les pics

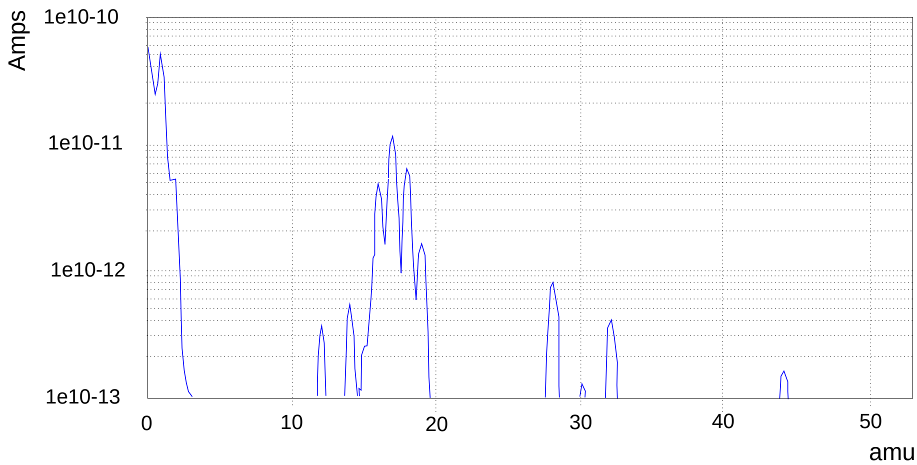

Figure 4.15: Spectre des composantes du gaz résiduel, pour le test de compatibilité au vide de la photodiode à quadrants, avec son électronique.

autour de 18 unité de masse sont dus à la vapeur d'eau, et peuvent être enlevé avec un étuvage. Les pics à plus basse masse sont de l'hydrogène, qui peut être enlevés seulement au moyen d'une pompe à sublimation [36]. Les autres pics, très faibles, sont: 28 l'azote, 32 oxygène et 44 le dioxyde de carbone.

4.6.5 L'électronique de lecture

L'électronique nécessaire pour la lecture des photodiodes à quadrants est montrée dans la figure 4.16 (pour une meilleure description des circuits électroniques, voir l'annexe D).

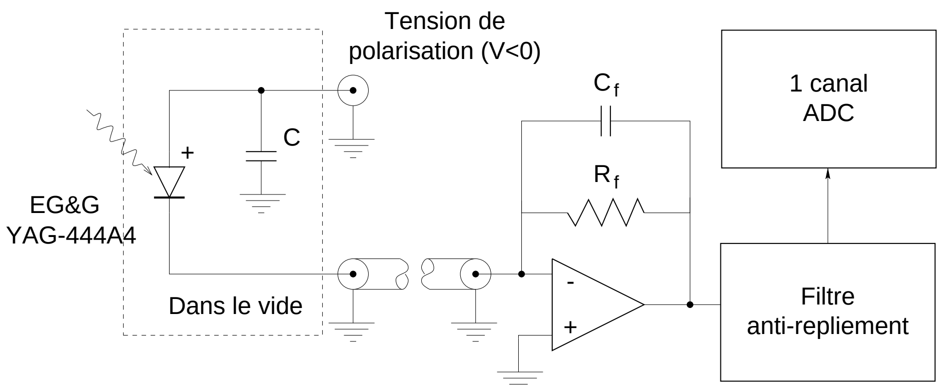

Figure 4.16: Circuit pour la lecture et l'échantillonnage d'un quadrant de la photodiode. La partie située dans le rectangle en tirets doit fonctionner sous vide.

La photodiode devra travailler en polarisation inverse et il faudra donc une tension négative constante V_{bias} sur l'anode. Le condensateur C est nécessaire

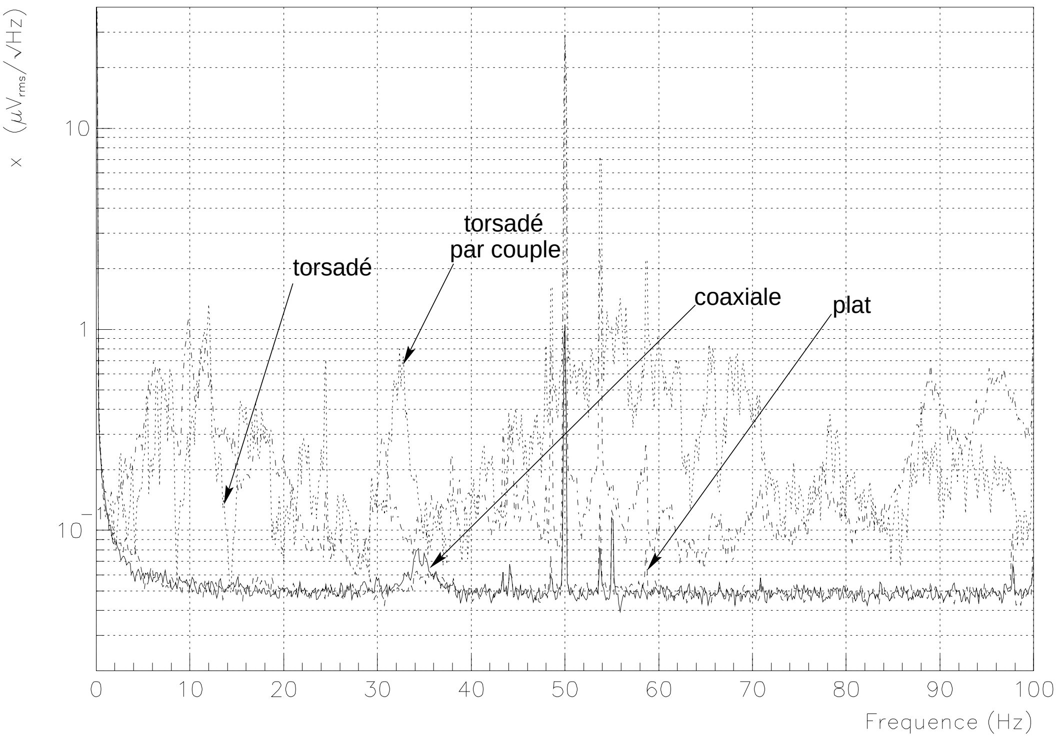

Figure 4.17: Densité spectrale du bruit de la sortie d'un des canaux de l'électronique de lecture des photodiodes à quadrants pour les différentes types de câblage. Les densités spectrales pour le câble coaxial et plat sont presque superposées. .

pour le filtrage de la tension de polarisation, alors que celui de contre-réaction sur l'amplificateur opérationnel C_f, sert à limiter la bande d'amplification.

Le filtre antirepliement devra atténuer le signal au-dessus de la fréquence d'échantillonage, d'un facteur 2^b fois la dynamique du convertisseur analogique numérique (ADC), où b est le nombre de bits du convertisseur.

La partie, située dans le rectangle en tirets, qui contient la photodiode et le condensateur C, doit fonctionner sous vide.

4.6.6 Bruit de l'électronique

Pendant la phase de test de l'électronique du banc de détection, on a constaté des problèmes (pick-up) de bruit électromagnétique sur les signaux des photodiodes à quadrants que l'on a pu atténuer grâce à un meilleur câblage.

La figure 4.17 montre les différents niveaux de bruit sur une des quatre sorties des cartes des photodiodes à quadrants selon le type de câblage adopté. Les mesures ont été faites avec les photodiodes masquées. On peut donc voir que dans la plage de fréquence de 0 Hz à 100 Hz, qui est la plage utile pour asservissement de la position du banc, les câblages effectués avec des câbles coaxiaux ou avec des câbles plat sont pratiquement équivalents. L'allure décroissante à basse fréquence est due au bruit $1/\nu$ omniprésent.

Chapitre 5

L'alignement manuel du banc de détection

Introduction

L'installation et les réglages du banc de détection de VIRGO nécessitent différentes étapes et mettent en oeuvre plusieurs dispositifs qui seront décrits dans ce chapitre.

Dans la première partie le système de test qui produit deux faisceaux ayant les mêmes caractéristiques géométriques que ceux de l'interféromètre central de VIRGO sera présenté. Il permet de réaliser l'alignement des éléments optiques du banc.

Puis les procédures d'alignement en salle blanche et "in situ" seront décrites. Cet alignement utilise des moteurs piézo-électriques, dont nous décrirons le fonctionnement ainsi que les tests effectués et les solutions appliquées pour augmenter leur fiabilité dans une enceinte à vide.

5.1 La génération des faisceaux de VIRGO

Pour l'alignement manuel du banc de détection en salle blanche et pour tous les tests à mener sur le banc, il faut disposer de deux faisceaux ayant la même géométrie que ceux qui sortent de VIRGO.

La façon la plus simple de fabriquer ces deux faisceaux est d'utiliser une lame séparatrice ayant le même angle entre ses deux faces que la séparatrice de VIRGO (voir figure 3.1). Mais son épaisseur doit être inférieure afin de pouvoir la placer près du banc de détection. La lame aura une surface sans traitement et l'autre totalement réfléchissante pour maximiser la lumière envoyée au banc de détection (c'est donc une fausse lame séparatrice).

Afin de pouvoir utiliser facilement ce système à deux endroits différents, en salle blanche et à l'entrée de la tour du banc de détection, la lame séparatrice n'est pas éclairée directement par un laser, mais via une fibre optique monomode, conservant la polarisation et d'une longueur de 15 m.

La figure 5.1 montre le schéma réalisé afin d'optimiser la puissance transmise par le laser à la sortie de la fibre. Voyons donc la fonction de chaque composant. La première lame quart d'onde rend linéaire la polarisation elliptique du faisceau sortant du laser. La deuxième lame demi-onde fait tourner la polarisation du faisceau afin de l'adapter à l'entrée de l'isolateur de Faraday. Ce dispositif empêche que la lumière, réfléchie par la surface d'entrée de la fibre optique, retourne dans le laser, ce qui perturberait le système automatique de stabilisation en puissance du laser. La dernière lame demi-onde tourne la polarisation linéaire du faisceau afin de l'adapter à la fibre optique. Enfin, le système de focalisation fait d'une lentille et d'un objectif de microscope, réduit la taille du faisceau à celle du mode LP_{00} de la fibre.

L'objectif de microscope et la lentille placés en sortie de la fibre focalisent le faisceau qui est envoyé sur la fausse lame séparatrice.

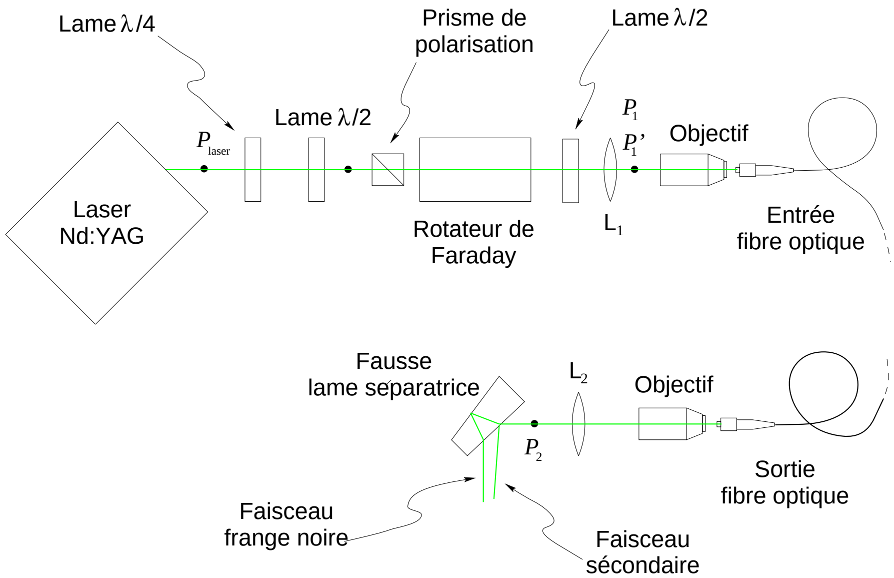

Figure 5.1: Schéma du système de génération des faisceaux de test.

5.1.1 Transmission optique du système

Les facteurs de transmission optique T_i, des différents composants du système d'injection des faisceaux laser (voir figure 5.1) ont été calculés en mesurant au moyen d'un "puissancemètre " les puissances incidente et transmise.

Les mesures de la puissance transmise par l'ensemble des composants sans la lame quart d'onde et de la puissance incidente ont donné

$$\begin{array}{lcl} P_1 & = & (234 \pm 2)\ \mathrm{mW} \\ P_{laser} & = & (294 \pm 3)\ \mathrm{mW} \end{array} \quad \Rightarrow \quad T_1 = (80 \pm 4)\ \%. \tag{5.1}$$

Après avoir ajouté la lame $\lambda/4$, on a obtenu

$$\begin{array}{lcl} P_1' & = & (265 \pm 3)\ \mathrm{mW} \\ P_{laser} & = & (294 \pm 3)\ \mathrm{mW} \end{array} \quad \Rightarrow \quad T_1' = (90 \pm 4)\ \%, \tag{5.2}$$

ce qui représente une augmentation de 10 %. Le faible accroissement est explicable par l'utilisation de la seule lame quart d'onde disponible, étalonnée pour une longueur d'onde de 840 nm et par les pertes du rotateur de Faraday.

Les mesures de puissance pour le calcul de la transmittivité de l'ensemble de la fibre optique et des deux systèmes de focalisation, ont donné

$$\begin{array}{lcl} P_2 & = & (110 \pm 1)\ \mathrm{mW} \\ P_{laser} & = & (294 \pm 3)\ \mathrm{mW} \end{array} \quad \Rightarrow \quad T_1 = (37 \pm 2)\ \%. \tag{5.3}$$

Si l'on considère que chaque lentille transmet environ 98% de la lumière (chaque objectif est constitué au moins de deux lentilles) et que la surface d'entrée et de sortie de la fibre réfléchit 4%, le pourcentage de lumière guidée par la fibre peut être grossièrement estimé à 50%.

5.1.2 Les fluctuations en puissance

La puissance mesurée en sortie de la fibre monomode (voir figure 5.2) a montré de curieuses variations, qui peuvent être expliquées si l'on considère la fibre optique comme étant une cavité résonnante, qui change d'indice de réfraction en fonction de la température, et dont les surfaces d'entrée et de sortie de la fibre sont les deux miroirs.

L'interface entre l'air et la fibre présente une réflectivité qui dépend de l'indice de réfraction n du "coeur" de la fibre et qui est, dans le cas d'un angle d'incidence perpendiculaire [6],

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2. \tag{5.4}$$

Les formules qui donnent la puissance transmise par la cavité dans les conditions de résonance et d'antirésonance sont [20]

$$\begin{array}{lcl} P_{res} & = & P_{in}\dfrac{T^2}{(1-R)^2}, \\ P_{anti-res} & = & P_{in}\dfrac{T^2}{(1+R)^2}, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{res}}{P_{off}} = \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2}. \tag{5.5}$$

Si l'on considère le cas d'un indice de réfraction typique de $n \simeq 1.5$, on obtient

$$R = 4\% \qquad \Rightarrow \qquad \left\langle \frac{P_{res}}{P_{off}} \right\rangle_{teor} = 1.1736, \tag{5.6}$$

et en considérant les valeurs mesurées des puissances maximale P_{res} et minimale P_{off}, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \langle P_{res} \rangle_{exp} & = & (136 \pm 1)\ \mu\mathrm{W} \\ \langle P_{off} \rangle_{exp} & = & (116 \pm 1)\ \mu\mathrm{W} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \left\langle \frac{P_{res}}{P_{off}} \right\rangle_{exp} = 1.17 \pm 0.02, \tag{5.7}$$

valeur qui est en très bon accord avec la valeur théorique.

Il faut noter que le rapport (5.5) ne prend pas en compte les pertes par propagation dans la fibre, qui sont typiquement de -3 dB/km, soit environ 0.5% pour 15 m.

Le changement des conditions de résonance peut être facilement expliqué par une variation de l'indice de réfraction dû à un changement de température. En effet, la variation de phase induite par une variation de l'indice de réfraction sur une longueur L pour une longueur d'onde λ, est

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} L \Delta n. \tag{5.8}$$

Pour que $\Delta\phi$ soit suffisamment grand pour passer d'une résonance à l'autre il faut, en considérant la condition de résonance pour la puissance transmise par la cavité [20], que

$$2\Delta\phi > 2\pi, \qquad \Rightarrow \qquad \Delta n > \frac{\lambda}{2L}. \tag{5.9}$$

La variation de d'indice de réfraction en fonction de la variation de température ΔT est

$$\Delta n = \alpha \Delta T \qquad \Rightarrow \qquad \Delta T = \frac{\lambda}{2\alpha L} \tag{5.10}$$

et en considérant que $\alpha \simeq 10^{-5}$ /°C, la variation de température nécessaire pour passer d'une résonance à l'autre est

$$\Delta T = 3.5 \cdot 10^{-3}\ {}^{\circ}\mathrm{C}. \tag{5.11}$$

Ce qui montre qu'une très faible variation de température peut être responsable de la variation de puissance mesurée (de l'ordre de 15%).

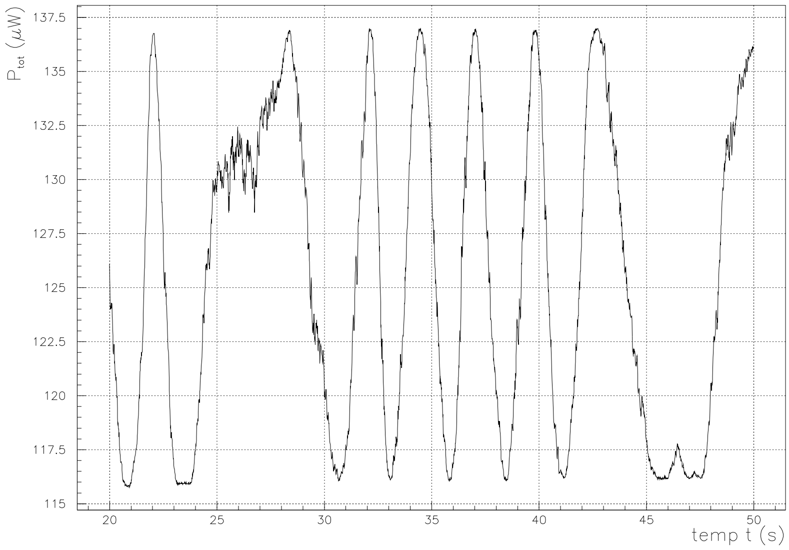

Figure 5.2: Fluctuation de puissance de la sortie de la fibre. Les oscillations sont dues probablement à la variation de l'indice de réfraction provoqué par des variations de la température.

5.1.3 Focalisation du faisceau

Les mesures de propagation du faisceau sortant de la fibre ont montré sans surprise que, bien que le profil transverse du faisceau soit approximativement gaussien, la divergence du faisceau est différente de celle d'un faisceau sortant d'une cavité résonnante.

Si l'on décrit le profil du faisceau $w(z)$ avec le paramètre standard M^2, c'est-à-dire

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{w_0}\theta_\infty M^2\right)^2}, \qquad \theta_\infty = \frac{\lambda}{\pi w_0}, \tag{5.12}$$

où w_0 λ, θ_∞ sont respectivement le waist, la longueur d'onde et la divergence angulaire du faisceau, la divergence effective s'écrit

$$\theta_{eff} = M^2\theta_\infty = M^2\frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{5.13}$$

Les mesures effectuées, reportées sur la figure 5.2, ont permis d'obtenir les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \langle w_0\rangle_{exp} &\simeq 2.51 \text{ mm}, \\ \langle M^2\rangle_{exp} &\simeq 3.29. \end{aligned} \tag{5.14}$$

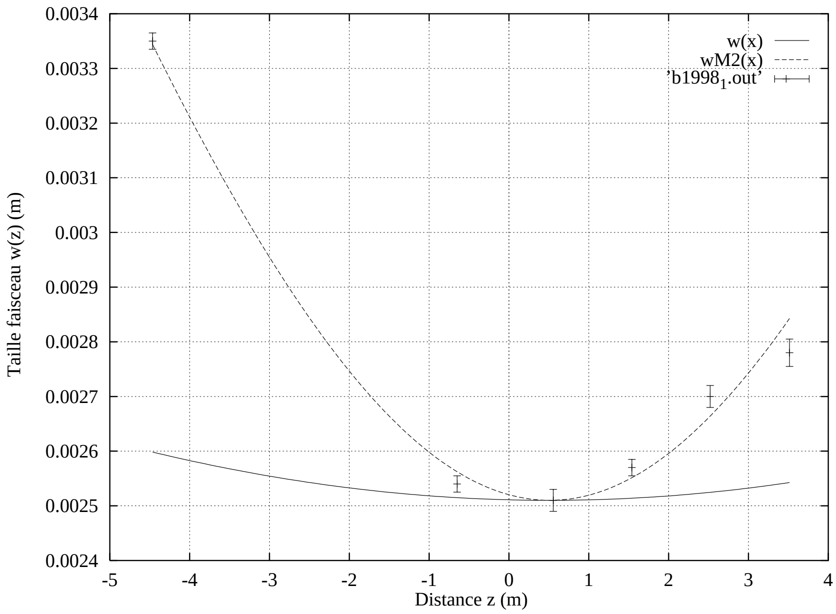

Figure 5.3: Profil du faisceau sortant de la fibre (ligne en tirets) adapté aux points expérimentaux et profil d'un faisceau gaussien de même waist (ligne continue). L'origine de l'axe optique de propagation, est placé à environ 4.5 m après la sortie de la fibre.

Si l'on veut utiliser ce système pour le test du banc de détection, il faut donc adapter le mieux possible les faisceaux aux tailles théoriques sur les photodiodes à quadrants, sans essayer de reproduire à la sortie de la fibre la taille du faisceau de VIRGO de 3.25 mm.

Ceci permet de tester le système d'asservissement global du banc dans des conditions proches de la réalité, mais ne permet pas de faire des estimations sur le couplage de la cavité mode cleaner.

5.1.4 Séparation des faisceaux

La séparation des faisceaux au niveau du prisme du banc de détection a été mesurée simplement avec une règle et a donné

$$\langle \Delta r \rangle = (11 \pm 1) \text{ mm}, \tag{5.15}$$

en très bon accord avec la valeur attendue de 10.7 mm.

5.2 Les opérations sur le banc en salle blanche

L'assemblage du banc de détection, réalisé avec des optiques de test, a été entièrement mené en salle blanche pour préserver la qualité des surfaces optiques.

Ceci a aussi permis de se familiariser avec les procédures de travail dans des conditions de classe [1] 10 à 100 et d'évaluer les types d'opérations compatibles avec ce niveau de propreté.

La classe obtenue dans la salle blanche pendant les opérations d'assemblage faite avec deux opérateurs et mesurée notamment sur le flux d'air laminaire, a été de 100 environ.

Pour l'assemblage final, il faut envisager de placer des échantillons sur le banc de détection avec des orientations différentes afin de pouvoir évaluer la propriété des surfaces optiques pendant l'ensemble des opérations. Par exemple, on pourra vérifier l'effet des opérations d'emballage du banc et du transport dans la tour, sur la propreté des optiques.

Alignement en salle blanche

Pour réaliser un premier alignement grossier du banc de détection, on a monté la sortie du système de génération des faisceaux directement sur le banc de détection.

Cette opération, qui a été faite à l'aide de deux diaphragmes étalons placés à différentes distances sur le chemin optique des faisceaux, a permis d'obtenir une précision sur l'alignement de tous les éléments optiques de l'ordre du millimètre.

Le câblage, le test des connections électroniques et des moteurs piézo-électriques des supports des miroirs, ont été réalisés également en salle blanche.

5.3 L'alignement du banc "in situ"

Le montage des trois fils de suspension entre le banc de détection et la marionetta a été fait en salle blanche, en utilisant quatre "entretoises" rigides vissées sur le banc et sur la marionetta (voir photo 2.9). Tout l'ensemble a ensuite été transporté dans la tour et accroché à la chaîne de suspension dejà mise en place.

Un premier alignement grossier du banc de détection par rapport à l'axe vertical de la tour et à une hauteur nominale a été fait, en utilisant les mouvements de translation et de rotation de la table à sphère. Les repères utilisés pour cette opération ont été les quatre tiges filetées verticales, (utilisées pour appuyer le banc de détection pendant le manoeuvres de montage) et les axes des bobines placées sur les quatre jambes fixées à la base de la tour.

La précision obtenue lors de cette procédure a été de l'ordre de 5 mm pour la translation et de 0.5° pour les angles.

Puis le banc a été reposé sur les jambes et l'alignement grossier du faisceau d'entrée a été refait. Ensuite au moyen des moteurs piézo-électriques des supports des miroirs du télescope M_1 et M_2, (les seuls qui permettent de déplacer ensemble

[1] La classe est une mesure de propreté qui correspond aux logarithmes en base 10 de la limite supérieure du nombre des particules de 0.5 μm qui sont présentes dans un volume d'un pied cube.

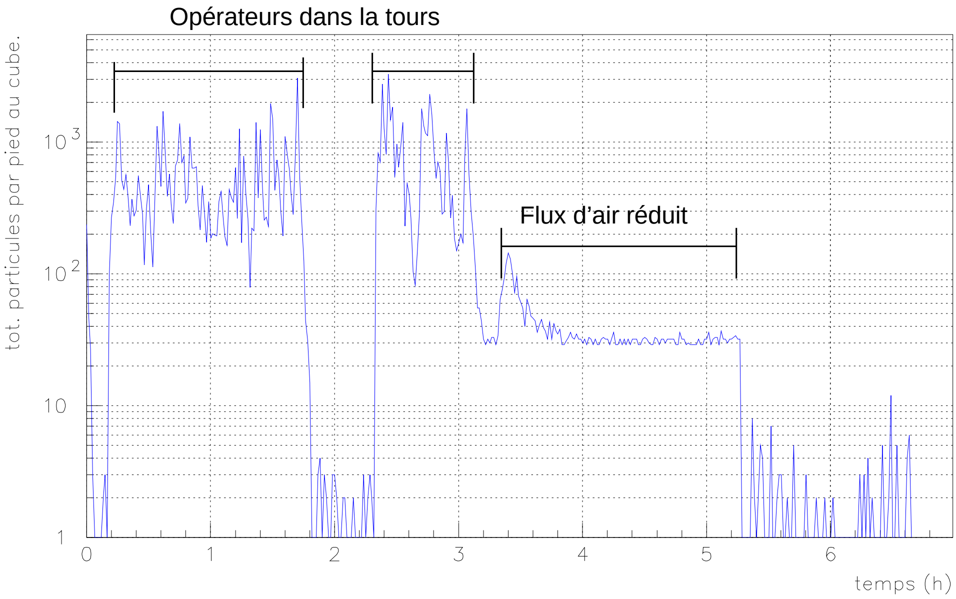

Figure 5.4: Allure de la classe de propreté, en fonction du temps, mesurée sur le sol de la tour. On peut constater la saleté engendrée par deux personnes travaillant dans la tour dans les 2 premières heures et la dernière moité de la troisième heure. Le plateau de 3 à 5 heures est dû à une forte réduction du flux d'air propre dans la tour. La sonde placée sur le banc de détection a montré une amélioration de la classe (d'un facteur d'environ 10 avec les opérateurs).

les deux faisceaux d'entrée) on a aligné le faisceau secondaire sur le photodiode à quadrants. Cette opération a montré que l'on a conservé une centrage suffisant du faisceau de la frange noire du mode cleaner.

Les dernières opérations d'alignement ont été menées après la suspension du banc de détection et le déclenchement du système de positionnement local. On a donc centré finement le faisceau secondaire sur le quadrant, au moyen des moteurs piézo-électriques des supports des miroirs du télescope, ce qui a permis automatiquement d'aligner le mode cleaner. Un alignement plus fin du mode cleaner a été fait grâce aux moteurs piézo-électriques des supports des deux miroirs, qui envoient la lumière dans la cavité résonnante.

La figure 5.4 montre l'évolution de la classe dans la tour de détection pendant des situations différentes. L'effet des deux opérateurs au travail, sans aucune précaution particulière sur les mouvements effectués, est visible dans les deux premières heures et dans la derniere moitié de la troisième heure. Le plateau après 4 heures est dû à une forte réduction du flux d'air propre dans la tour.

Les opérations dans la tour ont été généralement effectuées par deux personnes, assistées d'une troisième hors de la tour. Au total on a passé environ 200 heures dans la tour réparties sur 10 jours. La figure montre l'évolution de la classe à l'intérieur de la tour. La sonde a été mise à l'endroit le plus défavorable, c'est-à-dire sur le plancher de la tour.

5.4 Les moteurs piézo-électriques

Le principe de fonctionnement des moteurs piézo-électriques utilisés est fondé sur la différence de friction statique et dynamique des matériaux. Si l'on mesure la force due à la friction entre deux matériaux en contact en fonction de la vitesse relative des surfaces, on s'apercevoit que la force de friction augmente exponentiellement lorsque la vitesse diminue. Ce phénomène peut être utilisé pour construire un moteur à impulsion constitué par exemple de deux mâchoires filetées tenant une vis. Si l'on déplace les mâchoires dans des directions opposées suivant un axe orthogonal à celui de la vis (voir figure 5.5), avec des vitesses différentes (donc des forces de friction différentes) et de signe opposé, appliquées alternativement, on peut ainsi faire avancer ou reculer la vis.

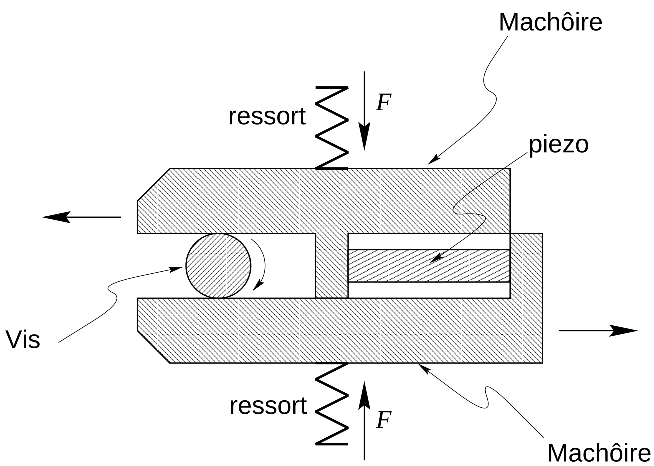

Figure 5.5: Schéma de fonctionnement des moteurs piézo-électriques.

Le mouvement des mâchoires peut être produit par une céramique piézo-électrique, qui a la propriété de changer de dimension quand elle est soumise à un champ électrique (phénomène piézo-électrique) [31]. Une tension faite d'impulsions asymétriques génère donc la rotation de la vis.

Avec trois vis agissant sur le support d'un miroir, on peut contrôler les degrés de liberté (deux angles et une translation) nécessaires aux réglages des systèmes optiques.

Les principaux avantages d'un tel dispositif sont les suivants:

- haute résolution, théoriquement de l'ordre de 10^{-12} m,
- dynamique limitée seulement par la longueur de la vis,
- absence de bruit sur la position lorsque le moteur est à l'arrêt,

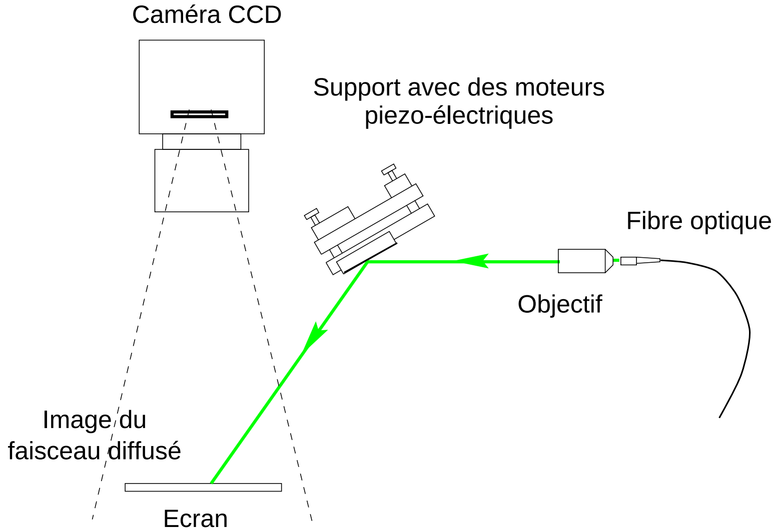

Figure 5.6: Schéma de test des moteurs piézo-électriques.

- facilité de rendre le dispositif compatible au vide.

Une des difficultés rencontrées lors de l'utilisation de ce type de moteur est la réponse inconstante à la sollicitation (faible précision), qui empêche d'étalonner les déplacements en fonction des impulsions envoyées au piézo. Cependant ceci n'est pas critique car les réglages ne se font pas en "aveugle", mais en ajustant la position du faisceau réfléchi.

5.4.1 Test des moteurs piézo-électriques

Les supports reçus ont montré une mauvaise compatibilité au vide (à 10^{-6} $mbar$ et à température ambiante) en raison du dégazage de la graisse utilisée pour lubrifier les vis des moteurs piézo-électriques. Pour assurer une bonne compatibilité au vide, chaque support a été donc démonté, nettoyé et lubrifié avec une graisse particulière, le Krytox , suivant une procédure mise au point par l'E.S.R.F. de Grenoble. Ceci assure une compatibilité au vide jusqu'à 10^{-8} $mbar$ à 50°. Les tests ont été réalisés pour vérifier la fiabilité des supports après les manipulations de démontage, nettoyage et remontage. On a constaté que cette manipulation avait changé les performances des moteurs comme par exemple la vitesse de rotation des vis.

Les tests qui ont été menés dans la salle blanche d'assemblage du banc de détection, selon le schéma reporté sur la figure 5.6, ont consisté à contrôler les déplacements de l'image d'un faisceau laser sur un écran, produits par un miroir et déplacé par le moteur testé.

5.4.2 Le logiciel du test des moteurs SiestaRT

Pour la commande automatique des supports motorisés, on a utilisé un logiciel écrit en C appelé SiestaRT, développé au LAPP pour faire de l'acquisition de données à basse fréquence (autour de 1 kHz). Ce logiciel "tourne" sur un CPU interfacé au bus VME, équipé du système d'exploitation Lynx-OS, et qui peut gérer plusieurs cartes ADC et DAC (qui seront en partie utilisées dans VIRGO) ainsi que la lecture des données calculées par le serveur de la caméra CCD (voir section 4.2.5).

SiestaRT, qui a été conçu essentiellement pour faire de l'acquisition de données, peut également exécuter des contrôles automatiques avec un bande d'asservissement d'environ 2 kHz. La configuration des commandes et des paramètres d'asservissement et d'acquisition est faite à travers un fichier texte appelé "card file" qui est lu et interprété par le programme, avant de démarrer les opérations requises.

5.4.3 Mesures et résultats des tests

Cette section résume les résultats des tests et des mesures faits sur l'ensemble des moteurs piézo-électriques. Deux types de tests ont été faits afin de vérifier la fonctionnalité et la fiabilité des moteurs, pendant une longue durée de fonctionnement ininterrompu.

Le test avec la commande manuelle

Le test avec la commande manuelle a consisté à vérifier le fonctionnement correct sur tout le parcours de la vis. La commande manuelle est un potentiomètre connecté au boîtier de commande des moteurs, qui produit des impulsions de l'ordre de 100 V et les envoie aux céramiques piézo-électriques.

On a considéré que le test était passé avec succès si la vis ne se bloquait pas.

Le test de longue durée

Ce test a consisté en plusieurs allers et retours de la vis commandée automatiquement (grâce à un convertisseur numérique analogique envoyant des impulsions au boîtier de contrôle des moteurs) dans une dynamique qui soit la plus étendue possible sans arriver en bout de course, afin d'éviter des blocages de la tête de la vis sur le châssis du support.

Le nombre de tours de vis choisi a été de 18 et, pour tester la fiabilité en endurance, on a fixé la durée du test à 20 heures.

La vitesse de la vis avec la commande utilisant le convertisseur est considérablement inférieure à celle obtenue avec la commande manuelle.

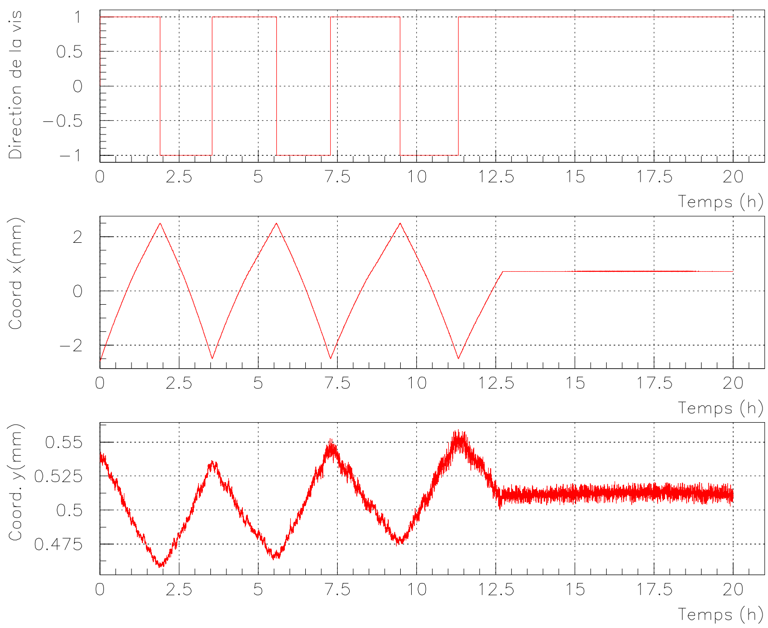

Figure 5.7: Test de longue durée d'un moteur. La figure du haut indique la direction de la vis, les deux autres les coordonnées du faisceau sur l'écran. Après environ 12 heures et demie de fonctionnement ininterrompu, la vis s'est arrêtée.

Vitesse de la vis

La vitesse moyenne de la vis $\langle v_g \rangle$ avec la commande manuelle, mesurée pour un moteur ayant passé le test de la commande manuelle, est

$$\langle v_g \rangle_{c.m.} \simeq 0.07 \text{ tours/s.} \tag{5.16}$$

Pour un moteur n'ayant pas passé ce test, on a obtenu en moyenne

$$\langle v_b \rangle_{c.m.} \simeq 0.03 \text{ tours/s.} \tag{5.17}$$

Dans le cas du test avec le convertisseur numérique analogique, et pour un moteur qui a passé le test, on a mesuré

$$\langle v_g \rangle_{DAC} \simeq 0.0065 \text{ tours/s.} \tag{5.18}$$

Pour un mauvais moteur

$$\langle v_b \rangle_{DAC} \simeq 0.0027 \text{ tours/s.} \tag{5.19}$$

On a donc le même rapport entre les vitesses dans les deux types de tests

$$\left[\frac{\langle v_g \rangle}{\langle v_b \rangle}\right]_{c.m.} \simeq 2.3 \qquad \left[\frac{\langle v_g \rangle}{\langle v_b \rangle}\right]_{DAC} \simeq 2.4. \tag{5.20}$$

5.4.4 Résultats des tests

Les deux types de tests ont été répétés deux fois. Sur chaque support, on peut monter deux ou trois moteurs selon qu'il est nécessaire ou non de contrôler une translation. Les moteurs ont été appelés selon l'angle produit sur le faisceau réfléchi: H Horizontal, V vertical, D diagonale.

Pour vérifier la fiabilité des moteurs fournis par le producteur on a aussi testé le support numéro 7 qui n'a subi aucune manipulation de nettoyage. La table de la page suivante résume le résultat des tests effectués.

5.4.5 Conclusions

La liste suivante résume les résultats des mesures et le comportement des moteurs piézo-électriques:

- 16 moteurs piézo-électriques ont été testés.
- 9 moteurs piézo-électriques (56%) ont passé le test de la commande manuelle.
- 8 moteurs piézo-électriques (50%) ont passé le test de long durée.
- 16 moteurs piézo-électriques (100%) fonctionnent au moins dans un petit intervalle de la course de la vis.
- La position d'arrêt des vis a toujours été proche de la fin de la course et dans la direction opposée à la force imposée par les ressorts qui ont tenu en contact la tête de vis et le support.
- Si une vis s'arrête, il y a une grande probabilité pour qu'elle reste bloquée (on n'arrive pas à la débloquer en revenant en arrière). Si on tourne manuellement la vis, dans la direction opposée à celle du blocage, on parvient à la débloquer.
- La vitesse de $v^* = 0.07$ $tour/s$ ne semble pas être un indicateur suffisant pour affirmer que le moteur piézo-électrique est fiable.

Ces commentaires et un simple test fait avec les mains en augmentant la pression des mâchoires sur la vis, suggèrent qu'il y a une relation particulière entre la force appliquée sur la vis par les mâchoires et le lubrifiant utilisé. La solution élaborée pour faire fonctionner les moteurs piézo-électriques après le traitement pour la compatibilité au vide, a donc été d'augmenter simplement la force imposée par le ressort qui pousse sur les mâchoires, et augmenter ainsi la friction entre la vis et le filetage des deux mâchoires.

Monture	Degré de liberté du support	Vitesse de la vis avec le DAC (millitour/s)	test commande manuelle Passé	Test DAC Passé
01	H(A)	/	NON	/
	V(C)	/	NON	/
	D(B)	/	NON	/
02	H(A)	5.7	OUI	OUI
	V(C)	2.5	NON	/
	D(B)	/	NON	/
03	H(A)	3.2	OUI	NON
	V(C)	2.3	NON	NON
04	H(A)	8.4	OUI	OUI
	V(C)	8.6	OUI	OUI
05	H(A)	2.6	NON	NON
	V(C)	4.6	OUI	OUI
06	H(C)	5.2	OUI	OUI
	V(A)	6.6	OUI	OUI
07$^{(*)}$	V(A)	5.8	OUI	/
	H(C)	/	OUI	OUI

Chapitre 6

Le contrôle automatique de position du banc de détection

Introduction

Dans ce chapitre, le système automatique de contrôle de position du banc de détection réalisé avec un système numérique d'asservissement, sera décrit en détail.

Les principales caractéristiques des composants de cet ensemble d'asservissement numérique (ADC, DAC, DSP) et les logiciels utilisés seront détaillées.

Enfin les résultats préliminaires de l'asservissement réalisé avec ce système seront décrits.

6.1 L'asservissement numérique

La figure 6.1 montre le schéma typique d'un asservissement numérique. Voyons donc les diverses étapes de fonctionnement de ce système:

- Le signal analogique de sortie du système $y_a(t)$ est filtré analogiquement pour éliminer le phénomène du repliement en fréquence du spectre [15].
- $y_a(t)$ filtré est échantillonné au moyen d'un convertisseur analogique numérique (ADC) à la fréquence $\nu_0 = 1/T$. La sortie de l'ADC est la séquence des échantillons $y(n) = y_a(nT)$.
- Le signal $y(n)$ est envoyé à l'ordinateur via un bus numérique, pour construire le signal d'erreur $\varepsilon(n)$.
- Un filtrage numérique calcule le signal de correction $g(n)$ à partir de $\varepsilon(n)$.

- $g(n)$ est envoyé au convertisseur numérique analogique (DAC) via le bus numérique qui envoie le signal de correction analogique $g_a(nT)$ au système physique.

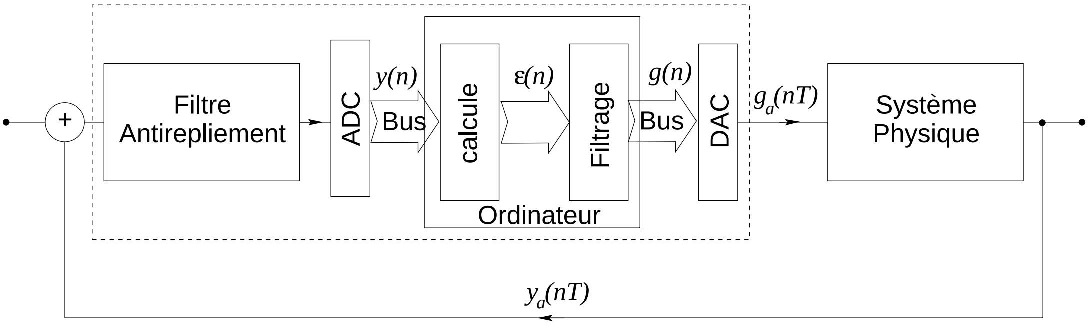

Figure 6.1: Schéma typique d'un asservissement numérique.

Par rapport à un système analogique pur, on a un niveau de complexité plus élevé puisqu'il faut développer la partie délimitée par le rectangle en tirers, à la place d'un filtre analogique. En terme de flexibilité et de performance, en particulier à basse fréquence, les avantages sont importants; c'est un système programmable, donc idéal pour l'étude expérimentale d'un asservissement automatique, et capable de réaliser des filtres pratiquement impossibles à synthétiser avec un système analogique.

Une des façons de réaliser ce filtrage, qui a été appliqué dans le système numérique utilisé, est expliqué plus en détail dans l'annexe C.

6.2 Le système d'asservissement

Le système d'asservissement de positionnement du banc de détection est basé sur deux ordinateurs. L'un est dédié à la lecture de la caméra CCD (le PowerPC), l'autre est dédié à l'asservissement et est interfacé à des cartes de conversion analogique numérique (le DSP). La communication entre ces ordinateurs est faite grâce au bus numérique VME.

La carte DSP (Digital Signal Processor)

Le DSP (Digital Signal Processor) est un système de calcul programmable en virgule flottante, fait pour l'élaboration numérique des signaux. Les caractéristiques principales du système commercial data beta DBV 96[22] utilisé sont les suivantes:

- processeur Motorola DSP96002 IEEE Floating-Point,
- nombre des calculs par seconde 50 MFlops,

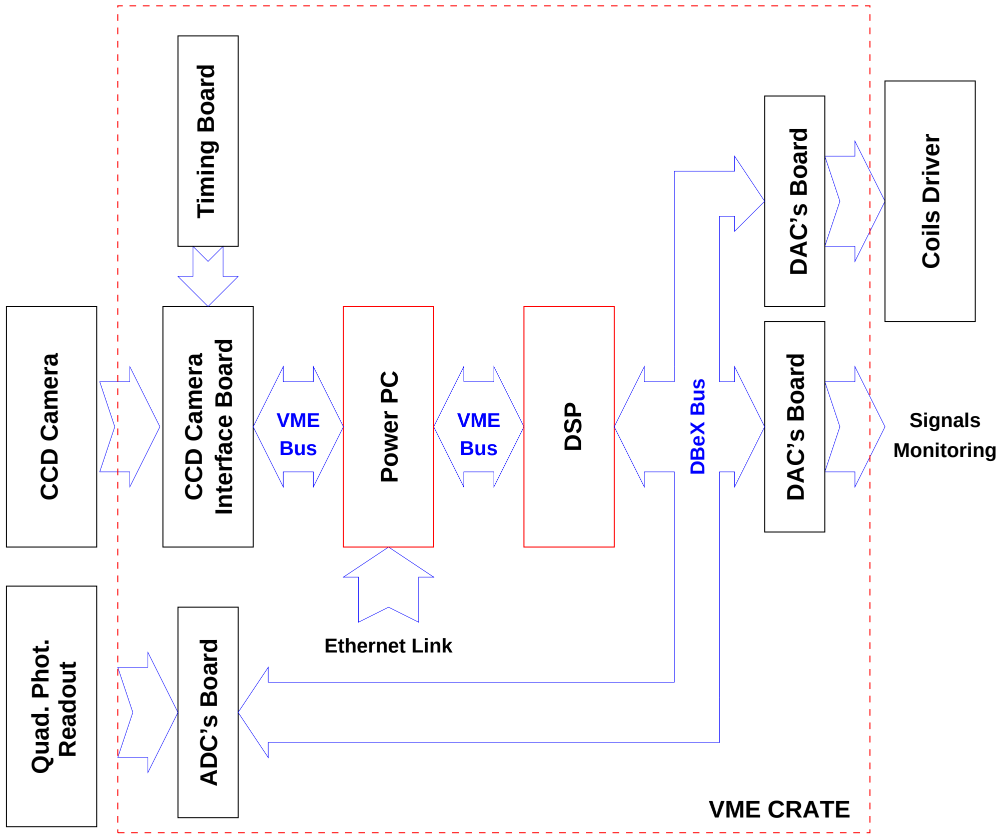

Figure 6.2: Schéma du système d'asservissement de position du banc de détection.

- fréquence maximale d'horloge de fonctionnement 33.3 MHz,
- interface aux bus numériques VME et $D\beta$eX (bus propriétaire).

Les cartes des convertisseurs analogiques numériques (ADC) et numériques analogiques (DAC), qui ont été développées spécialement pour les systèmes d'asservissement de position de VIRGO par l'INFN de Pise, ont les caractéristiques suivantes:

La carte ADC

- convertisseur à 16 bits,
- nombre de canaux 4,
- vitesse d'échantillonnage entre 2 kHz et 160 kHz,
- bus d'interface VME et DβeX.

la carte DAC

- convertisseur à 18 bits,
- nombre des canaux 4,
- vitesse d'échantillonnage jusqu'à 200 kHz (trigger externe),
- trigger interne et externe,
- bus d'interface VME et DβeX.

6.2.1 Description du fonctionnement

La figure 6.2 présente le schéma du système d'asservissement utilisé par les deux systèmes de positionnement local et global. Il y a essentiellement deux tâches temps réel. L'une sur le DSP exécute essentiellement la boucle d'asservissement contrôlée par l'horloge de l'ADC. L'autre sur le Power-PC lit l'interface de la caméra CCD et envoie les variations des degrés de liberté au DSP. Elle est contrôlée par l'horloge de la carte "Timing".

Voyons plus en détail les phases de l'asservissement qui démarre avec le système de positionnement local:

- La caméra CCD échantillonne l'image du banc de détection,
- le Power-PC lit dans l'interface de la caméra l'image du banc,
- le Power-PC calcule les variations des six degrés de liberté du banc, les signaux d'erreur,
- les signaux d'erreur sont envoyés par le Power-PC via le bus VME au DSP,
- le DSP calcule les six corrections de la position du banc,
- les corrections sont envoyées par le DSP via le bus DβeX dédié au DAC, dont les sorties sont connectées aux contrôleurs des actionneurs: les 8 bobines des 4 jambes fixées au sol de la tour,
- Les bobines appliquent les forces magnétiques au banc, corrigeant ainsi sa position.

Le système de contrôle global est déclenché une fois que le faisceau secondaire est grossièrement centré sur les 2 photodiodes à quadrants. Par rapport aux opérations faites par le contrôle local, il n'y a qu'une différence substantielle: quatre des variations des degrés de liberté sont directement calculées par le DSP à partir des signaux des 2 photodiodes à quadrants qui sont lues via DβeX, par des ADC connectés au DSP.

La fréquence d'échantillonnage de la caméra CCD a été fixée à 40 Hz et celle des photodiodes à quadrants à 2.0 kHz.

6.3 Les logiciels du système d'asservissement

Les logiciels du système d'asservissement, dont un schéma global est présenté par la figure 6.3, sont repartis sur les deux CPU utilisés. Ceux exécutés par le DSP sont:

- le programme dbalign appelé par interruption qui exécute en temps réel les opérations nécessaires pour l'asservissement et qui devra donc être exécuté dans la période d'échantillonnage.
- le serveur du DSP qui exécute les opérations de chargement de la routine d'interruption et les commandes pour l'asservissement (changement des gains de filtres ou des signaux, ouverture et fermeture des boucles, etc...).
- Le "système opérationnel" du DSP, qui gère l'accès aux ressources du DSP comme par exemple la lecture et l'écriture dans la mémoire du DSP.

Les logiciels exécutés par le Power-PC sont les suivants:

- Gxserveur qui calcule et envoie via le bus VME, les coordonnées du banc de détection au DSP (voir section 4.2.5),
- les programmes d'acquisition de données dspread , qui lit les données stockées dans la mémoire du DSP, et gxmarks, qui lit les coordonnées du banc calculées par GXserveur,
- damping qui permet de définir, générer et envoyer au DSP le programme d'interruption (dbalign). A partir d'une description du réseau des connexions des entrées et sorties (des ADC, des DAC ou des signaux envoyés au DSP via le bus VME) et des élaborations sur les signaux, damping génère le code machine du DSP. Ce code est ensuite envoyé au DSP via le bus VME. Ce système de développement est aussi capable d'insérer des routines ou des fonctions en langage C déjà compilé, dans la boucle d'asservissement. damping assure également toutes les fonctions de contrôle de la routine d'interruption du DSP.

Tous les logiciels du DSP ont été développés par le groupe de Pise, avec la collaboration du LAPP pour la mise au point de certaines fonctions du système.

6.3.1 La synchronisation du DSP et du Power-PC

La communication entre le DSP et le Power-PC, peut introduire des fluctuations sur la phase des signaux des coordonnées du banc, envoyés par GXserveur à dbalign. En effet, le temps d'exécution du processeur du Power-PC doté

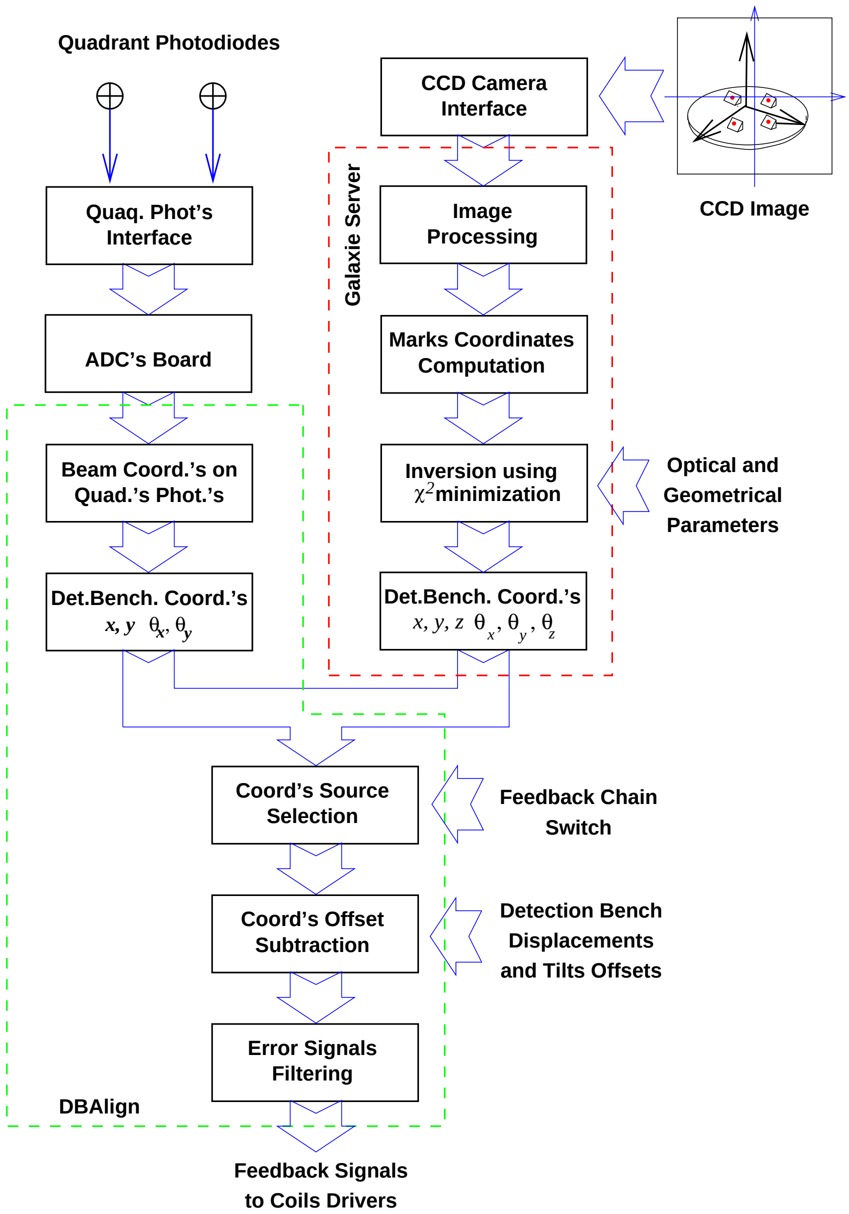

Figure 6.3: Synoptique des programmes d'alignement automatique du banc de détection.

d'un système multi-tâche et multi-utilisateur ne peut pas être constant. Par conséquent, la routine appelée par interruption (gérée par la carte "timing"), qui lit l'image et calcule les variations des coordonnées, aura son temps d'exécution variable, ce qui fait que les donnés envoyées au DSP auront un bruit de phase.

La solution la plus simple pour minimiser ces fluctuations, est de ne faire dans la fonction d'interruption du Power-PC, que l'envoi des données au DSP.

Ces données seront calculées pendant le temps laissé libre par la fonction d'interruption. La contrepartie de ce système de communication est que l'on a un retard constant égal à une période d'horloge.

Cette solution est justifiée par les nombreux avantages d'un système opérationnel multi-tâche, comme par exemple la facilité de gestion et d'utilisation du réseau pour l'envoi des images au système de visualisation (GXmain).

6.4 Etalonnage de la caméra CCD

La mesure des paramètres géométriques et optiques du système de lecture de position basé sur la caméra CCD,(voir section 4.1.2), a donné les résultats suivants:

Paramètre	Valeur Théorique	Valeur Calculée	
α (°)	30	30.013	
β (°)	27	27.093	
γ (°)	0.0	-5.5677	
f (mm)	35.0	35.0000	(fixé)
D (mm)	1400	1401.2	
r_x (mm)	0.0	-4.3832	
r_y (mm)	0.0	-1.1257	

Les valeurs théoriques sont celles prises sur les dessins mécaniques de la tour, tandis que la valeur théorique de la focale (donnée par le fabriquant), a été fixée par la forme particulière de la fonction à ajuster. En effet, dans toutes les formules de calcul des coordonnées des taches sur la CCD, le facteur suivant apparaît

$$G = \frac{f}{f-(D-z)} \simeq \frac{f}{D}, \qquad \text{si} \qquad |f| << |z| << D. \tag{6.1}$$

où z est la coordonnée de la tache. Donc dans ce cas, ce qui compte pour l'ajustement, c'est le rapport entre la focale f et la distance D de la CCD à l'origine du repère du banc.

La table suivante montre les valeurs des coordonnées des quatre taches sur la CCD mesurées avec la caméra, et celles calculées avec les paramètres estimés.

Marque	Valeur	Mesurée	Valeur	Calculée	Ecart	
	x (mm)	y (mm)	x (mm)	y (mm)	x (mm)	y (mm)
1	-1.89	-1.83	-1.8812	-1.8343	0.009	0.004
2	2.89	-1.01	2.8814	-1.0124	0.009	0.002
3	2.30	0.74	2.3070	0.7362	0.007	0.004
4	-2.83	-0.30	-2.8381	-0.3018	0.008	0.002

Avec un écart de 0.4% en moyenne, l'accord entre les valeurs des coordonnées des taches mesurées sur la CCD et celles calculées, est donc plus que satisfaisant.

6.4.1 Mesure du couplage résiduel

La figure 6.4 montre les spectres des six degrés de liberté du banc en boucle ouverte, obtenus en utilisant la caméra CCD dans les conditions suivantes:

temps d'acquisition	:	$\sim$ 12 heures
fréquence d'échantillonnage	:	40 Hz
temps d'intégration de l'image	:	1.28 ms
seuil sur le bruit de l'image	:	15% de la valeur maximale

Une analyse des spectres montre un couplage résiduel entre les degrés de liberté. Par exemple, on peut voir que la fréquence de résonance du premier mode de pendule (343.750 mHz) est présente dans les spectre des degrés de liberté vertical y et rotationnel θ_y. Ce phénomène dépend de plusieurs facteurs:

- couplage mécanique du deuxième ordre entre les modes d'oscillation orthogonaux, autrement dit un mouvement de pendule dans la direction x par exemple, produit un déplacement également dans la direction y. Mais cet effet ne doit pas être visible compte tenu des amplitudes des mouvements et de la longueur du pendule.

- des amplitudes d'oscillation du premier mode de pendule trop importantes, qui excèdent la dynamique où la réponse du système est linéaire, génèrent un couplage sur tous les degrés de liberté.

- couplage produit par des erreurs systématiques dans les paramètres géométriques (cause la plus probable).

La présence du pic du premier mode de pendule dans les degrés de liberté rotationnels θ_x et θ_z est expliquée par un vrai couplage mécanique entre les déplacements et les angles. Par exemple, une oscillation α dans la direction $O\hat{x}$ à la fréquence de résonance du pendule de longueur maximale l, produit le déplacement Δx suivant

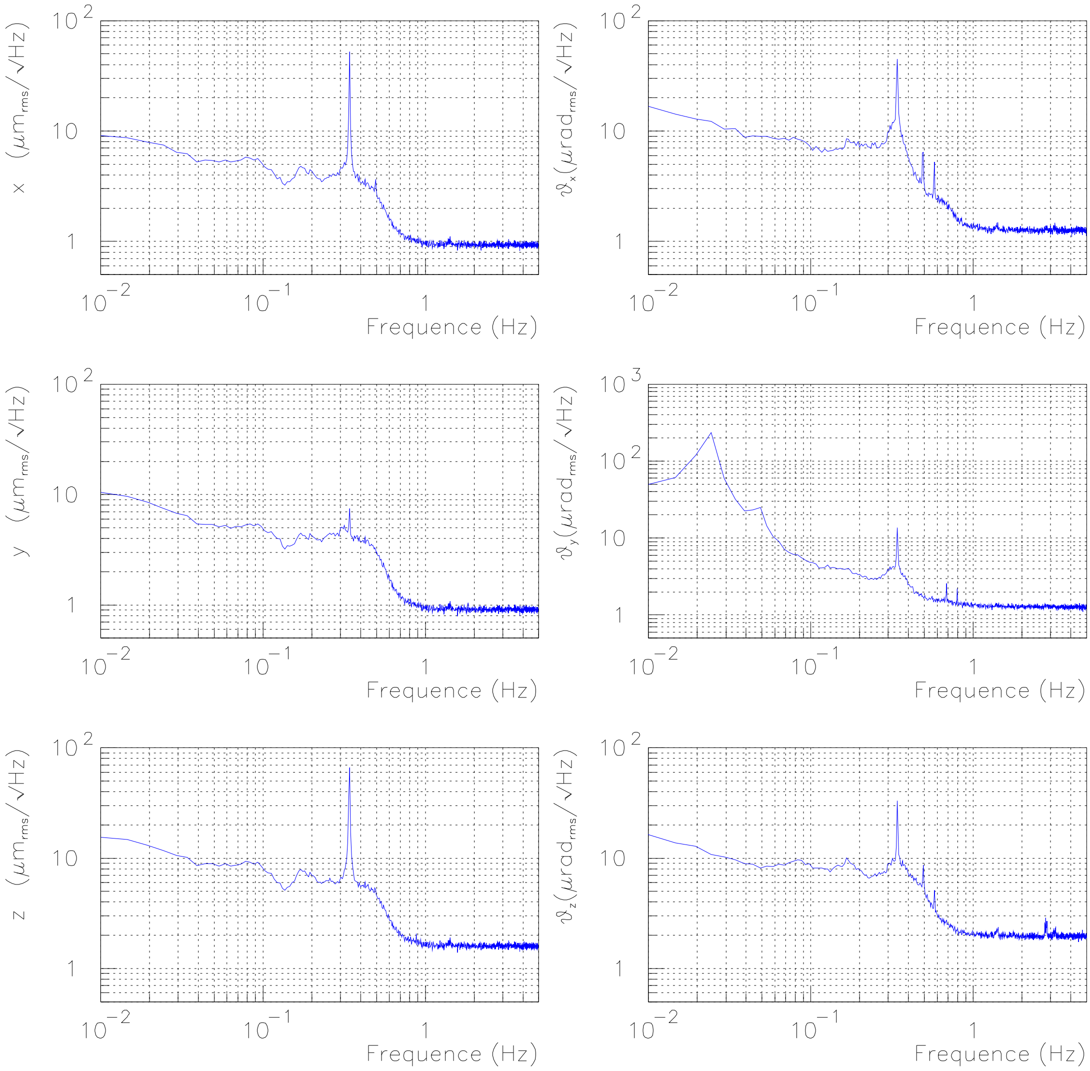

Figure 6.4: Densités spectrales en boucle ouverte des coordonnées du banc de détection mesuré avec la caméra CCD. Le plateau au-dessus d'environ 1 Hz, est dû au bruit de la caméra.

$$\Delta x = lsin(\alpha) \simeq l\alpha, \tag{6.2}$$
$$\tag{6.3}$$

Ce déplacement peut induire une rotation $\Delta\theta_z$ du banc qui dépend de la rigidité de la liaison banc/fils de suspension

$$\Delta\theta_z = \eta\alpha, \tag{6.4}$$

où η est un coefficient qui dépend des moment de torsion des fils de suspension. Le couplage attendu est donc

$$\frac{\Delta x}{\Delta\theta_z} = \eta l \ \left(\frac{m}{rad}\right). \tag{6.5}$$

En considérant que $l = (2900 \pm 20)\ mm$ et que les valeurs prises sur les densités spectrales ont une erreur en pourcentage d'environ 5%, on peut calculer par curiosité, les valeurs de η dans les deux directions (la symétrie du système veut que ces deux paramètres soient égaux):

$$\begin{aligned} \langle\eta\rangle_{exp} &= (0.55 \ \pm \ 0.06) \ , \qquad \text{(direction x)} \\ \langle\eta\rangle_{exp} &= (0.50 \ \pm \ 0.05) \ , \qquad \text{(direction z)} \end{aligned} \tag{6.6}$$

On obtient donc des valeurs pour η raisonnablement comparables dans les deux directions x et z.

6.5 Mesure des fonctions de transfert mécanique avec la caméra CCD

La mesure directe de la fonction de transfert d'un système mécanique se fait en injectant un bruit connu par les actionneurs (les bobines de contrôle du banc) et en mesurant les déplacements (avec la caméra).

Cette mesure présente des difficultés importantes si la résolution sur les déplacements n'est pas suffisante et si les résonances ont des Q élevés. Dans ce cas, il est difficile de solliciter suffisamment le système à toutes les fréquences autres que les fréquences de résonance sans sortir de la dynamique. En outre, dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté, il est impossible de solliciter ce système dans un seule direction et donc on injecte du bruit indésirable qui augmente la difficulté de la mesure.

Cette méthode directe s'est avérée peu sensible même en réduisant le bruit injecté au niveau des résonances. Une autre méthode de mesure de la fonction de transfert dite "en boucle fermée", a été mise en oeuvre.

6.5.1 Fonction de transfert mécanique en boucle fermée

La mesure est faite en boucle fermée et la fonction de transfert mécanique est déduite en connaissant le correcteur utilisé. (Cette méthode implique déjà une connaissance suffisante de la réponse en fréquence du système pour fermer la boucle d'asservissement).

La réponse en boucle fermée H_{cl} du système de la figure 6.5, est

$$H_{cl}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 - G(s)H(s)e^{-s\tau}}, \qquad s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} \tag{6.7}$$

où G est la réponse du correcteur, H celle du système et τ le retard entre l'entrée x et la sortie y.

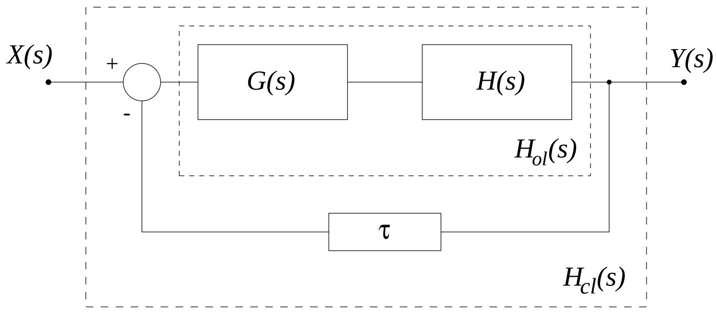

Figure 6.5: Schéma du système d'asservissement.

Par conséquent on a

$$H(s) = \frac{H_{cl}(s)}{(1 + H(s)_{cl}e^{-s\tau})G(s)}. \tag{6.8}$$

L'erreur relative commise dans la mesure de $H(s)$ est donc

$$\left|\frac{\Delta H}{H}\right| = \frac{1}{\left|1 + H_{cl}e^{-j\omega\tau}\right|}\left[\left|\frac{\Delta H_{cl}}{H_{cl}}\right| + |H_{cl}|\,\omega\Delta\tau\right] + \frac{\Delta G}{G}, \tag{6.9}$$

(où $s \Rightarrow j\omega$), qui se réduit aux deux cas intéressants suivants

$$\begin{aligned} \left|\frac{\Delta H}{H}\right| &\simeq \omega\Delta\tau, \qquad |H_{cl}| >> 1, \\ \left|\frac{\Delta H}{H}\right| &\simeq \left|\frac{\Delta H_{cl}}{H_{cl}}\right|, \quad |H_{cl}| << 1. \end{aligned} \tag{6.10}$$

puisque l'erreur sur $G(s)$ est normalement négligeable par rapport aux autres. Lorsque le gain en boucle fermée est élevé, l'erreur de mesure est dominée par l'incertitude sur le retard, tandis que lorsque le gain est faible, l'erreur sur la mesure en boucle fermée est dominante.

Dans notre cas particulier, H est la réponse mécanique de l'ensemble super-atténuateur banc de détection, sollicité au niveau du banc en utilisant les bobines. Le correcteur G est un filtre intégrateur et dérivateur compensé, mis en oeuvre au moyen du DSP. Le retard τ est essentiellement celui introduit par la méthode de communication choisie, entre le Power-PC et le DSP (voir section 6.3.1).

La connaissance des résonances du système est normalement suffisante pour concevoir un correcteur assez stable pour rendre la mesure possible. La forme du filtre G utilisé, (le même pour tous les degrés de liberté) est

$$G(s) = A\frac{(s+z_0)^2}{s(s+p_0)}, \qquad A \in \mathbb{R} \tag{6.11}$$

Il présente un pôle à 0 Hz, afin d'avoir un gain DC suffisant pour maintenir la position du banc, deux zéros à 0.15 Hz, un pour compenser le pôle et l'autre pour avoir une marge de phase, et un pôle à 5 Hz, pour couper le gain à “haute” fréquence. Le gain du correcteur a été choisi expérimentalement en l'augmentant jusqu'à frôler la limite d'instabilité de la boucle.

Le valeur de retard mesuré est

$$\langle\tau\rangle_{exp} = (44 \pm 1) \text{ ms} \tag{6.12}$$

Les figures 6.6, 6.7, 6.8 et 6.9, montrent les résultats obtenus pour les degrés de liberté x, θ_x, y et θ_y; les degrés de liberté z et θ_z, présentent un comportement similaire à x et à θ_z. La grand partie des fréquences de résonance de la chaîne de pendules du banc, qui peuvent être observées dans les fonctions des transferts mécaniques, sont reportées dans la table suivante:

#	ν (mHz)	Modes de Pendule	Mode Vertical	Modes autour de Ox ou Oz	Mode autour de Oy
1	19.51				1
2	41.02				2
3	343.75	1			
4	498.05	2			
5	582.03			1	
6	804.69				3
7	888.67	3			
8	1859.0		1		

La mesure précise des modes propres a été faite en injectant un bruit blanc et en déterminant, avec un analyseur de spectre, la fréquence des résonnaces observées.

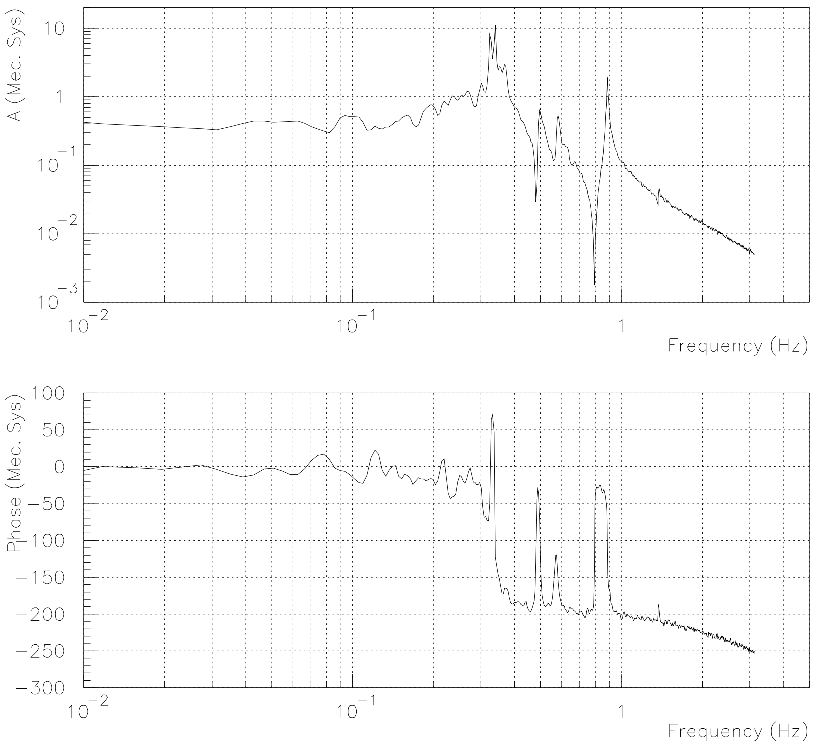

Figure 6.6: Fonction de transfert mécanique de la coordonnée x du banc de détection mesurée en boucle fermée.

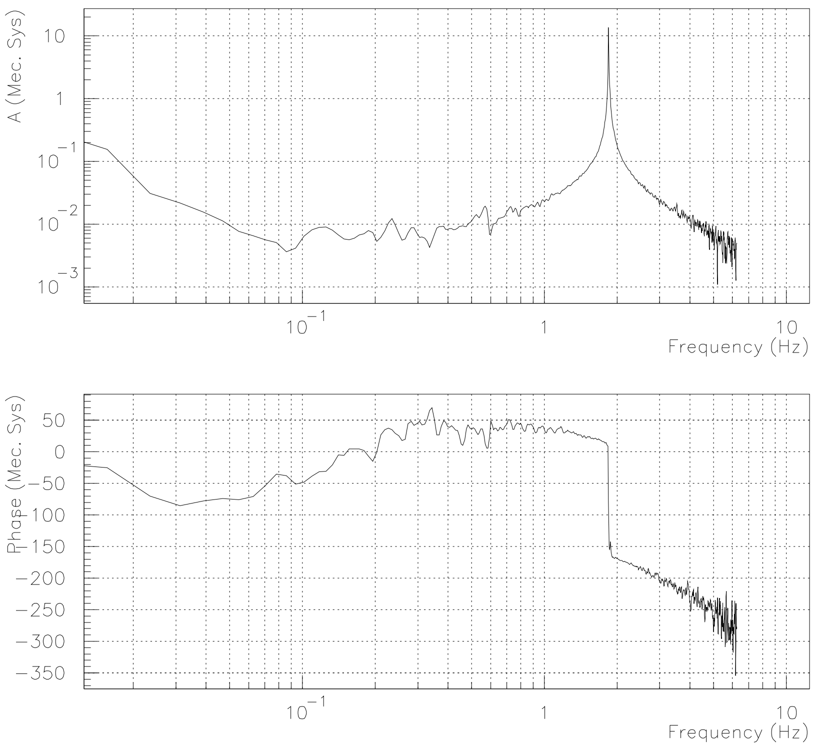

Figure 6.7: Fonction de transfert mécanique de la coordonnée y du banc de détection.

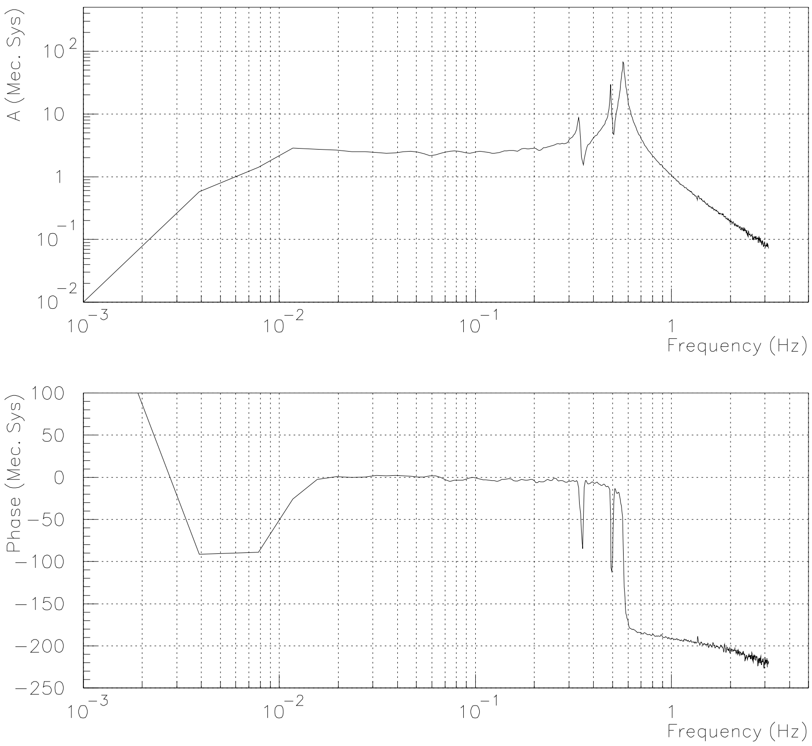

Figure 6.8: Fonction de transfert mécanique de la coordonnée θ_x du banc de détection mesurée en boucle fermée.

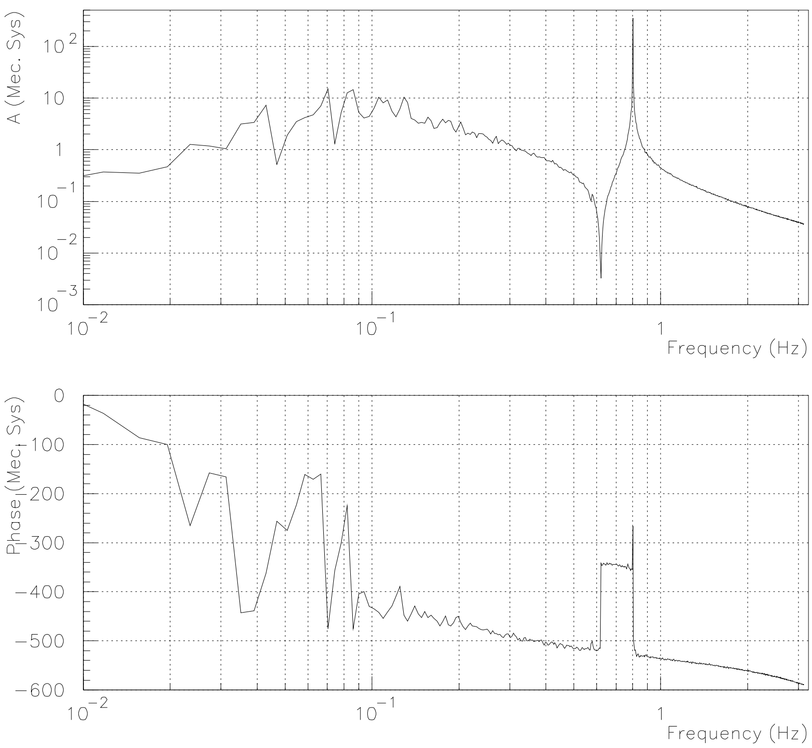

Figure 6.9: Fonction de transfert mécanique de la coordonnée θ_y du banc de détection mesurée en boucle fermée.

6.6 Résultat de l'asservissement avec la caméra CCD

La mesure des signaux d'erreur en boucle fermée, donne des informations fondamentales et quantitatives pour l'estimation du bon fonctionnement de l'asservissement ainsi que sur la stabilité, la robustesse, la précision et la sensibilité du système étudié.

Densité spectrale en boucle fermée

La comparaison des densités spectrales du signal d'erreur en boucle ouverte et en boucle fermée, est une des méthodes les plus simples pour visualiser l'efficacité de l'asservissement en fonction de la fréquence. Les figures 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14, et 6.15, montrent les résultats obtenus avec le simple correcteur $G(s)$ (6.11) déjà utilisé pour les mesures des fonctions de transfert en boucle fermée.

Les considérations suivantes peuvent être faites à partir de ces figures:

- Le bruit sismique et/ou acoustique domine la partie basse de tous les spectres jusqu'à environ 0.8 Hz.
- Au-dessus de 0.8 Hz c'est le bruit électronique de la caméra qui domine.

Les fréquences de gain unité de chaque boucle peuvent être estimées, en analysant la densité spectrale des signaux d'erreur. Si $\delta X(s)$ est le bruit introduit dans le système $H(s)$, on a

$$Y(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)G(s)}\delta X(s) \simeq H(s)\delta X(s), \qquad \text{si} \qquad |H(s)G(s)| << 1.$$

Dans ce cas, l'asservissement introduira du bruit (visible dans les figures) sans le facteur de réduction classique $|1 + H(s)G(s)|$. A partir des densités spectrales en boucle fermée, on peut faire les observations suivantes:

- l'atténuation du bruit fait par l'asservissement est donc essentiellement sur les fréquences de résonance du système. Si on augmente trop le gain de l'asservissement, on ne fait qu'injecter sur le banc de détection le bruit sismique ou acoustique capté par la caméra CCD accrochée à la tour.
- Sur toutes les densités spectrales, les pics de résonances sont suffisamment atténués (**le banc est donc contrôlé**).
- On a une fréquence de gain unitaire d'environ 1 Hz, pour tous les spectres.

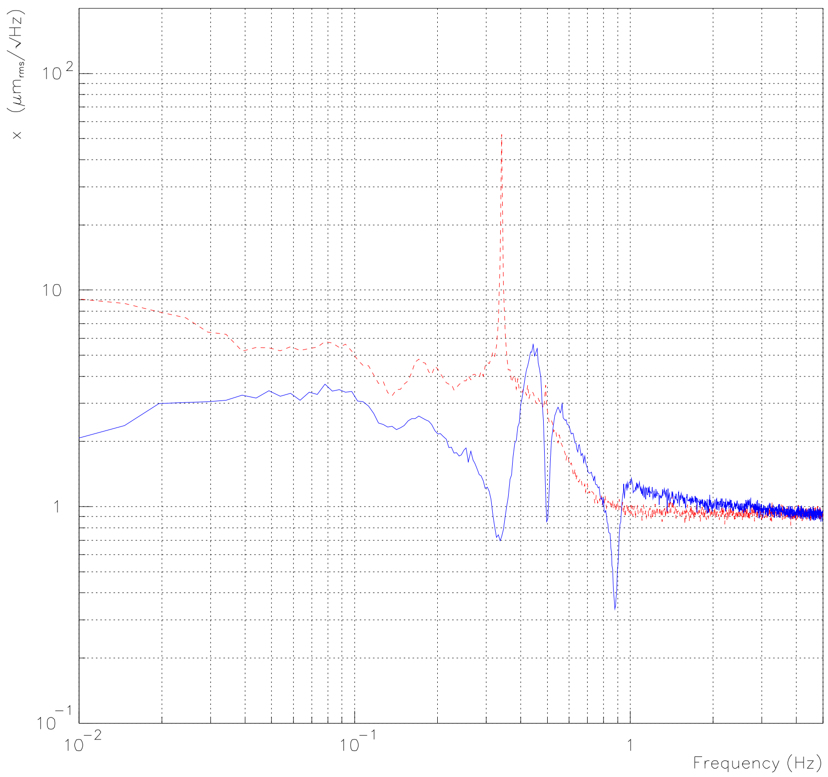

Figure 6.10: Densité spectrale en boucle ouverte (ligne en tirets) et en boucle fermée (ligne continue) pour le degré de liberté x.

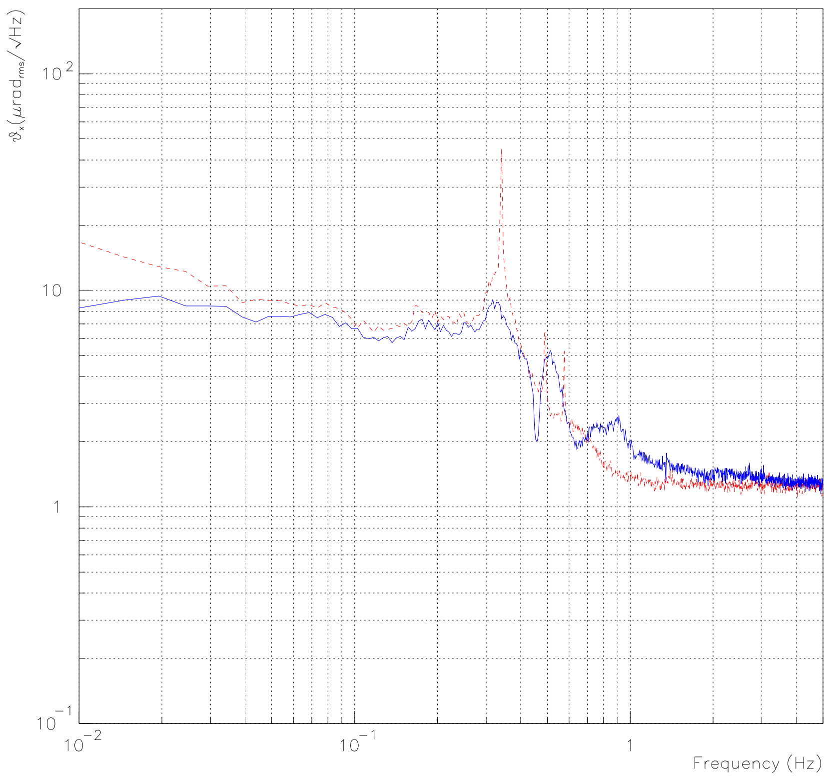

Figure 6.11: Densité spectrale en boucle ouverte (ligne en tirets) et en boucle fermée (ligne continue) pour le degré de liberté θ_x.

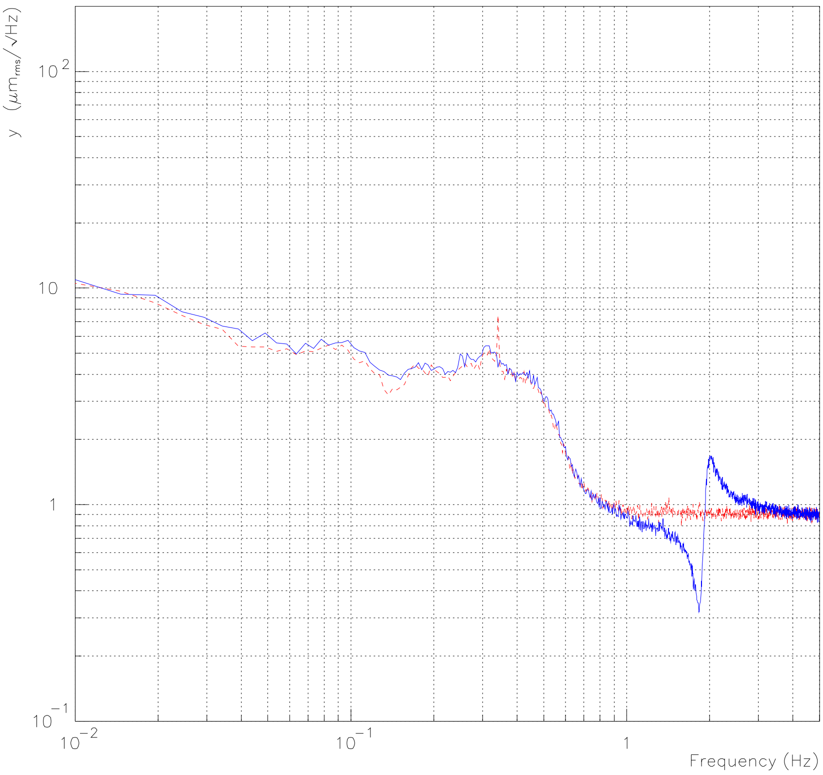

Figure 6.12: Densité spectrale en boucle ouverte (ligne en tirets) et en boucle fermée (ligne continue) pour le degré de liberté y.

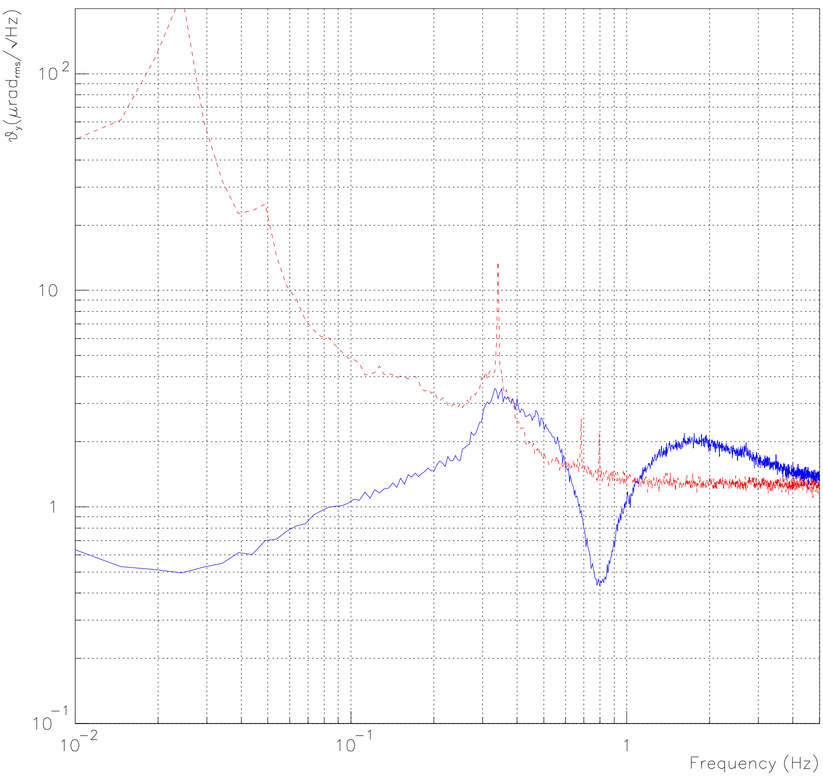

Figure 6.13: Densité spectrale en boucle ouverte (ligne en tirets) et en boucle fermée (ligne continue) pour le degré de liberté θ_y.

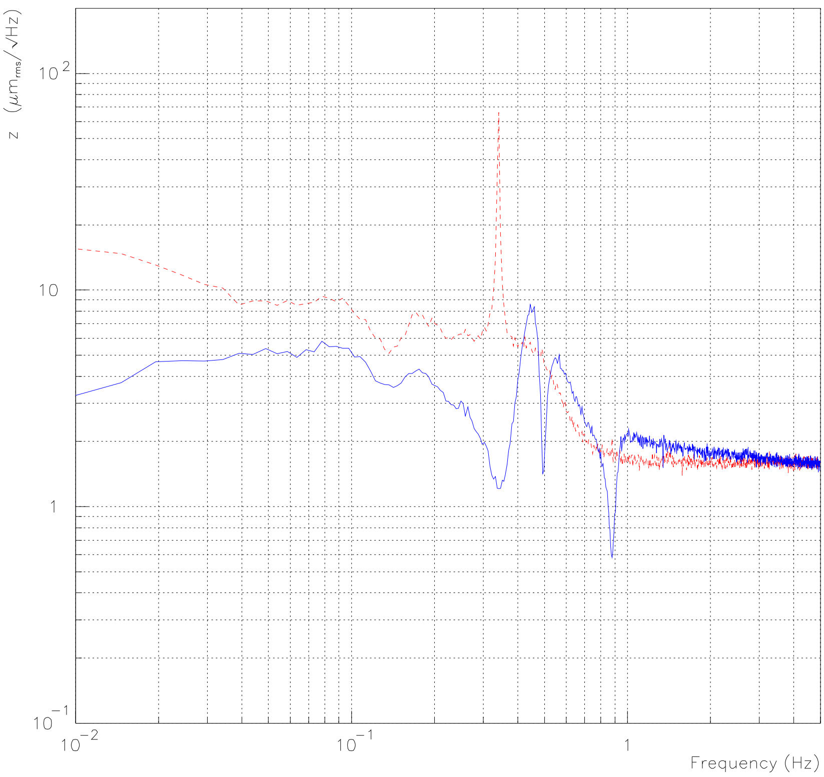

Figure 6.14: Densité spectrale en boucle ouverte (ligne en tirets) et en boucle fermée (ligne continue) pour le degré de liberté z.

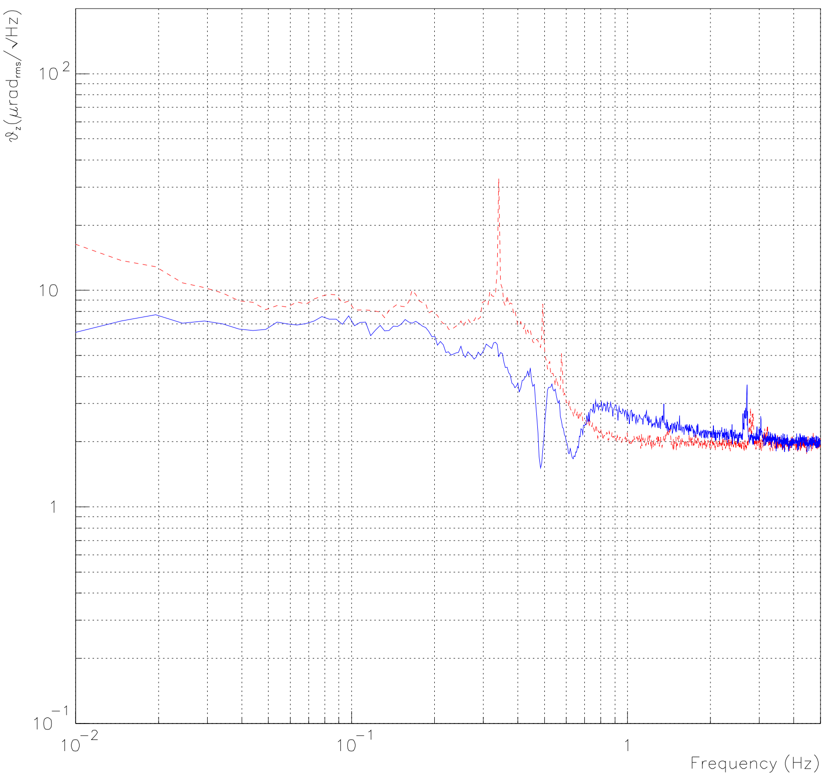

Figure 6.15: Densité spectrale en boucle ouverte (ligne en tirets) et en boucle fermée (ligne continue) pour le degré de liberté θ_z.

Résolution

L'écart σ_x calculé à partir des signaux d'erreur donne une estimation de la résolution maximale de l'asservissement, et donc du bruit résiduel. En effet, plus le système est capable de lire des fluctuations petites, et donc de les corriger, plus l'écart devrait être petit.

La figure 6.16 montre le bruit RMS des six coordonnées du banc sans asservissement mesuré avec les paramètres suivants:

temps d'acquisition	:	$\simeq$ 4 heures
fréquence d'échantillonnage	:	10 Hz
temps d'intégration de l'image	:	1.28 ms
seuil sur le bruit de l'image	:	30 (15% de la valeur maximale de puissance sur un pixel)

Les différentes coordonnées présentent des queues qui peuvent être imputables à des variations de température qui changent le point d'équilibre du banc.

La figure 6.17 montre le bruit RMS des six coordonnées du banc avec asservissement et mesuré en utilisant les mêmes paramètres que précédemment. Le bruit de position RMS en boucle fermée est donc diminué pour tous les degrés de liberté, avec des différences entre des coordonnées analogues (x et z ou θ_x et θ_z) qui peuvent dépendre de plusieurs facteurs tels que l'asymétrie de la position de la caméra CCD par rapport au banc.

6.7 Contrôle du banc avec la caméra CCD

Pendant la phase d'alignement de l'interféromètre il est nécessaire de pouvoir déplacer ou tourner le banc de détection selon les six degrés de liberté afin de centrer les faisceaux sortant de l'interféromètre sur le premier miroir du télescope (voir figure 2.4). En utilisant alors les moteurs piézo-électriques des supports du télescope ou encore l'asservissement de la caméra, on peut centrer le faisceau secondaire sur les photodiodes à quadrants afin de déclencher l'asservissement dit global.

Pour déplacer le banc, il faut appliquer aux signaux d'erreur de l'asservissement, un décalage pour changer le point zéro du signal et donc pour changer la position du banc. Les figures 6.18, 6.19 et 6.20 montrent le résultat obtenu respectivement pour les coordonnées x, θ_x et θ_y. Un échelon de 500 μm ou de 500 μrad étant appliqué instantanément au début des courbes.

On retrouve dans la figure 6.18 le couplage mécanique déjà mentionné entre les coordonnées x et θ_z lorsque l'on déplace le banc dans la direction x. En revanche aucun couplage entre z et θ_x (ou entre x et θ_z) n'est visible lorsque le mouvement appliqué est une rotation autour de l'axe Ox figure 6.19. Enfin, la dernière figure 6.20 montre le cas d'une rotation du banc de détection autour de

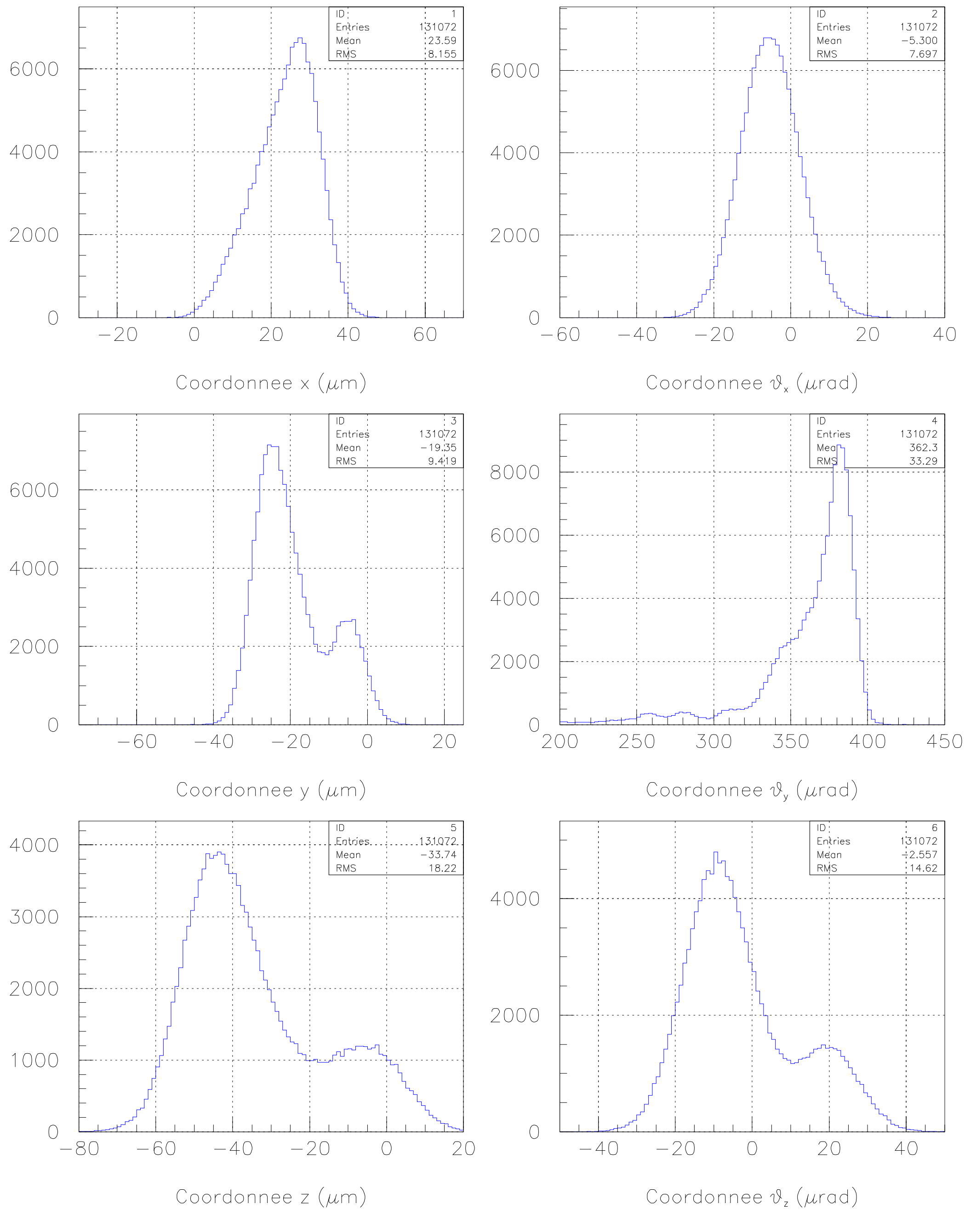

Figure 6.16: Histogrammes des signaux d'erreur des six degrés de liberté du banc de détection en boucle ouverte.

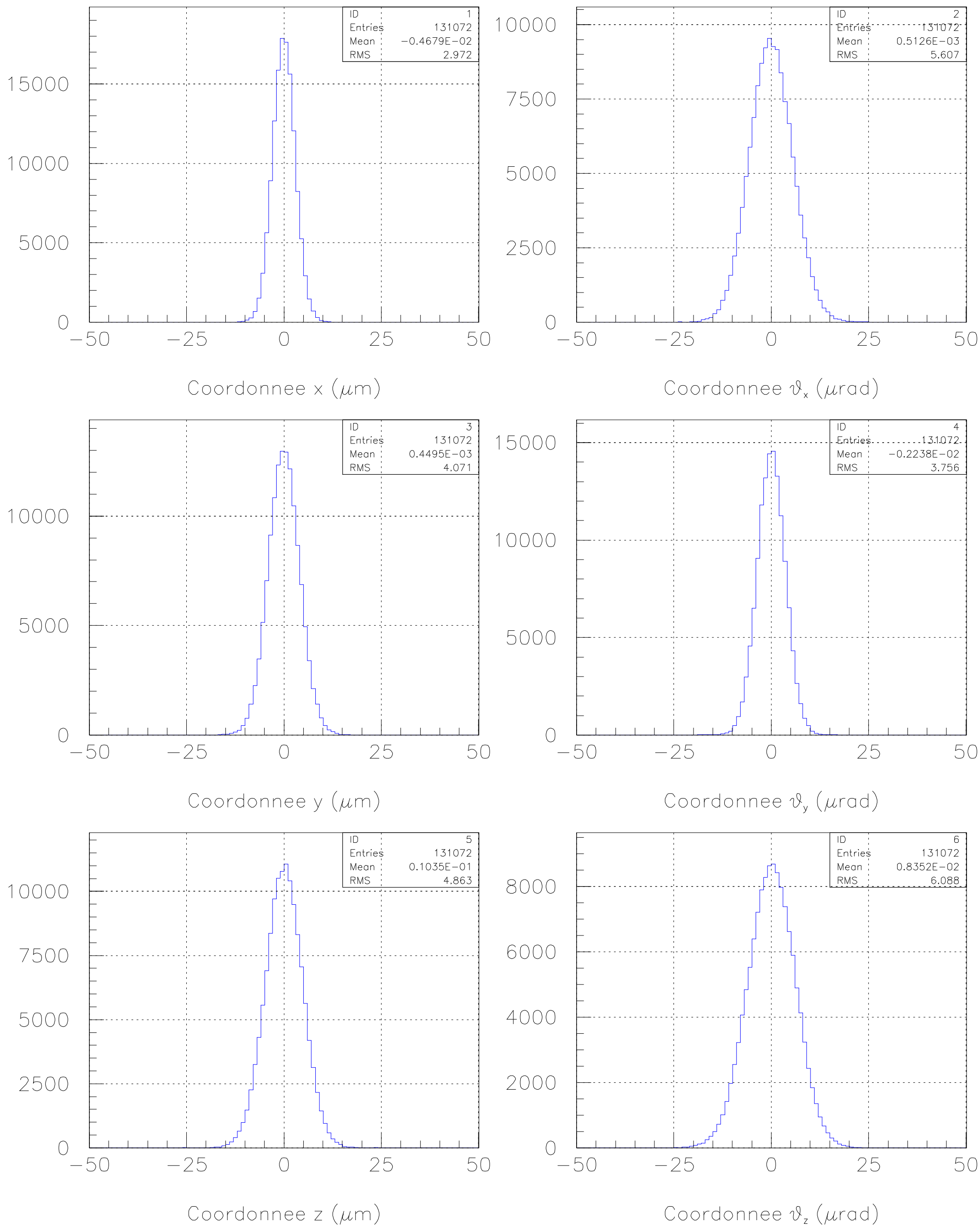

Figure 6.17: Histogrammes des signaux d'erreur des six degrés de liberté du banc de détection en boucle fermé.

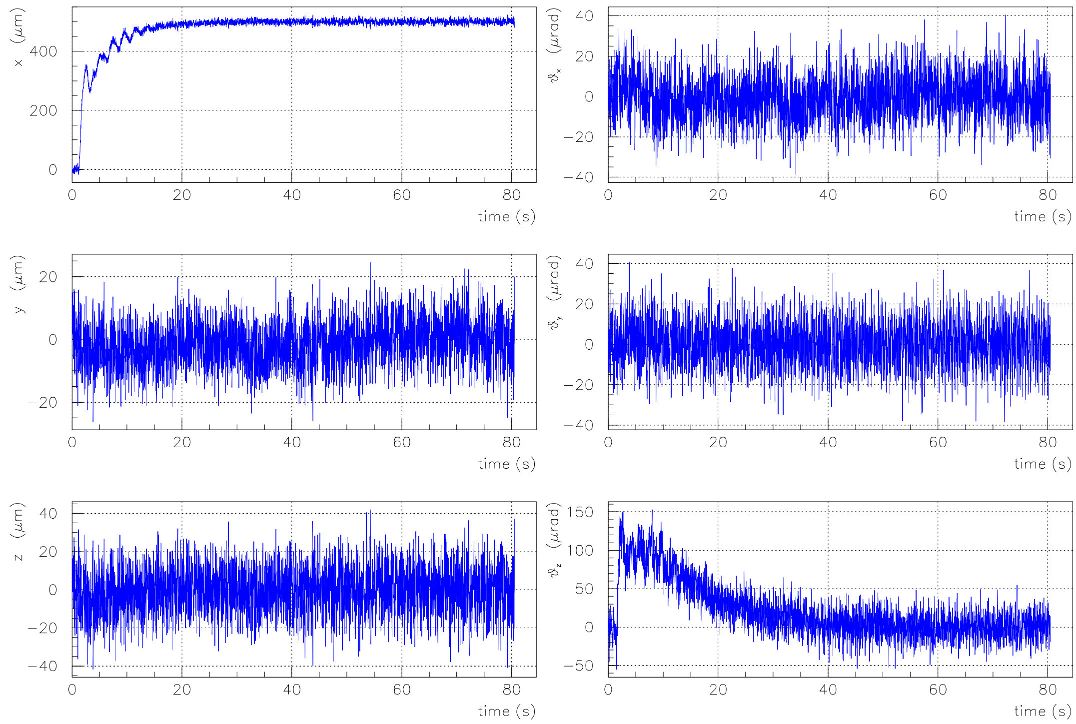

Figure 6.18: déplacement du banc de détection dans la direction x, fait avec le contrôle de la caméra CCD. Le couplage mécanique entre les coordonnées x et θ_z est bien visible.

l'axe $O\theta_y$.

Outre l'utilité de cette fonctionnalité, ces courbes montrent la robustesse du système de contrôle et dans la plupart des cas un bon découplage des degrés de liberté.

6.8 Etalonnage des photodiodes à quadrants avec la caméra CCD

Dans ce chapitre nous avons utilisé jusqu'à présent la caméra pour déterminer la position du banc. Nous allons maintenant étudier le système des photodiodes à quadrants qui offre une meilleure sensibilité.

Voyons tout d'abord l'étalonnage du système de positionnement fait avec les photodiodes à quadrants. Une méthode possible consiste à utiliser l'asservissement automatique fait avec la caméra CCD .

Dans ce cas, on déplace le banc d'une quantité connue, et on mesure les signaux de déplacement $\vec{x}_q = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ du faisceau sur les deux photodiodes. Dans le cas d'une sollicitation de la coordonnée Δx_0 par exemple, on a

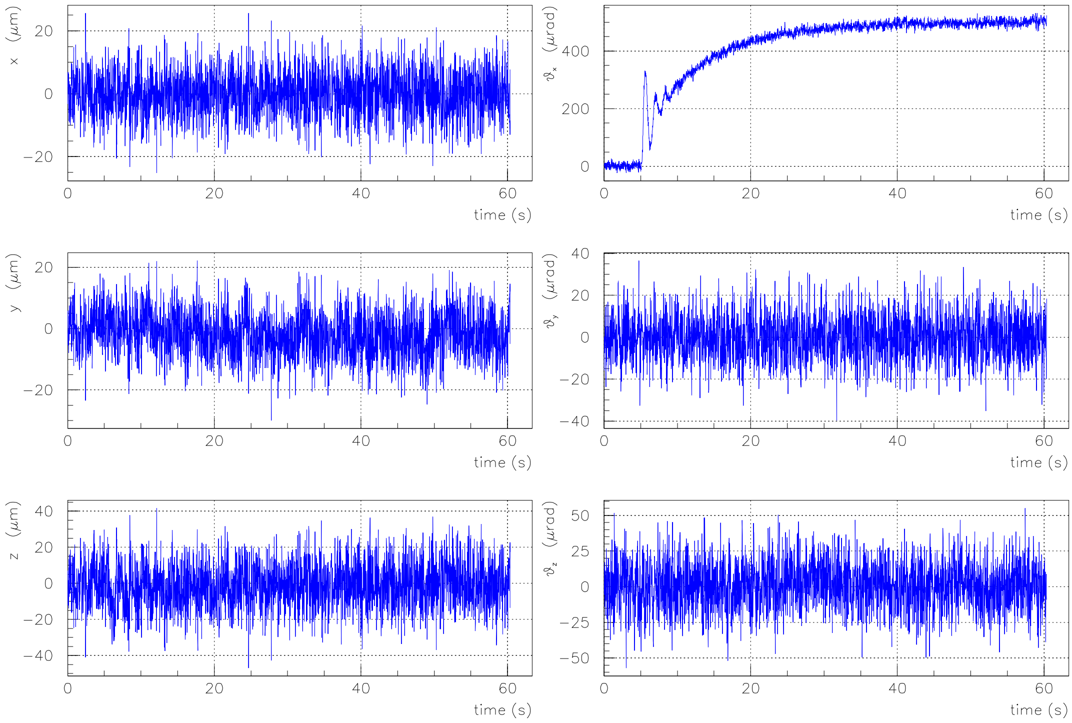

Figure 6.19: rotation du banc de détection autour de l'axe $O\theta_x$, faite avec le contrôle de la caméra CCD.

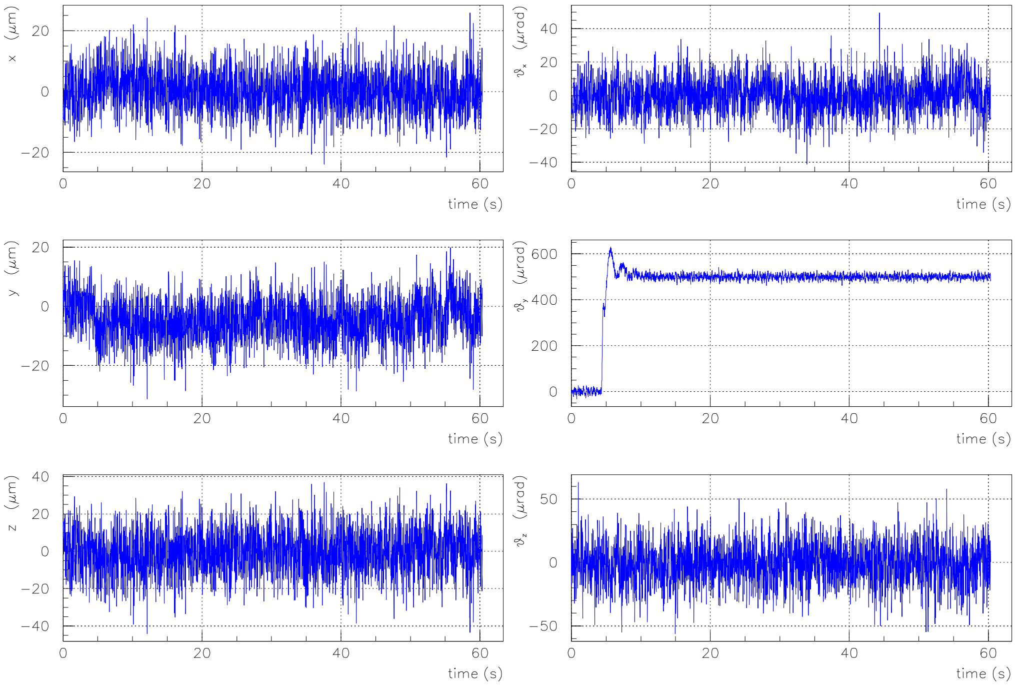

Figure 6.20: rotation du banc de détection autour de l'axe $O\theta_y$, faite avec le contrôle de la caméra CCD.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

où $\hat{S}$ est la matrice qui relie les signaux des photodiodes à quadrants aux rotations et aux déplacements du banc. A partir de l'expression précédente, on obtient

$$\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \\ s_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta x}. \tag{6.14}$$

En répétant cette procédure pour chaque degré de liberté, on détermine la matrice $\hat{S}$ dont l'inverse $\hat{T}$, appliquée aux signaux des photodiodes $\vec{x}_q$, donne enfin les quatre coordonnées cherchées.

La mesure de la matrice $\hat{S}$ peut être faite en excitant le banc avec une force constante (sollicitation DC) ou sinusoïdale (sollicitation AC). L'avantage de la sollicitation AC est d'éviter d'introduire des erreurs systématiques dues aux décalages en continu, difficiles à mesurer. En outre, avec une sollicitation DC, il est très difficile d'estimer si le système a oui ou non atteint un état stationnaire.

Dans notre cas, on ne peut pas utiliser la sollicitation AC pour les degrés de liberté qui présentent un couplage mécanique, si on veut étalonner le système et pas seulement faire l'asservissement. En effet la sollicitation sinusoïdale ne permettra pas au système de rejoindre un état stationnaire sur le degré couplé, et donc la matrice inverse $\hat{T}$ éliminera le couplage; on aura donc une erreur systématique. On est donc forcement obligé dans certains cas, d'utiliser la sollicitation DC.

Les mesures effectuées ont montré que le couplage entre les deux axes Ox et Oz est négligeable et donc à la place d'une matrice 4×4, on a pu utiliser deux matrices 2×2 $\hat{S}_x$ et $\hat{S}_y$. En outre, du fait que l'on a obtenu une réponse quasiment égale aux sollicitations homologues, on a décidé d'utiliser les mêmes mesures pour les deux matrices, c'est-à-dire

$$\left\langle \hat{S}_x \right\rangle_{exp} \simeq \begin{pmatrix} -1.1 & 9.5 \\ 1.3 & 16.1 \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

$$\left\langle \hat{S}_y \right\rangle_{exp} \simeq \begin{pmatrix} -1.1 & -9.5 \\ -1.3 & 16.1 \end{pmatrix}, \tag{6.16}$$

$\hat{S}_x$ et $\hat{S}_y$ diffèrent seulement pour des signes, dû au nombre différent des réflexions des faisceaux avant d'arriver sur les photodiodes à quadrants:

Pour comparer les matrices expérimentales à celles théoriques, il faut connaître les tailles w_1 et w_2 des faisceaux sur les photodiodes à quadrants. L'incertitude sur ces mesures faites en étudiant la propagation du faisceau secondaire hors de la tour, est très élevée.

$$\left\langle w^{(1)}\right\rangle_{exp} \sim 0.8 \text{ mm}, \qquad \left\langle w^{(2)}\right\rangle_{exp} \sim 0.1 \text{ mm}, \tag{6.17}$$

On utilisant la (4.63), on obtient enfin les matrices théoriques

$$\left\langle \hat{S}_x \right\rangle_{teor} = \begin{pmatrix} -0.51 & 8.8 \\ 0.51 & 16.8 \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

$$\left\langle \hat{S}_y \right\rangle_{teor} = \begin{pmatrix} -0.55 & -8.6 \\ -0.56 & 16.3 \end{pmatrix}, \tag{6.19}$$

L'accord entre les matrices théoriques et expérimentales est qualitatif. Les differences peuvent être expliquées par une erreur sur les tailles des faisceaux, par des erreurs systématiques sur les mesures et par des erreurs sur les estimations des distances entres les éléments optiques.

6.9 Contrôle du banc avec les photodiodes à quadrants

A la différence de l'asservissement fait avec la caméra CCD, qui atténue le bruit en position par rapport à un repère fixe, celui fait avec les photodiodes à quadrants est un asservissement global par rapport à la position du faisceau secondaire et qui donc devrait suivre le faisceau le mieux possible.

L'utilisation des photodiodes à quadrants, permet aussi d'améliorer la résolution qui n'est pas suffisante avec la caméra dans le cas des angles.

6.9.1 Les Correcteurs

Le correcteur $G_c(s)$ utilisé pour les quatre coordonnées asservies avec les photodiodes à quadrants, est

$$G_q(s) = A\frac{(s+z_0)^2}{s(s+p_0)^2(s+p_1)^2}, \qquad A \in \mathbb{R}, \tag{6.20}$$

alors que pour les deux autres coordonnées z et θ_z, asservies par la caméra CCD, le correcteur est

$$G_c(s) = A\frac{(s+z_0)^2}{s(s+p_0)^2}, \qquad A \in \mathbb{R}. \tag{6.21}$$

Dans le cas de la caméra on a rajouté un pôle par rapport au correcteur précédent (6.11), pour éliminer le bruit à “haute” fréquence introduite par la caméra. Dans le cas des photodiodes à quadrants, les deux pôles p_1 à la fréquence de 8.0 Hz ont été rajoutés pour limiter la bande d'asservissement et donc les éventuelles autres résonances à plus haute fréquence ne sont pas atténuées.

Ce choix a été fait pour des questions de simplicité et pour être considéré suffisant comme premier résultat[1].

6.9.2 Le bruit résiduel

La figure 6.21 montre le bruit résiduel pour les quatre degrés de liberté asservis par les signaux des photodiodes à quadrants. Les valeurs de bruit RMS obtenues pour les angles sont environ un ordre de grandeur plus petit que les spécifications requises et pour les translations environ 30 fois plus petites comme le montre la table suivante[37]:

Coordonnée	Valeur minimale requise $\delta_{spec.}$	Valeur obtenue $\delta_{mes.}$	Unité	$\delta_{spec.}/\delta_{mes.}$
x	106.0	3.5	μm	30
y	106.0	3.4	μm	31
θ_x	2.87	0.49	μrad	6
θ_y	2.87	0.40	μrad	7

La figure 6.22 montre les densités spectrales des quatre signaux d'erreur en boucle fermée. Le pic à 28.0 Hz est due à une fréquence de résonance de la chaîne

[1] Les problèmes de disponibilité de la tour au LAPP ainsi que des problèmes sur la mise au point du serveur du DSP nous ont obligé à réduire le temps dédié à l'étude plus détaillée de l'asservissement global.

mécanique qui est hors de la bande d'asservissement. Les autres pics présents dans les spectres sont dus aux harmoniques de la fréquence du secteur.

Le bruit résiduel en terme de densité spectrale à la fréquence de 100 Hz, est aussi beaucoup plus petit que celui requis pour trois des quatre degrés de liberté et au même ordre de grandeur pour le quatrième, comme reporté sur la table suivante:

Coordonnée	Valeur minimale requise $\delta_{spec.}$	Valeur obtenue $\delta_{mes.}$	Unité	$\delta_{spec.}/\delta_{mes.}$
x	0.84	0.045	μm/$\sqrt{\text{Hz}}$	18.7
y	0.84	0.047	μm/$\sqrt{\text{Hz}}$	17.9
θ_x	36	5	nrad/$\sqrt{\text{Hz}}$	7
θ_y	36	38	nrad/$\sqrt{\text{Hz}}$	.94

On peut conclure que le système d'asservissement global rentre dans les spécifications requises, sur le bruit résiduel admis sur la position du faisceau d'entrée du mode cleaner. Il est vrai aussi, qu'avec des correcteurs plus "intelligents" et sur un bande plus large, on peut améliorer facilement et amplement le système.

Dans le cas de VIRGO, la stabilité du faisceau sera sûrement plus elevée que celle du faisceau de test et donc, il faut probablement s'attendre à un bruit, en terme de densité spectrale, plus faible que celui mesuré.

Il faut noter aussi que, dans le cas de la suspension finale, on aura un bruit sûrement plus bas du fait de la présence supplémentaire des deux étages de filtrage mécanique.

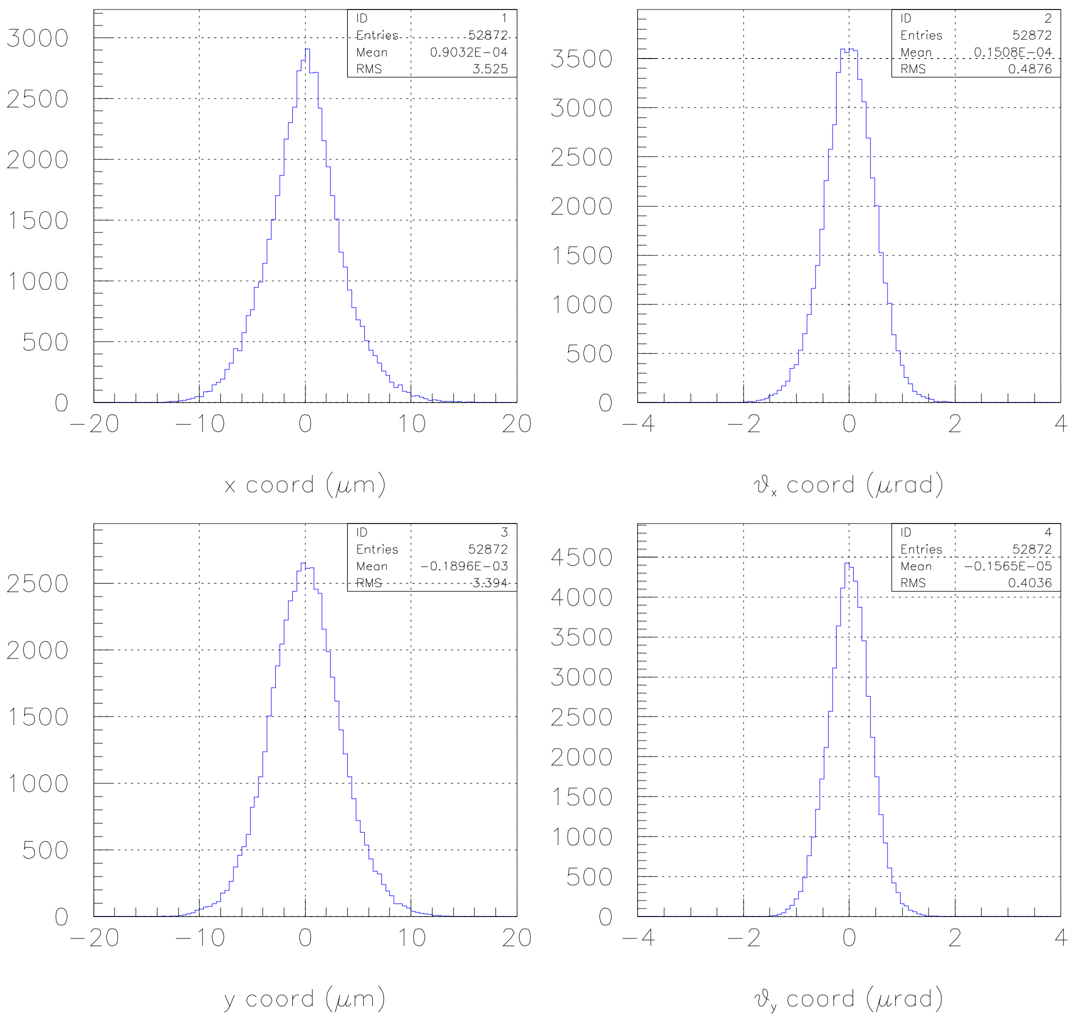

Figure 6.21: bruit résiduel en boucle fermée de l'asservissement avec les photodiodes à quadrants.

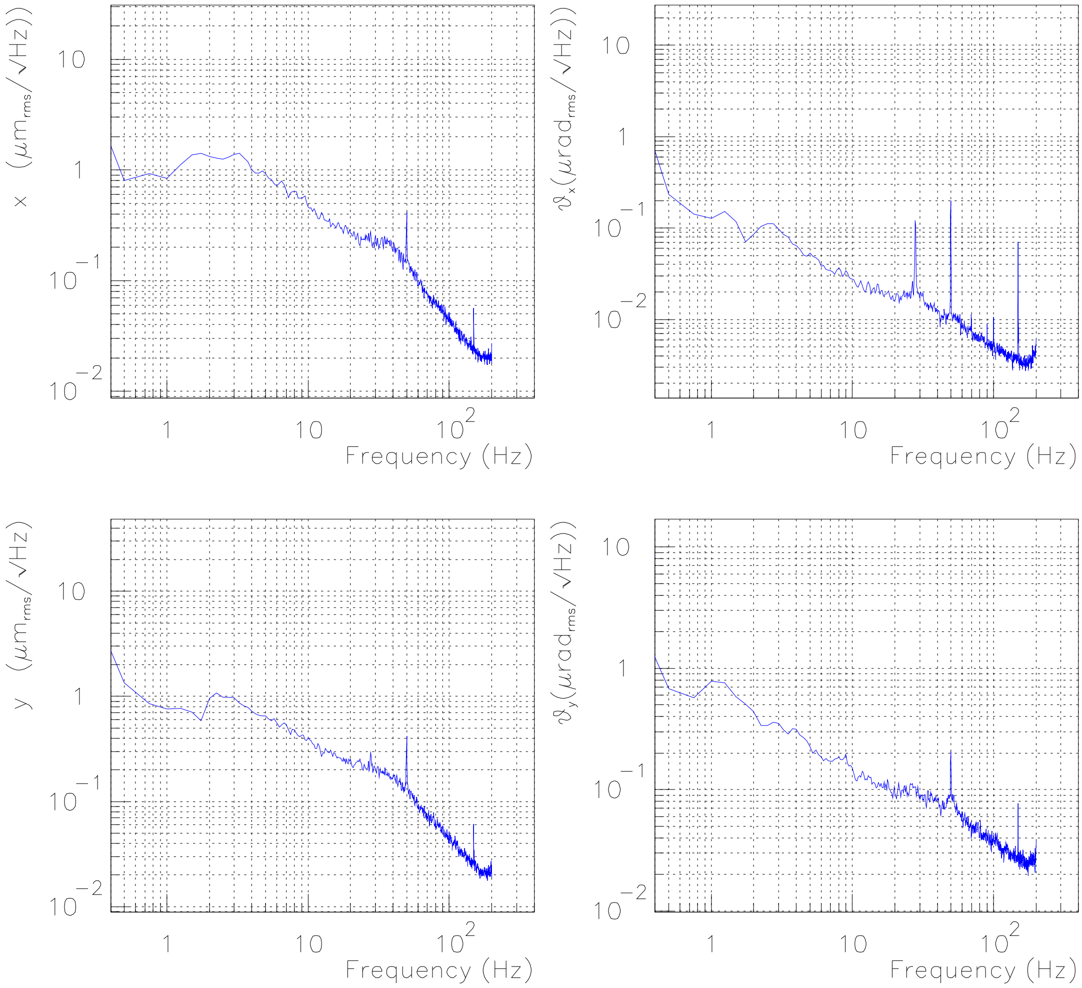

Figure 6.22: densités spectrales des signaux d'erreur en boucle fermée de l'asservissement avec le photodiodes à quadrants. La fréquence gain unité étant de l'ordre de 1 Hz, une bonne partie de ces spectres correspond aux mouvements libres du banc. En particulier, on peut voir en plus du bruit à 50 Hz, le pic de résonance mécanique à 28.0 Hz, hors de la bande d'asservissement.

Conclusions

Au cours de ce travail de thèse, les différentes phases de la réalisation du système de contrôle de la position du banc de détection de l'expérience VIRGO ont été abordées.

Tout d'abord les résultats obtenus avec le télescope ont montré que la séparation du faisceau de frange noire et du faisceau secondaire était celle prévue théoriquement. Après une période d'apprentissage et de mise au point d'outils, la mise en oeuvre de ce télescope et l'alignement manuel des différents composants du banc de détection a pu se faire sans problème.

La faisabilité du système de contrôle local des six degrés de liberté du banc de détection grâce à une seule caméra CCD a été démontrée. La facilité d'étalonnage et de configuration géométrique de ce système de mesure, sa flexibilité qui permet de calculer la position et l'orientation du banc grâce à un seul point de vue ont été appréciées. La sensibilité en position et en angle obtenue apparaît être suffisante pour l'alignement grossier du banc. Elle pourrait encore être améliorée grâce à une optimisation de la configuration géométrique du système et à une augmentation des points de mesure.

Le système global de position qui utilise des photodiodes à quadrants a lui aussi été mis en oeuvre de manière satisfaisante. Les mesures faites montrent qu'il est encore possible d'optimiser le correcteur afin d'élargir la bande de ce système et donc d'améliorer ses performances.

Pour effectuer les tests d'asservissement de position, une suspension simplifiée, mais utilisant de nombreux composants définitifs, a été assemblée. Le banc ainsi suspendu a pu être contrôlé par des bobines accrochées à des supports fixés au sol. Les tests effectués ont montré que le bruit résiduel, obtenu avec un asservissement non optimisé, est conforme aux spécifications requises, voire un ordre de grandeur plus satisfaisant dans le cas des déplacements. Ce système de positionnement a fait preuve d'une bonne robustesse, l'asservissement fonctionnant sans problème pendant les nombreuses heures de mesures. Il a ainsi été possible de maintenir suffisamment aligné le mode cleaner par rapport au faisceau de la frange noire pour faire fonctionner son système d'asservissement normalement.

L'ensemble du système de positionnement du banc de détection présenté dans ce mémoire sera installé sur le site au début de l'année 1999 avec la suspension définitive. Il contribuera alors au fonctionnement de l'interféromètre VIRGO dont le démarrage se fera graduellement entre 1999 et 2002.

Annexe A

Le Faisceau Laser

Dans l'approximation d'onde paraxiale et scalaire [8], l'amplitude transverse d'un faisceau laser peut être écrite comme la superposition de l'ensemble complet des fonctions d'Hermite-Gauss $h_m(x,z)h_n(y,z)$, où $n, m \in \mathbb{N}$.

L'amplitude du faisceau de pulsation ω et longueur d'onde λ, qui se propage dans la direction $\hat{z}$, est donc

$$\Phi(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z)e^{i(\omega t - kz)}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{A.1}$$

où $\varphi(x,y,z)$ est la distribution transverse du champ

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{n,m} c_{m,n} h_m(x,z) h_n(y,z), \qquad c_{m,n} \in \mathbb{C}, \tag{A.2}$$

Dans un repère cartésien, la base d'Hermite-Gauss est de la forme

$$\begin{aligned} h_n(\zeta,z) \;=\; & \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2^n n! w(z)}} H_n\left(\frac{\zeta\sqrt{2}}{w(z)}\right) \times \\ & \exp\left\{-\zeta^2\left[\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)}\right] + i(n+\frac{1}{2})\eta(z)\right\}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\langle h_m(\zeta,z)|h_n(\zeta,z)\rangle = \delta_{mn}, \qquad n, m \in \mathbb{N}, \tag{A.4}$$

où les fonctions $w(z)$, $R(z)$, $\eta(z)$, $H(x)$, sont décrites ci-après.
Profil du faisceau gaussien

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}, \tag{A.5}$$

La constante w_0, appelée "waist" ou "spot-size", est la valeur minimale de $w(z)$ atteinte en $z = 0$ (fig. A.1), (en élevant au carré les deux membres de (A.5), on peut voir facilement que $w(z)$ est une hyperbole avec les axes à 45°).

Rayon de courbure du faisceau:

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right]. \tag{A.6}$$

Phase de Guoy:

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right). \tag{A.7}$$

Polynômes de Hermite:

$$\begin{aligned} H_0(\zeta) &= 1, \\ H_1(\zeta) &= 2\zeta, \\ H_2(\zeta) &= 4\zeta^2 - 2, \\ H_3(\zeta) &= 8\zeta^3 - 12. \\ H_n(\zeta) &= 2\zeta H_{n-1}(\zeta) - (n-1)H_{n-2}(\zeta) \end{aligned} \tag{A.8}$$

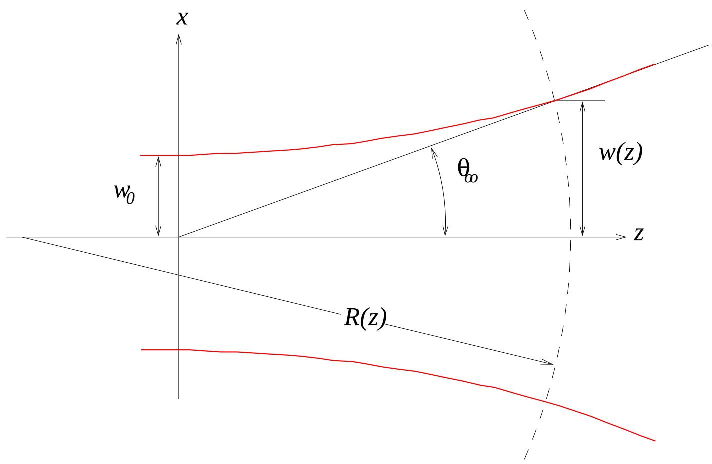

Figure A.1: Paramètres caractéristiques d'un faisceau gaussien.

On définit en outre la divergence angulaire du faisceau comme la limite

$$\theta_\infty = \lim_{z\to\infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0}, \tag{A.9}$$

qui représente l'angle entre le profil asymptotique du faisceau ($z = \infty$) (A.5) et la direction de propagation (asymptote de l'hyperbole $w(z)$).

Le produit $h_m(x,z)h_n(y,z)$ est enfin appelé **mode transverse** du faisceau et noté couramment comme TEM_{mn}.

Le cas le plus simple est celui où la somme (A.2) se réduit au seul premier terme TEM_{00}, appelé mode fondamental, c'est-à-dire

$$\varphi(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{w(z)}\exp\left\{i\eta(z) - (x^2+y^2)\left[\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)}\right]\right\}. \qquad \text{(A.10)}$$

L'amplitude transverse du champ est donc une courbe gaussienne bidimensionnelle des variances $\sigma = \frac{1}{2}w(z)$ égales dans les deux directions x et y et fonction de la position z

L'approximation d'un faisceau laser avec le seul TEM_{00}, est souvent valable et permet de calculer facilement la propagation du faisceau laser à travers des éléments optiques au moyen de l'approximation paraxiale.

Annexe B

La matrice $ABCD$

La propagation d'un rayon paraxial est caractérisée par sa distance r et son angle $\theta << 1$ (divergence) par rapport à l'axe optique.

Chaque système optique qui produit des changements sur r et θ peut être représenté convenablement par une matrice appelé $ABCD$ [14], qui appliquée au vecteur de composantes (r, θ), donne en sortie les nouvelles valeurs (r', θ') de la distance et de la divergence du rayon, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

L'avantage d'une description matricielle est que l'on peut calculer l'effet d'un système composé de plusieurs systèmes optiques en appliquant successivement les matrices qui décrivent chaque système.

La propagation d'un faisceau gaussien dans un milieu d'indice de réfraction n, est défini par le paramètre complexe suivant

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i\frac{\lambda}{\pi n w^2(z)}, \tag{B.2}$$

On peut reconstruire la forme du faisceau gaussien si on connaît sa taille $w(z)$ et son rayon de courbure $R(z)$ au point z [14].

La relation entre le paramètre q_1 à l'entrée d'un système défini par une matrice $ABCD$ et celle de sortie q_2, est [8]

$$q_2 = \frac{q_1 A + B}{q_1 C + D}. \tag{B.3}$$

Si on substitue

$$\frac{1}{q_1} = a + ib \tag{B.4}$$

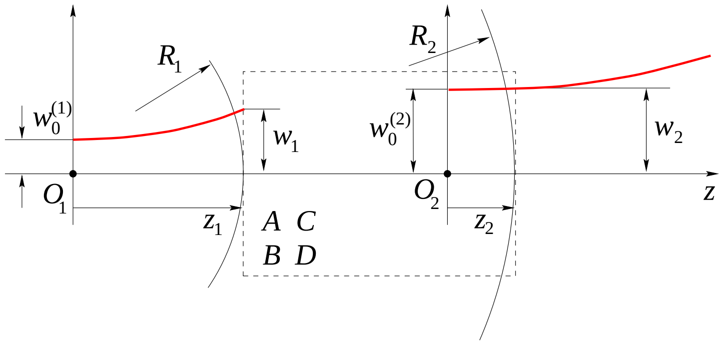

Figure B.1: Schéma d'un faisceau gaussien qui se propage dans un système défini par une matrice $ABCD$.

dans l'inverse de la relation (B.3), on obtient

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + D(a + ib)}{A + B(a + ib)}. \tag{B.5}$$

La partie imaginaire et la partie réelle seront donc

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{q_2}\right\} = \frac{(C + Da)(A + Ba) + b^2 BD}{\beta} \tag{B.6}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{q_2}\right\} = \frac{b}{\beta} \tag{B.7}$$

où

$$\beta = (A + Ba)^2 + (Bb)^2. \tag{B.8}$$

Grâce aux relations (B.2) et (B.4), la relation précédente devient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_2} &= \frac{\left\{AC + \frac{1}{R_1}(AD + BC)\left[\frac{1}{R_1} + \left(\frac{\lambda}{\pi n_1 w_1^2}\right)^2\right] BD\right\}}{\beta} \\
w_2 &= w_1\sqrt{\frac{n_1}{n_2}\beta} \\
\beta &= \left(A + B\frac{1}{R_1(z_1)}\right)^2 + \left(B\frac{\lambda}{\pi n_1 w_1^2(z_1)}\right)^2.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

relations qui donnent les paramètres nécessaires pour connaître l'évolution d'un faisceau gaussien qui se propage dans le système décrit par une matrice $ABCD$.

La position $z_0^{(2)}$ du "waist" du faisceau sortant du système et sa taille $w_0^{(2)}$, seront données par les formules suivantes [14]

$$z_0^{(2)} = \frac{R_2}{1 + \left(\dfrac{\lambda R_2}{\pi n_2 w_2^2} \right)^2} \tag{B.10}$$

$$w_0^{(2)} = \frac{w_2}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\pi n_2 w_2^2}{\lambda R_2} \right)^2}} \tag{B.11}$$

Si on a $n_1 = n_2$, et dans le cas d'un faisceau avec le waist placé à l'entrée du système et qui le focalise à sa sortie, on a

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0, \tag{B.12}$$

qui substitué dans la (B.9), donne

$$w^{(2)} = |A|\, w_0^{(1)} \sqrt{1 - \frac{BC}{AD}}, \tag{B.13}$$

Annexe C

Le filtrage numérique

Une des techniques pour réaliser des filtres numériques est celle de profiter de la théorie du filtrage analogique. Il faut donc trouver une méthode pour traduire la réponse d'un système donné par la transformée de Laplace, en terme de séquence temporelle des échantillons du signal à filtrer.

Représentation discret d'un filtre

La représentation d'un système discret, linéaire, causale et invariant par translation [15], donc un filtre numérique, est en général de la forme

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \qquad c_k, d_k \in \mathbb{C}. \tag{C.1}$$

où $x(n) = x_a(nT)$, $y(n) = y_a(nT)$ et T la période d'échantillonnage. Pour clarifier la signification physique de la relation (C.1), on peut la récrire de la façon suivante

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x(n-k), \tag{C.2}$$

et donc la réponse du système dépendra des $N-1$ états précédents de la sortie $y(k)$ et des M états de l'entrée $x(k)$.

La transformation pour un système discret, qui joue le même rôle que la transformée de Laplace $\mathfrak{L}$ pour un système continue [15], est la transformation

$$\mathfrak{Z}\left[x(n)\right] = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-1}, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{C.3}$$

qui associe à une séquence discrete une série des puissances dans l'espace continu complexe. Les propriétés de la transformée en $\mathfrak{Z}$ les plus intéressantes sont:

$$\mathfrak{Z}\left[\alpha x(n)+\beta y(n)\right]=\alpha\mathfrak{Z}\left[x(n)\right]+\beta\mathfrak{Z}\left[y(n)\right] \qquad \text{(linéarité)} \tag{C.4}$$

$$\mathfrak{Z}\left[x(n-k)\right]=z^{-k}\mathfrak{Z}\left[x(n)\right] \qquad \text{(translation temporelle)} \tag{C.5}$$

$$\mathfrak{Z}\left[\sum_{k=0}^{N}x(k)y(n-k)\right]=\mathfrak{Z}\left[x(n)\right]\,\mathfrak{Z}\left[x(n)\right] \qquad \text{(convolution)} \tag{C.6}$$

Si on applique la transformée en $\mathfrak{Z}$ à (C.1), on obtient

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}=X(z)\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k} \tag{C.7}$$

et donc on a

$$H(Z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}, \tag{C.8}$$

où $H(z)$ est la réponse du système dans le plan z.

Le résultat pour les systèmes discrets est donc analogue à celui de la transformée de Laplace pour les systèmes analogiques. La réponse en fréquence $\Omega/2\pi$ du système est donnée pour $z=e^{-j\Omega}$, qui correspond à la réponse $H(z)$ calculée sur le cercle de rayon unité.

Transformée de Laplace d'un système linéaire d'ordre N

La forme différentielle d'un système d'ordre N (et donc d'un filtre) dans le domaine temporel est

$$\sum_{k=0}^{N}c_k\frac{d^k y_a(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}d_k\frac{d^k x_a(t)}{dt^k}, \qquad c_k,d_k\in\mathbb{C}. \tag{C.9}$$

où $x_a(t)$ et $y_a(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système.

La transformée de Laplace de la formule précédente donne

$$\sum_{k=0}^{N}c_k y_a(s)s^k=\sum_{k=0}^{N}c_k x_a(s)s^k, \tag{C.10}$$

et donc la fonction de transfert du système est

$$H_a(s) = \frac{y_a(s)}{x_a(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} c_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} c_k s^k}. \tag{C.11}$$

Il faut donc trouver une transformation convenable pour mapper s in z pour représenter la (C.11).

Transformation bilinéaire

Soit $y_a(t)$ une fonction analogique quelconque échantillonnée avec une périodicité T et n le numéro d'échantillon. L'approximation de la fonction $y_a(t)$ au temps $t = nT$ peut être écrite comme la moyenne des deux valeurs

$$y_a(nT) \simeq \frac{y(n) + y(n-1)}{2}, \tag{C.12}$$

où $y(n)$ est la valeur échantillonnée de $y_a(t)$ au temps $t = nT$. La dérivée de $y_a(t)$ est alors

$$\dot{y}_a(nT) \simeq \frac{y(n) - y(n-1)}{T}. \tag{C.13}$$

En faisant le rapport de la transformée en $\mathfrak{Z}$, on obtient

$$\frac{\mathfrak{Z}\left[\dfrac{y(n) + y(n-1)}{2}\right]}{\mathfrak{Z}\left[\dfrac{y(n) - y(n-1)}{T}\right]} = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \tag{C.14}$$

Si on procède de la même façon pour la transformée de Laplace $\mathfrak{L}$ on obtient

$$\frac{\mathfrak{L}\left[\dot{y}_a(t)\right]}{\mathfrak{L}\left[y_a(t)\right]} = s\,. \tag{C.15}$$

En imposant la condition

$$\frac{\mathfrak{L}\left[\dot{y}_a(t)\right]}{\mathfrak{L}\left[y_a(t)\right]} = \frac{\mathfrak{Z}\left[\dfrac{y(n) + y(n-1)}{2}\right]}{\mathfrak{Z}\left[\dfrac{y(n) - y(n-1)}{T}\right]}, \tag{C.16}$$

on obtient donc la transformation linéaire

$$s \to \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \tag{C.17}$$

dont l'inverse est

$$z^{-1} \to \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}. \tag{C.18}$$

L'avantage de ce type de transformation est essentiellement de transformer les filtres analogiques stables en filtres numériques stables et d'éviter les problèmes de repliement du spectre discret [15].

Passage à un système discret

Si on a l'expression de la réponse en fréquence d'un filtre analogique, on peut calculer la réponse d'un système discret avec la transformation bilinéaire précédemment introduite, on utilis la relation (C.17). La propriété (C.5) permet d'écrire la forme recoursive (C.2) de la réponse discrète, qui peut être facilement mise en oeuvre numériquement.

Annexe D

L'électronique des photodiodes à quadrants

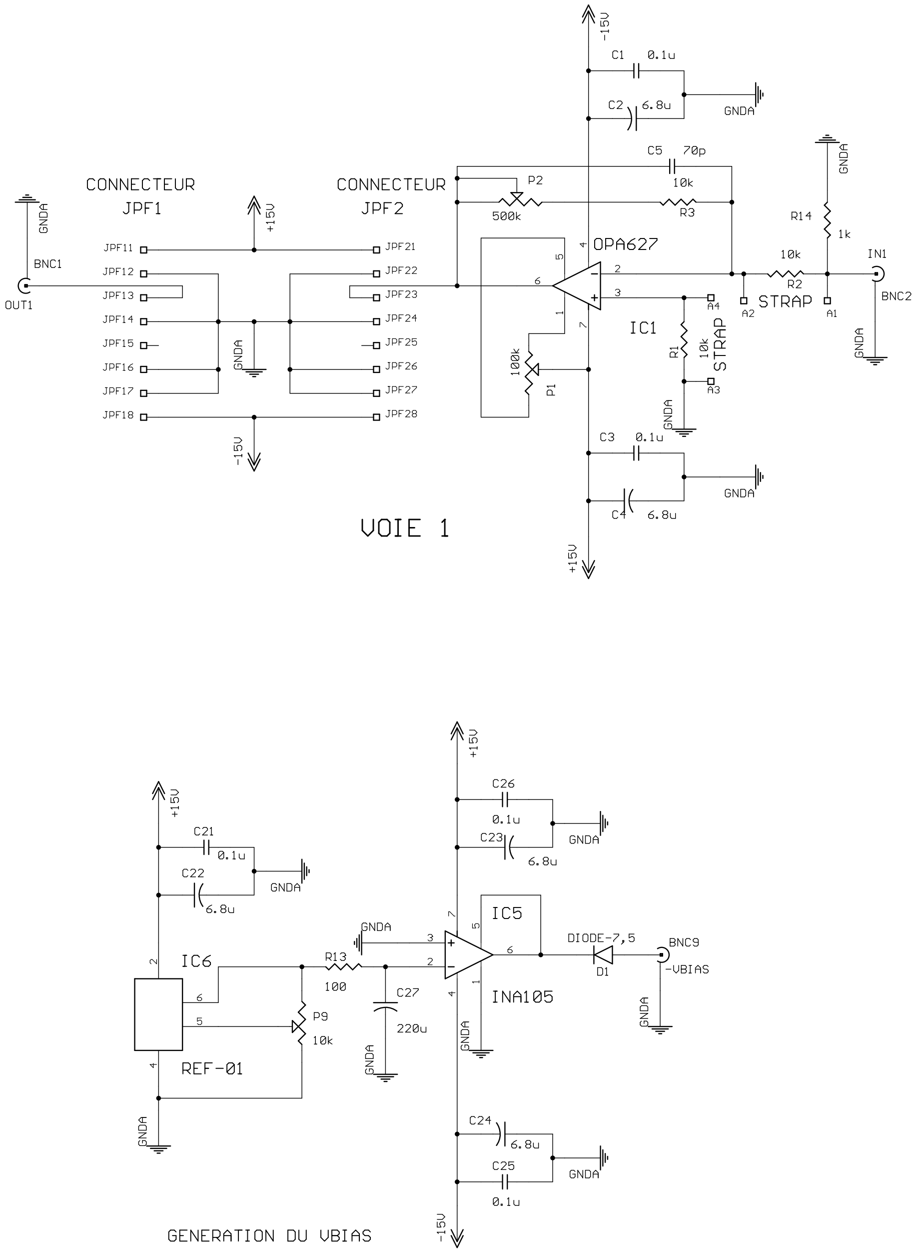

Figure D.1: Schéma du circuit de polarisation de la photodiode et de pilotage d'un quadrant.

Bibliographie

[1] L. D. Landau - E.M. Lifsits, **Teoria dei Campi**, Editori Riuniti (1976).

[2] Guido Pizzella, **Fisica Sperimentale del Campo Gravitazionale**, NIS (1993).

[3] K.S. Thorne, **"Gravitational Radiation" in 300 Years of Gravitation**, Cambridge University Press, Cambridge (1987).

[4] David G. Blair, **The detection of Gravitational Waves**, Cambridge University Press (1991).

[5] Peter R. Saulson, **Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors**, World Scientific (1994).

[6] M.Born & E.Wolf, **Principles of Optics, Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, sixth Edition**, *Pergamon Press* (1980).

[7] J. D. Jackson, **Classical Electrodynamics, Second Edition**, John Wiley & Sons (1962).

[8] A.Yariv e P.Yeh, **Optical Waves in Cristals, Propagation and Control of Laser Radiation**, Wiley-InterScience (1984).

[9] E. Hecht **Optics, Second Edition**, *Addison-Wesley* (1987).

[10] Rodney Loudon, **Quantum Theory of Light**, Oxford University Press.

[11] A. Giazotto, **Interferometric Detection of Gravitational Waves**, *Physics Reports, Rev. Sec. of Physics Letters.* <u>182</u> (1989),6.

[12] J. W. Cornelisse, **Lisa mission and system design**, *Classic Quantum Gravitation* 13 (1966).

[13] Proposal to the National Science Foundation, **A Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory(LIGO)**, (December 1966).

[14] H. Kogelnik e T. Li, **Laser Beam and Resonators**, *Applied Optics* 23 (1966),3.

[15] A. V. Oppenheim e R. W. Schaffer, **Digital Signal Processing**, *Prentice-Hall International* (1975).

[16] CERN, **Minuit Function Minimization and Error Analysis version 94.1**, *CERN Program Library Long Writeup D506* (1994).

[17] EEV Imaging , Sensing and Display Division, **Super Photon CCD Camera CAM17-16/X219 User Guide**, *EEV Limited, 106 WaterHouse Lane Chelmsford Essex, England* (Sep 1997).

[18] C. Drezen, **Utilisation des caméras CCD pour le contrôle du detecteur d'ondes gravitationnelles VIRGO: Elaboration d'une interface VME et analyse d'images**, *Thèse de doctorat en Physique au LAPP* (1997).

[19] A. Dominjon, **Recherche des ondes gravitationnelles avec l'interféromètre VIRGO: étude et conception de l'ensemble de détection du signal**, *Thèse de doctorat en Physique au LAPP* (1996).

[20] V. Sannible, **Studio di un Prototipo di un Interferometro Michelson per la Rivelazione di Onde Gravitazionali**, *Thèse en Physique à l'Université de Rome "La Sapienza"* (1994-95).

[21] EG&G Reticon, **RA1200J Full Frame CCD Imager**, *345 Potrero Avenue Sunnyvale, California* 94086-4197.

[22] DBV986 VME floaing Point DSP Users Guide issue 2.0, **Data Beta Limites**, *7 Chiltern Enterprise Centre, Station Road Theale, Berks, England RG7 4AA*.

[23] Lynx-Os, **LynxOS Application Writer's Guide**, *Lynx Real-Time Systms Inc. 16780 Lark Avenue, Los Gatos California* .

[24] D. Babusci, H. Fang G. Giordano, G. Matone and V. Sannibale, **Status of the Linear Alignment Control**, *INFN LNF-Note 94/027(IR)* (1994) *and Virgo Note PJT-17*(1994)

[25] D. Babusci, H. Fang G. Giordano, G. Matone, L. Matone and V. Sannibale, **Alignment Procedure for the VIRGO Interferometer, Experimental Results from the Frascati Prototype** *Physics Letters* A 226 (1997)

[26] L. Derome, **New Mode Cleaner Support test**, *Virgo Note, Draft* (1997)

[27] Taylor J.H., Wiesberg, *Astrophysic Journal*, 345, 434 (1989)

[28] B.Caron, A.Dominjon, C.Drezen, R.Falminio, X. Grave, R. Hermel, F.Marion C.Mehmel, R. Morand, B. Mours, V. Sannibale and M. Yvert. **A Preliminary Study of the Locking of an Interferometer for Gravitational Wave Detection** *Astroparticle Physics 6 (1997)*

[29] R.W.P. Drever, J.L. Hall, F.V. Kowalski, J. Hough, G.M. Ford, A.J. Munley e H. Ward, **Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator**, *Applied Physics* B31 (1931),97.

[30] I.S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik **Table of Integrals, Series, and Products Fifth Edition**, Alan Jeffrey Editor.

[31] Burleigh **The PiezoBook**, pubblicazione Burleigh (1993).

[32] C.N. Man, **Definition of the VIRGO Interferometer Mirrors**, *Virgo Note* PJT-24(1994).

[33] D. Fattaccioli, A. Boulharts, A. Brillet, C. N. Man, **Sensitivity of multipass and Fabry-Perot delay lines to small misalignments**, *J. Optics (Paris)*, vol. 17 n. 3, (1986).

[34] J-Y.Vinet, B. Meers, Brillet and C. N. Man, **Optimization of long-baseline optical interferometers of gravitational-wave detection**, *Physical Review D*, vol. 38 n. 2, (1988).

[35] **Suspension System** *Virgo Final design Report* , S/Sy 4600, (1997).

[36] **Pumping system function and concept** *Virgo Final design Report* , S/Sy 3400, (1997).

[37] V. Sannibale **The VIRGO-1998 Detection Bench Position Sensor (First Step)**, *Virgo Note*, VIR-NOT-LAP-1930 (1996).

[38] D. Babusci, H. Fang, G. Giordano, G.Matone, L. Matone and V. Sannibale, **Alignment of the Virgo Interferometer**, *Virgo F.D.* item 4400 version 0. June 1995.

[39] J.-Y. Vinet, V. Brisson, S. Braccini. **Scattered Light Noise in Gravitational Wave Interferometric Detectors: Coherent Effects**, *Virgo Note* NTS96-005 (1996) and *Physical Review D* preprint 54,2 (1966)

Liste des Figures