ORSAY
N° d'ordre : 4797

LAPP-T 97/03
avril 97

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : Physique Théorique

par

Xavier GRAVE

SUJET :

Etude de méthodes pour la recherche, avec le détecteur VIRGO, d'ondes gravitationnelles émises par des étoiles à neutrons

Soutenue le 28 avril 1997 devant la Commission d'examen

MM.	Carlo BRADASCHIA	
	Michel DAVIER	**président**
	Eric GOURGOULHON	
	François LEDIBERDER	**rapporteur**
	Benoît MOURS	**directeur de thèse**
	Robert ZITOUN	**rapporteur**

Remerciements :

Tout d'abord je voudrais remercier Carlo BRADASCHIA, Michel DAVIER, Eric GOURGOULHON, François LEDIBERDER et Robert ZITOUN d'avoir accepté d'être membres de mon jury de thèse et particulièrement les deux rapporteurs auprès de l'université de PARIS XI, François LEDIBERDER et Robert ZITOUN.

Merci aussi à Denis LINGLIN et Michel YVERT de m'avoir accueilli au LAPP au sein du groupe VIRGO.

Je tiens à remercier Benoît MOURS pour la qualité de son encadrement tout au long de ma thèse ainsi que pour l'intéressant travail physique que nous avons pu mener de concert.

Merci à Vincent LAFAGE pour les discussions de physique qu'il a supportées et qui m'ont aidé à clarifier mes idées sur les divers sujets que j'ai traités dans ma thèse.

Merci encore à Vincent et Nathalie pour leurs lectures des premières versions de ma thèse.

Merci aussi aux membres du groupes VIRGO du LAPP, en particulier Frédérique MARION, pour les discussions et conseils techniques qu'ils m'ont apportés.

Merci à René MORAND pour les superbes ballades en montagne qu'il organise régulièrement.

Merci aux services techniques du LAPP pour leur soutien logistique plein d'humour et d'efficacité.

Enfin merci à tous ceux qui m'ont régulièrement apporté leur soutien au cours de ma thèse (*Arnaud, Christine, Elsa, Fabrice, Franck, Frédéric, Guillaume, Laurence, Manu, Nathalie, Nicolas, Serge ...*).

Lorsque l'on prendra conscience que renier l'animalité des pulsions au lieu de l'affiner n'aboutit pas à l'Humanité mais à une bestialité à visage humain…

Table des matières

Résumé :

Le but de l'expérience VIRGO est la détection des ondes gravitationnelles. L'objet de cette thèse est l'étude de méthodes pour la recherche de signaux émis par des étoiles à neutrons ainsi que l'étalonnage du détecteur.

Dans une première partie, l'étoile à neutrons et son émission d'ondes gravitationnelles, sont présentées. Ensuite le détecteur, les principales sources de bruits, ainsi que la solution adoptée pour l'étalonnage sont décrits.

Puis dans une seconde partie la modélisation des effets dus aux mouvements de la terre (*effet* DOPPLER, *modulation d'amplitude*) est décrite. Leurs conséquences sur le rapport signal sur bruit sont déterminées.

Les deux derniers chapitres sont consacrés aux algorithmes de recherche de signaux périodiques. Tout d'abord le cas où la position de la source est connue est présenté. Le ralentissement de la rotation de la source et la correction de cet effet sont décrits. La correction de l'effet DOPPLER est aussi détaillée. De même, le problème de la gestion du gigantesque flot de données à traiter est abordé, et une solution y est apportée. Finalement la difficulté de recherche multidirectionnelle est présentée. Des prototypes d'algorithmes hiérarchiques sont aussi évalués.

Mots-clé :

Etoiles à neutrons
Ondes gravitationnelles
VIRGO
Recherche aveugle
Traitement du signal
Transformée de FOURIER
Algorithmes hiérarchiques

Abstract :

The goal of the VIRGO experiment is the detection of gravitationals waves. This thesis focuses on the study of methods for the search of signal emitted by neutron stars and on the calibration of the detector.

In a first part, the neutron star, it gravitational wave emission are presented. Then the detector as well as the main noises sources and the calibration are described.

Then in a second part, the modelisation of the detector movements' effects (DOPPLER *effect, amplitude modulation*) is described. The consequences on the signal to noise ration are also computed.

The two last chapter focus on the algorithms for the search of periodic sources. First, the case where the position of the source is known is presented. The spinning down of the source and the correction of this effect are described. The correction of the DOPPLER effect is also detailed. As well, the problem of the big amount of data to handle is also evaluated, a solution to it is also given. Finally, the difficulties of the blind search of periodic sources is explained. Some prototypes of hierarchical algorithms are also evaluated.

Key-words :
Neutron star
Gravitational waves
VIRGO
Blind search
Signal processing
FOURIER TRANSFORM
Hierarchycal algorithms

Introduction

LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE D'EINSTEIN est, avec le modèle standard, un des deux piliers de la physique moderne. Ces deux théories se partagent la description des forces fondamentales. La plupart des phénomènes gravitationnels observés sont macroscopiques et de très faible amplitude à l'échelle atomique, contrairement aux forces du modèle standard (*le rapport force électromagnétique sur force gravitationnelle au sein de l'atome d'hydrogène est* $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e m_p} = 2,27 \times 10^{39}$). Un certain nombre de prédictions de la relativité générale ont été vérifiées assez rapidement (*avancée du périhélie de Mercure, déviation des rayons lumineux par le Soleil*). On attend maintenant la confirmation par la détection d'une autre prédiction : l'onde gravitationnelle. Elle se traduit par une déformation infime de l'espace-temps, c'est-à-dire une modification des distances relatives au cours du temps.

Il est pour l'instant impossible de créer, sur terre, des ondes gravitationnelles d'une amplitude suffisante pour être détectées en laboratoire. L'existence de telles ondes a été démontrée indirectement par HULSE et TAYLOR, prix NOBEL 1994, lors de l'étude d'un système de deux étoiles à neutrons [1]. Le cosmos est le seul endroit où, actuellement il y a suffisamment d'énergie pour produire des ondes gravitationnelles que l'on puisse détecter.

L'expérience VIRGO a pour but de détecter de manière directe de telles ondes. Elle recherche dans son domaine de fréquences toutes les ondes gravitationnelles venant de l'espace et donc plus particulièrement les ondes émises par :

- la coalescence d'un système binaire d'objets massifs et compacts (*étoiles à neutrons, trous noirs*)
- l'explosion d'une Super Nova (*mort d'une étoile*)
- l'émission périodique par une étoile à neutrons

Cette thèse est consacrée à l'étude des méthodes de recherche de ce troisième type de sources.

Pour ce faire, les ondes gravitationnelles sont d'abord introduites dans le premier chapitre. Ceci permet de mieux comprendre le principe du détecteur VIRGO. Puis les étoiles à neutrons sont présentées du point de vue de leur émission d'ondes gravitationnelles ainsi que du point de vue d'une partie de leur population : les pulsars (*étoiles à neutrons émettant des ondes électromagnétiques*). L'amplitude faible de leur émission justifie un temps d'intégration long, ce qui sera à la base de nombreux problèmes, dont la sensibilité aux faibles variations de fréquences et la quantité importante de données à traiter.

Le détecteur VIRGO est ensuite présenté dans le chapitre 2. C'est un interféromètre qui permet de mesurer les variations de distance entre quatre masses libres. Pour maximiser les chances d'observer un signal, l'expérience VIRGO tente d'atténuer toutes les sources potentielles de bruit. La bande de fréquences accessibles pour la recherche d'ondes gravitationnelles s'étend de quelques hertz à quelques kilohertz. La limite inférieure de cette bande de fréquences est déterminée par le système d'atténuation du bruit sismique, système particulièrement ambitieux qui permet à VIRGO d'envisager des recherches de signaux à basses fréquences. La limite supérieure de la bande de fréquences est donnée par le filtrage de cavités FABRY-PÉROT.

Un point crucial de la mesure des ondes gravitationnelles, l'étalonnage du détecteur, est exposé dans le chapitre suivant. Il s'agit d'établir la relation quantitative entre le signal d'ondes gravitationnelles et le signal mesuré. Ceci peut se faire en analysant de manière détaillée le fonctionnement de l'interféromètre et en combinant notre connaissance des différents composants (*efficacité des photodiodes, gain des convertisseurs analogique-numérique, fonction de transfert de l'interféromètre,...*). Cependant, pour minimiser le risque d'erreurs, on va chercher une ou des méthodes indépendantes et les plus directes possibles afin de pouvoir établir directement cette relation et ainsi vérifier ces calculs. Le signal que l'on veut observer correspond à une variation de longueur des bras de l'interféromètre. Pour étalonner le détecteur, il faut donc déplacer les miroirs. Reste à savoir comment. Parmi les nombreuses solutions possibles, deux solutions ont été retenues pour VIRGO :

- l'addition d'un signal supplémentaire sur les bobines de contrôle du système d'asservissement des miroirs
- une force exercée par la pression de radiation d'un laser additionnel

Seule la mise en œuvre de la deuxième méthode est détaillée dans cette thèse.

De plus, pour résoudre bon nombre de problèmes, il est nécessaire de simuler le détecteur. Cela se révèle primordial, tant au niveau du choix des stratégies possibles pour le verrouillage de l'interféromètre qu'au niveau des études des méthodes d'analyse de données. Une simulation complète de VIRGO, appelée SIESTA*, répond à ce besoin. Le chapitre 4 expose les éléments de simulation que cette thèse a introduit dans SIESTA. Cette simulation, qui fonctionne dans le domaine temporel, est organisée en plusieurs modules modélisant les différentes parties de VIRGO ainsi que certains signaux d'ondes gravitationnelles. L'ensemble des bruits peut donc être simulé.

*pour Simulation of Interferometric Experiment Sensitive To grAvitational waves

Le mouvement du détecteur par rapport à une source provoque des modifications variables de sa fréquence (*effet* DOPPLER) et de son amplitude. Dans le cas d'une source monochromatique, le signal détecté n'est plus périodique si ce mouvement n'est pas rectiligne et uniforme. Il est alors dilué dans une bande de fréquences ce qui provoque une diminution du rapport signal sur bruit. On étudie, dans le chapitre 5, les pertes entraînées par les variations de l'effet DOPPLER ainsi que celles qu'entraînent les variations de l'orientation du détecteur.

On peut rechercher plusieurs types de sources périodiques. Les seules dont on connaisse la position sont les pulsars que l'on a détectés par l'intermédiaire de leurs ondes électromagnétiques. Le chapitre 6 est consacré à l'étude de plusieurs méthodes pour détecter les pulsars connus. L'intérêt de réduire la quantité de données à utiliser dans les recherches de signaux périodiques est discuté ainsi que la correction de l'effet DOPPLER. La connaissance de la source fait penser à la détection synchrone, qui est *a priori* la méthode la plus simple. Il manque tout de même des informations sur ces sources connues et cela complique cette méthode au point de la rendre moins attrayante. Deux autres méthodes différentes de recherche de la détection synchrone (*méthode avec ajustement et méthode dite «simple»*) sont finalement comparées.

La proportion de pulsars qui émettent dans notre direction est estimée à 10% de la population totale des pulsars. Les ondes gravitationnelles émises par une étoile à neutrons étant beaucoup moins directionnelles, on peut espérer que la quasi totalité des étoiles à neutrons émettent des ondes gravitationnelles, probablement très faibles, dans notre direction. C'est pourquoi une recherche en aveugle, c'est-à-dire en supposant connue la direction d'une hypothétique source, nous permettra peut être de trouver des sources non vues électromagnétiquement et pourtant plus proche de nous que les sources connues. Cette recherche présente plusieurs problèmes dont le principale est que la correction de l'effet DOPPLER n'est valable que pour une zone limité dans le ciel. Le principe de base de la recherche d'étoiles à neutrons inconnues est donc de découper le ciel en petites cellules dont la taille est dictée par l'effet DOPPLER. Ce nombre de recherches est encore à multiplier par le nombre de corrections du ralentissement potentiel de la source. Pour chacune de ces cellules nous recherchons un candidat dans la bande de fréquences qui nous intéresse. Nous évaluons donc le nombre total de cellules de recherches nécessaires. Ce nombre est plus que contraignant pour des temps d'intégration de l'ordre de l'année. On ne peut effectuer de recherche aveugle simple pour ces temps d'intégration. On propose donc deux algorithmes de recherche et on estime leur efficacité. Ils sont tous deux basés sur la découpe de l'ensemble des données pour un an en plus petits lots de données qui sont moins sensibles aux effets de ralentissement et à l'effet DOPPLER et donc pour lesquels le nombre de cellules dans l'espace des paramètres est inférieur. Tout d'abord dans le cas de l'algorithme des moyennes, on recombine les transformées de FOURIER sur les lots en les moyennant ce qui permet de regagner une partie du rapport signal sur bruit perdu par le temps d'intégration plus faible. Enfin l'algorithme des poursuites, inspiré du fonctionnement des chambres à fils, recombine les transformées de

Fourier en recherchant la présence du signal d'une transformée à l'autre (*comme une trace au travers des divers plans d'une chambre à fils*).

Chapitre 1

Partie Théorique

1.1 Introduction

DANS CE CHAPITRE nous allons tout d'abord introduire la relativité générale et les ondes gravitationnelles [2] qui en découlent. Ceci nous permettra plus loin de mieux comprendre le principe du détecteur Virgo. Puis nous présenterons le type de sources qui nous intéressent ici plus particulièrement, et que nous recherchons : les étoiles à neutrons. Enfin nous en décrirons la population actuellement connue et nous estimerons leur population actuelle dans la Galaxie.

1.2 Ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles sont une conséquence de la relativité générale d'Einstein. Suivons le développement de cette théorie pour voir comment elle débouche sur ce phénomène.

1.2.1 Relativité restreinte

Le principe de relativité suppose que les lois régissant un phénomène aient la même forme dans deux repères inertiels S et S'. La vitesse de propagation de la lumière dans un milieu ne dépend que de celui-ci. Or selon une transformation de Galilée, on doit additionner les vitesses. La vitesse de propagation doit donc changer selon cette transformation. On doit donc abandonner soit le principe de relativité, soit la transformation de Galilée. Des mesures de c, la vitesse de la lumière dans le vide, faites par Michelson et Morley en 1887 [3], ont montré son invariance par changement de repère; c'est donc la transformation de Galilée qu'il faut abandonner, ce que personne n'osa faire avant 1905 : Einstein paria alors sur le principe de relativité. Il postula que dans tous les repères inertiels, les équations de Max-

WELL gardent la même forme et qu'il fallait donc changer la loi de transformation. Les transformations de GALILÉE préservent l'élément de longueur de l'espace euclidien ; les rejeter implique l'abandon de la représentation de l'espace physique par un espace euclidien de dimension 3. EINSTEIN proposa donc une nouvelle géométrie où «l'espace en lui-même, le temps en lui-même, sont condamnés à s'évanouir tels de simples ombres, et [où] seule une sorte d'union des deux préserve une réalité indépendante» (MINKOWSKI).

On a donc un nouveau cadre géométrique de dimension 4 où l'on suppose un pseudo théorème de PYTHAGORE. Cette nouvelle représentation ne remet pas en cause l'existence d'un repère inertiel absolu, qui est encore plus un «fantôme» en relativité restreinte qu'en théorie newtonienne, car en vertu du principe de relativité, aucun phénomène mécanique ou électromagnétique n'est censé permettre sa détection à mieux d'une translation uniforme près.

L'espace-temps de Minkowski

Dans cet espace temps, on remplace l'élément de longueur infinitésimal $dl^2 = dx^2+dy^2+dz^2$ de l'espace euclidien de dimension 3 par $ds^2 = -c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$. Les transformations de coordonnées qui conservent cet élément forment le groupe de POINCARÉ qui est composé des translations, des rotations et des transformations spéciales de LORENTZ ainsi que de leur composition. Si v est la vitesse selon l'axe des x qui anime un repère S' par rapport à S, la transformation spéciale de LORENTZ, qui permet de passer des coordonnées de S à celles de S', donnera :

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Avec $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Pour simplifier la formulation des calculs, on utilise généralement la convention de sommation suivante :

$$ds^2 = \sum_{i,j=0}^{3} \eta_{ij}dx^i dx^j \quad = \quad \eta_{ij}dx^i dx^j = dx_j dx^j \tag{1.2}$$

Un même indice* se trouvant en haut et en bas donne une somme sur ce même indice, et la somme avec le tenseur métrique de MINKOWSKI(*équivalent de g_{ij} en relativité*

*Les indices romains tels i, j... vont de 0 à 3 et se réfèrent à l'espace-temps. Les indices grecs α, β... vont de 1 à 3 et se réfèrent à l'espace seulement *générale*), permet de descendre ou de monter un indice : $x_i = \eta_{ij} x^j$. Où :

$$\eta_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

La position de l'indice permet de différencier les vecteurs contravariants, indice en haut, des vecteurs covariants, indice en bas. Si l'on note $\Lambda^k{}_i$ la matrice de transformation de LORENTZ précédemment définie, les vecteurs contravariants se transforment suivant la loi suivante :

$$dx'^k = \Lambda^k{}_i dx^i \tag{1.4}$$

Et les vecteurs covariants :

$$dx'_k = \Lambda'^j{}_k dx_j \tag{1.5}$$

Où† $\Lambda'^j{}_k \equiv \Lambda_k^{\ j} \equiv \eta^{jl}\eta_{ki}\Lambda^i{}_l$ est la matrice de LORENTZ inverse ; $\Lambda^i{}_j \Lambda'^j{}_k = \delta^i_j$ (δ^i_j est le symbole de KRONECKER). Les valeurs conservées par ces transformations sont les normes de quadrivecteurs. On associe généralement :

- l'énergie d'une particule à sa quantité de mouvement $P^i = (\frac{E}{c}, \vec{p})$, $P_i = (-\frac{E}{c}, \vec{p})$
- le temps à la position $x^i = (ct, \vec{r})$, $x_i = (-ct, \vec{r})$

Le temps propre

Soient deux points, ou événements, séparés dans l'espace-temps par ds.

- Si $ds^2 > 0$, la distance qui les sépare est du genre espace, et il ne peut y avoir de relation de cause à effet d'un point à l'autre. Cela signifie que la distance qui sépare les deux événements $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ est supérieure à la distance que peut franchir la lumière pendant dt :

$$\begin{aligned} ds^2 &> 0 \\ -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 &> 0 \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 &> c^2dt \end{aligned} \tag{1.6}$$

- Si en revanche $ds^2 < 0$, alors ces deux points peuvent être liés causalement. De plus il existe un référentiel où ces deux événements ont lieu au même endroit. Dans un tel référentiel, on définit le temps propre comme $ds^2 = -c^2 d\tau^2$.
- Si $ds^2 = 0$, alors on est sur un cône de lumière. Les deux points ne sont joints que par des objets se déplaçant à la vitesse de la lumière.

†≡ signale une définition

Repères inertiels tangents

Un observateur placé dans un référentiel inertiel peut calculer le temps écoulé dans un repère non inertiel, grâce à la notion de repère inertiel tangent. En effet, si on considère un repère accéléré, pendant un temps très bref sa vitesse va coïncider avec celle d'un référentiel inertiel de même vitesse. À ce moment les lois de la physique doivent être les mêmes dans les deux repères. Les transformations de LORENTZ peuvent alors s'appliquer.

1.2.2 Relativité générale

Pour établir la relativité générale, EINSTEIN est parti de ce qui semblait une coïncidence en physique newtonienne : l'égalité des masses graves et inertes ; c'est le principe dit d'équivalence. Ce qui suit est une des nombreuses expériences de pensée d'EINSTEIN qui tend à illustrer le phénomène de déformation de l'espace temps (passage d'une métrique de type MINKOWSKI à une métrique généralisée). Cette expérience a été réalisée plus tard et a confirmé une fois de plus un raisonement d'EINSTEIN.

Illustration du principe d'équivalence

Dans un repère inertiel (S), loin de toute masse, une tour de hauteur h est accélérée le long de l'axe des x par une accélération constante $\vec{g} = g\vec{x}$. Ceci produit une force d'inertie localement égale à la pesanteur terrestre. A l'instant $t = 0$, un observateur A en $x = 0$ émet un signal de longueur Δt. Calculons la vitesse de l'observateur B placé en $x = h$ (*le haut de la tour*) dans un repère inertiel tangent, quand le signal y arrive à l'instant t : $v = gt$. Si $\frac{v}{c}$ est suffisamment petit, on obtient :

$$\begin{aligned}
ct &= h + \frac{gt^2}{2} \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{v}{c} &= \frac{gh}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \\
\frac{v^2}{c^2} - 2\frac{v}{c} + 2\frac{gh}{c^2} &= 0 \\
\frac{v}{c} &= 1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{gh}{c^2}} \\
\frac{v}{c} &= \frac{gh}{c^2}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

En supposant Δt suffisamment petit pour que la vitesse n'ait pas changé de manière perceptible lors de l'émission et que l'on puisse confondre l'observateur accéléré avec l'observateur B dans un repère inertiel tangent au haut de la tour, alors la durée du signal mesurée par cet observateur dans le référentiel de départ est $\delta t = \Delta t(1 + \frac{gh}{c^2})$. La mesure par l'observateur tangent sera la même au premier ordre que celle de l'observateur accéléré car la dilatation du temps est un effet de second ordre ($\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$). Donc, la fréquence mesurée en haut de la tour (ν_{haut}) est décalée vers le rouge par rapport à la fréquence émise en bas de la tour (ν_{bas}) :

$$\nu_{haut} \quad = \quad \nu_{bas}\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \tag{1.8}$$

Le potentiel de gravitation terrestre ($U = -GM_\oplus/(R_\oplus + h)$, $g \equiv GM_\oplus/R_\oplus^2$ $\oplus$ *symbolise la Terre*) est introduit dans l'équation (1.8). Ce qui donne :

$$\nu_{haut} \quad = \quad \nu_{bas}\left(1 - \frac{U_{haut}}{c^2} + \frac{U_{bas}}{c^2}\right) \tag{1.9}$$

Refaisons les calculs dans le référentiel lié à la tour. La tour étant accélérée, la métrique n'est plus celle de MINKOWSKI. Notons g_{ij} la métrique permettant de calculer ds^2. On définit un temps coordonné $ct = x^0$ et des variables d'espace x^1, x^2, x^3. Alors $ds^2 = g_{ij}dx^idx^j$. Un signal de largeur en temps propre $\Delta\tau_{bas}$ émis en bas de la tour aura comme largeur, en temps coordonnée, $\Delta t = \Delta\tau_{bas}/\sqrt{-g_{00}(bas)}$ et sera perçu en haut de la tour comme $\Delta\tau_{haut} = \Delta t\sqrt{-g_{00}(haut)}$. En effet, l'accélération est constante donc Δt ne varie pas entre le bas et le haut de la tour, car le champ ne change pas entre le passage du premier photon et celui du second photon. Ils mettent donc tous les deux le même temps pour se propager du bas vers le haut. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\nu_{haut} = \nu_{bas}\sqrt{\frac{g_{00}(bas)}{g_{00}(haut)}} \quad &\simeq \quad \nu_{bas}\left(1 - \frac{U_{haut}}{c^2} + \frac{U_{bas}}{c^2}\right) \\
&= \quad \nu_{bas}\left(1 - \frac{GM}{c^2R_{bas}} + \frac{GM}{c^2R_{haut}}\right)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Le principe d'équivalence (*masse grave = masse inerte*) nous permettant d'identifier localement une accélération au champ de pesanteur, on peut en déduire qu'à l'ordre le plus bas :

$$g_{00} \quad \simeq \quad -1 - \frac{2U}{c^2} \tag{1.11}$$

où U est le potentiel gravitationnel newtonien.

Ce phénomène fut mesuré par POUND et REBKA [4] en 1960. Ils placèrent un échantillon de cobalt radioactif γ au bas d'une tour de l'université de HARVARD de hauteur 22, 6 m, et observèrent la fréquence du γ au sommet (*effet* MÖSSBAUER *[5]*). La prédiction est de l'ordre de $(\nu_{bas} - \nu_{haut})/\nu_{bas} = 2,47 \times 10^{-15}$. Ils mesurèrent $(\nu_{bas} - \nu_{haut})/\nu_{bas} = (2,57 \pm 0,26) \times 10^{-15}$. Cet effet est aussi utilisé pour mesurer le rapport masse sur rayon des naines blanches.

Essayons maintenant de formaliser ces phénomènes en termes d'équations.

Équations d'Einstein

Comme cela a été montré précédemment, l'effet de la gravitation est contenu dans la description de la métrique g_{ij}. C'est donc à partir du principe de moindre action appliqué à la métrique que l'on va déduire les équations d'EINSTEIN. La non linéarité de la relativité générale apparaît ici car les dérivées, donc les variations, dépendent de la métrique.

Pour une métrique donnée g_{ij} on définit :

- la dérivation :$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$
- les symboles de CHRISTOFFEL : $\Gamma_{lji} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_j g_{li} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ji}\right)$
- $\Gamma^k_{lj} \equiv g^{ik}\Gamma_{lji}$
- le tenseur de courbure ou de RIEMANN : $R^i_{jkl} \equiv \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{jk}$
- le tenseur de RICCI : $R_{ij} \equiv R^k_{ikj}$
- la courbure scalaire : $R \equiv g^{ij}R_{ij}$

De plus, les quantités suivantes apparaissent dans l'équation d'EINSTEIN :

- le tenseur d'énergie-impulsion (distribution d'énergie et de masse) : T_{ij}
- la constante cosmologique Λ, dont la valeur n'est pas fixée

Voici quelques exemples de tenseurs énergie-impulsion :

- essaim de particules (de masses m_a) sans interaction :
  $T^{ij} = c^2 \frac{\sum_a m_a \delta(\vec{x}-\vec{x}_a)}{\sqrt{-g}} u^i u^j \frac{d\tau}{dt}$
- fluide parfait : $T^{ij} = (\epsilon_0 + p_0)u^i u^j + p_0 g^{ij}$ où ϵ_0 est la densité totale d'énergie propre et p_0 est la pression isotrope dans le repère où il est au repos.

Via le principe de moindre action appliqué au lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{c^3}{16\pi G}\left(R - 2\Lambda\right) \tag{1.12}$$

nous obtenons les équations d'EINSTEIN :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\left(R - 2\Lambda\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \tag{1.13}$$

Tout l'arsenal nécessaire à l'étude de phénomènes relativistes est maintenant à notre disposition. On peut donc s'intéresser à de petites déformations de l'espace-temps : les ondes gravitationnelles.

1.2.3 Solutions des équations d'Einstein dans le vide et émission d'ondes gravitationnelles

Dans un premier temps, nous allons chercher les solutions de l'équation d'EINSTEIN dans le vide puis nous relierons ces solutions à diverses sources. Il faut donc pour cela résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{2} g_{ij} R \\ &= \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} R_{kl} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Du fait de la non linéarité des équations d'EINSTEIN, le calcul du champ gravitationnel dans le vide n'est pas réalisable dans l'état actuel des méthodes de calcul disponibles. Nous allons donc chercher à linéariser l'équation précédente dans le cas de petites perturbations h_{ij} autour d'une solution triviale de cette équation : la métrique de MINKOWSKI η_{ij}. Le tenseur de la métrique devient alors $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$. Dans ce cadre les définitions données précédemment s'écrivent :

- $\Gamma^k_{lj} = \eta^{ik} \frac{1}{2} \left(\partial_l h_{ji} + \partial_j h_{il} - \partial_i h_{lj} \right)$
- $R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\partial_k \partial_i h^k_j + \partial_j \partial^k h_{ik} - \partial_k \partial^k h_{ij} - \partial_j \partial_i h^k_k \right)$

Cela donne les équations liant les h_{ij} au premier ordre :

$$\partial_k \partial_i h^k_j + \partial_j \partial^k h_{ik} - \partial_k \partial^k h_{ij} - \partial_j \partial_i h^k_k \;=\; \partial_k \partial^l h^k_l - \partial_k \partial^k h^l_l \tag{1.15}$$

La solution de ces seize équations à seize inconnues n'est pas évidente. Remarquons tout d'abord que ce système de dimension seize peut être réduit à un système de dimension dix, le tenseur h_{ij} étant symétrique. Nous allons maintenant essayer de réduire les degrés de liberté restants en utilisant les propriétés de transformation sous les changements de jauge.

Notons :

- $h_{00} = -2A$
- $h_{0\alpha} = B_\alpha$
- $h_{\alpha\beta} = 2(C\delta_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta})$

On peut choisir $E^\alpha_\alpha = 0$ en redéfinissant C, et décomposer B_α et $E_{\alpha\beta}$ comme suit :

$$B_\alpha = \partial_\alpha B + \bar{B}_\alpha \tag{1.16}$$

$$E_{\alpha\beta} = \partial^2_{\alpha\beta} E - \frac{1}{3} \Delta E + \partial_\alpha \bar{E}_\beta + \partial_\beta \bar{E}_\alpha + \bar{E}_{\alpha\beta} \tag{1.17}$$

où B, E sont des fonctions, $\bar{B}_\alpha$, $\bar{E}_\alpha$ des vecteurs sans divergence ($\partial_\alpha \bar{B}^\alpha = 0$) et où le tenseur $\bar{E}_{\alpha\beta}$ est transverse et sans trace ($\bar{E}^\alpha_\alpha = 0$ et $\partial_\alpha \bar{E}^{\alpha\beta} = 0$).

On a donc décomposé les dix composantes h_{ij} en quatre scalaires et quatre composantes de vecteurs (les deux composantes indépendantes des deux vecteurs sans divergence $\bar{B}_\alpha$ et $\bar{E}_\alpha$), et deux composantes de tenseurs (les deux composantes indépendantes du tenseur transverse et sans trace $\bar{E}_{\alpha\beta}$).

Les équations d'EINSTEIN étant invariantes par changement de coordonnées, quatre contraintes peuvent être fixées. Quatre changements infinitésimaux de coordonnées (*changement de jauge*) permettent de voir comment se transforment ces dix composantes. A partir de cela, on définit six grandeurs invariantes de jauge :

$$\Phi_A = A + \partial_0 B - \partial_0^2 E \tag{1.18}$$

$$\Phi_C = C - \frac{1}{3}\Delta E \tag{1.19}$$

$$\Phi_{B\alpha} = \bar{B}_\alpha - \partial_0 \bar{E}_\alpha \tag{1.20}$$

$\bar{E}_{\alpha\beta}$ restant inchangé par ces transformations de coordonnées.

En écrivant les équations d'EINSTEIN en fonction de ces grandeurs, on obtient quatre contraintes supplémentaires :

$$\Phi_A = 0 \tag{1.21}$$

$$\Phi_C = 0 \tag{1.22}$$

$$\Phi_{B\alpha} = 0 \tag{1.23}$$

Il ne reste de l'équation (1.15) que deux degrés de liberté contenus dans le tenseur $\bar{E}_{\alpha\beta}$, qui vérifient l'équation[‡] :

$$\Box \bar{E}_{\alpha\beta} = 0 \tag{1.24}$$

Si on cherche une solution à cette équation de propagation sous forme d'ondes planes et que l'on fixe le choix de la jauge, en l'occurence la jauge Transverse sans Trace «TT», où $\vec{k} = (0, 0, k)$, on obtient ($h^{TT} = \bar{E}$) :

$$h^{TT}_{ij} = e^{TT}_{ij} \cos k(z - ct) \text{ avec } e^{TT}_{xx} = -e^{TT}_{yy} \equiv h_+ \text{ et } e^{TT}_{xy} = e^{TT}_{yx} \equiv h_\times \tag{1.25}$$

toutes les autres composantes de e^{TT}_{ij} étant nulles.

Relions maintenant les termes h_+ et $h_\times$ à une source donnée. On peut montrer que la seule partie intéressante pour nous est celle rayonnée à l'infini et que dans le cas d'un groupe de particules de masses ponctuelles, elle se résume à l'équation suivante :

$$\Box h^{TT}_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \bar{T}_{\alpha\beta} \tag{1.26}$$

$$h^{TT}_{\alpha\beta} = -\frac{2G}{c^4} \sum m \left(\frac{\bar{u}_\alpha \bar{u}_\beta}{r}\right)_R \tag{1.27}$$

[‡] $\Box \equiv \partial_i \partial^i$

où $\bar{T}_{\alpha\beta}$ représente le tenseur énergie impulsion exprimé dans la jauge transverse sans trace, et où l'indice R signale un potentiel retardé de type LIÉNARD-WIECHERT.

Si on se place loin de la source, à la distance r, et si la vitesse des masses est faible par rapport à c, avec les notations suivantes :

$$\vec{n} \equiv \text{vecteur normé tel que } \vec{k} = k\vec{n} \tag{1.28}$$

$$Q^{\alpha\beta} \equiv \int dm(z^\alpha z^\beta - \frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\vec{z}^{\,2}) \text{ moment quadrupolaire du système} \tag{1.29}$$

$$P_{\alpha\beta\gamma\psi} \equiv (\delta_{\alpha\gamma} - n_\alpha n_\gamma)(\delta_{\beta\psi} - n_\beta n_\psi) - \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta)(\delta_{\gamma\psi} - n_\gamma n_\psi) \tag{1.30}$$

on a :

$$h_{\alpha\beta}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} P_{\alpha\beta\gamma\psi} \frac{d^2 Q^{\gamma\psi}}{dt^2}(t - r/c) \tag{1.31}$$

Grâce à l'équation (1.31), on est maintenant capable d'évaluer l'amplitude des ondes gravitationnelles au voisinage de notre détecteur. Une relation reliant h à l'énergie rayonnée par la source peut aussi être obtenue.

D'après [6], l'énergie d^2E rayonnée pendant dt dans un angle solide élémentaire $d\Omega$ est, dans la direction caractérisée par $\vec{n}$:

$$d^2E = \frac{G}{4\pi c^5}\left[\frac{1}{4}(\dddot{Q}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{Q}^2_{\alpha\beta} - \dddot{Q}_{\alpha\beta}\dddot{Q}_{\alpha\nu} n_\beta n_\nu\right] d\Omega dt \tag{1.32}$$

On en déduit l'énergie totale rayonnée par unité de temps dE/dt :

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \frac{d^2E}{d\Omega dt} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \frac{G}{4\pi c^5}\left[\frac{1}{4}(\dddot{Q}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{Q}^2_{\alpha\beta} - \dddot{Q}_{\alpha\beta}\dddot{Q}_{\alpha\nu} n_\beta n_\nu\right] \\
&= \frac{G}{5c^4}\dddot{Q}^2_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

On ne peut malheureusement pas avoir accès à l'énergie rayonnée donnée par l'équation (1.33), notre détecteur ne recevant que l'énergie émise par la source dans notre direction. Un modèle d'émission permet de remonter à la totalité de l'énergie émise en mesurant certains paramètres liés à la source. Les valeurs de h mesurées peuvent être reliées à la perte d'énergie dans un angle solide dans une direction donnée (*cf équation (1.32)*). En effet, on obtient, en contractant le tenseur$\dot{h}_{\alpha\beta}^{TT}$ avec lui même (*calcul effectué en annexe A*) :

$$\dot{h}_{\alpha\beta}^{2TT} = \frac{8G^2}{c^8 r^2}\left[\frac{1}{4}(\dddot{Q}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{Q}^2_{\alpha\beta} - \dddot{Q}_{\alpha\beta}\dddot{Q}_{\alpha\nu} n_\beta n_\nu\right] \tag{1.34}$$

$$= \frac{288G\pi}{c^3 r^2}\frac{d^2E}{d\Omega dt} \tag{1.35}$$

$$\frac{d^2E}{d\Omega dt} = \frac{c^3 r^2}{288G\pi}\dot{h}_{\alpha\beta}^{2TT} \tag{1.36}$$

L'équation (1.36) sera utilisée dans le paragraphe (1.3) pour évaluer l'énergie émise dans notre direction par une étoile à neutrons en terme de h_0 (*quantité caractéristique de l'onde gravitationnelle*).

1.2.4 Effets des ondes gravitationnelles

Dans le cadre défini précédemment, on peut écrire :

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1 + h_+)dx^2 + (1 - h_+)dy^2 + 2h_\times dxdy + dz^2 \tag{1.37}$$

où $ds^2 = 0$ définit l'équation de la trajectoire de la lumière, une géodésique.

Calculons le temps mis par un photon pour faire un aller-retour entre deux points en chute libre dans ce référentiel. Le premier de ces points se trouve en $(0, 0, 0)$ et le deuxième en $(X, 0, 0)$. Le temps coordonnées se confond avec le temps propre d'un observateur en chute libre. De plus le passage d'une onde gravitationnelle ne provoque pas de mouvement, au premier ordre, pour des masses placées sur une géodésique. Donc le temps perçu par une horloge pour l'aller et retour du photon est l'intégrale du temps coordonnées :

$$dt = \sqrt{1 + h_+}dx \tag{1.38}$$

$$T = 2\sqrt{1 + h_+}X \simeq (2 + h_+)X \tag{1.39}$$

On définit la distance D séparant les deux points comme $D = cT$. Donc si h_+ varie au cours du temps, la distance mesurée variera elle aussi au cours du temps. La figure 1.1 montre l'effet du passage d'une onde gravitationnelle sur un cercle de particules test. On peut remarquer l'action au niveau du moment quadrupolaire : contraction dans une direction et élongation dans une autre.

Passons maintenant à l'étude de la source d'ondes gravitationnelles qui nous intéresse plus particulièrement : l'étoile à neutrons.

1.3 Une source d'ondes gravitationnelles : L'étoile à neutrons

L'onde gravitationnelle émise par une étoile à neutrons ne peut exister que si celle-ci a un moment quadrupolaire asymétrique par rapport à son axe de rotation [7]. Après la description de l'étoile à neutrons, on s'intéressera a son type démission : un signal périodique avec deux fréquences.

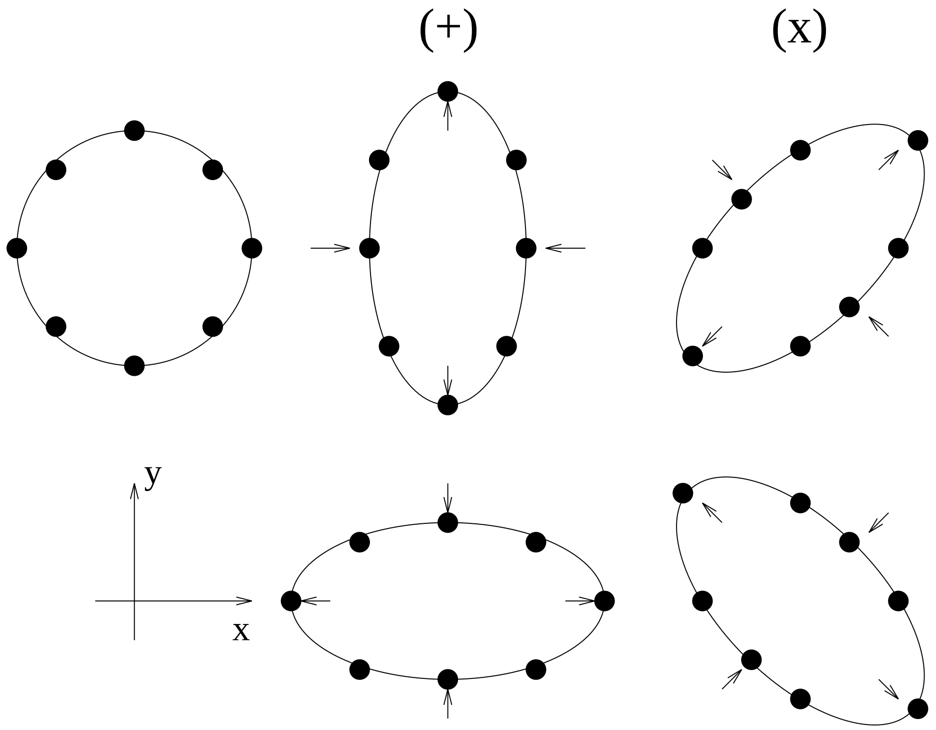


Figure 1.1: Effet d'une onde gravitationnelle sur un ensemble de particules test, pour les deux polarisations h_+ et $h_\times$

1.3.1 L'étoile à neutrons

Une étoile à neutrons est un corps céleste extrêmement massif et compact d'environ 10 km de diamètre, qui a une masse[§] d'environ $1,4M_\odot$, et qui est composé majoritairement d'un fluide de neutrons et de protons (*au nombre de* 10^{57}). Leur existence a été prédite par L. D. LANDAU dans les années 1930. Elle doit son nom au fait que les neutrons sont vingt fois plus nombreux que les protons. Sa densité est de l'ordre de celle du noyau atomique (*voire plus en son centre* $\approx 10^{15}$ *g cm*$^{-3}$). Elle possède un champ magnétique qui est dû aux mouvements des protons et des électrons en son sein. Elle est susceptible d'émettre un rayonnement électromagnétique selon une direction si son champ magnétique est assez fort et/ou sa rotation assez rapide. Dans ce cas, la rotation de cette étoile entraîne l'apparition d'un signal périodique pour un observateur terrestre. C'est ce qu'on appelle un pulsar. Le premier pulsar a été découvert en 1967 par J. BELL et A. HEWISH. Cependant, la taille du cône d'émission est telle que seuls un dixième des pulsars sont effectivement observés. De plus, en tenant compte de la faiblesse d'émission de certains d'entre eux, leur

[§] $M_\odot$ désigne la masse du Soleil nombre est estimé à environ un million dans notre Galaxie. De plus, les nombreuses étoiles à neutrons qui n'émettent pas comme les pulsars sont tout de même susceptibles d'émettre des ondes gravitationnelles. Le nombre total d'étoiles à neutrons dans la Galaxie est estimé à environ $10^9 - 10^{10}$ [8]. Ce nombre reste très spéculatif car il dépend de modèles d'étoiles à neutrons qui ne sont pas encore bien validés. Seuls 706 pulsars ont été observés selon [9].

Les étoiles à neutrons sont le résultat de la super nova d'une étoile faisant plusieurs masses solaires [10]. La plus célèbre d'entre elles est le pulsar du CRABE dont la super nova a pu être observée en plein jour pendant trois semaines en 1054 [11]. La structure [10] d'une étoile à neutrons est présentée sur la figure 1.2.

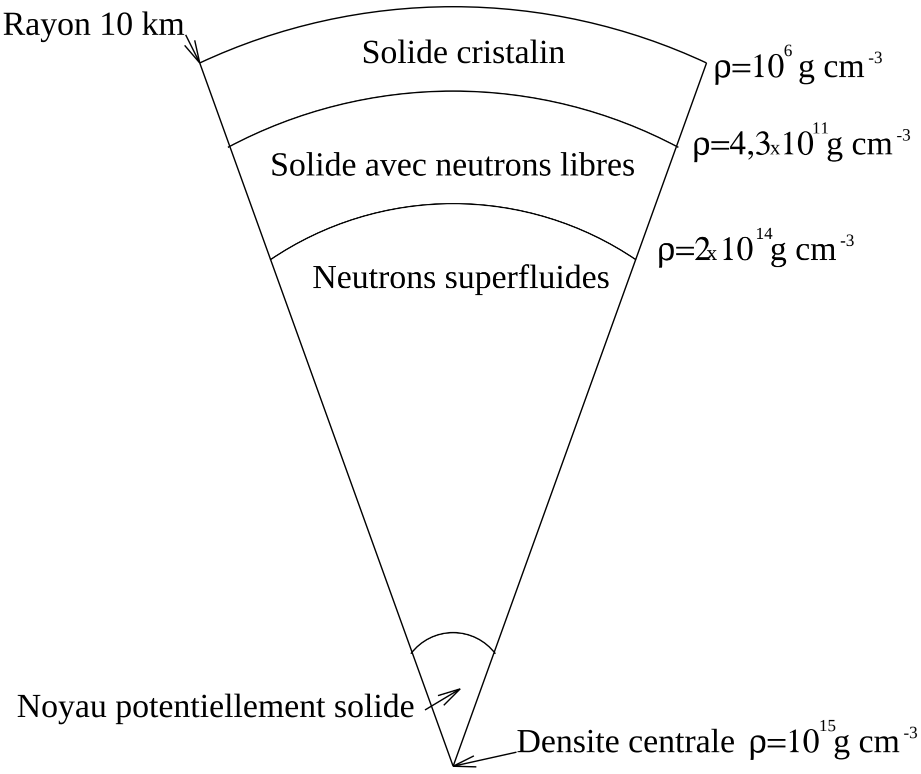


Figure 1.2: Structure interne d'une étoile à neutrons

Ce sont les déformations de cette structure qui permettent l'apparition d'ondes gravitationnelles. La découverte de telles ondes apporterait des renseignements précieux sur la matière nucléaire à très haute densité.

1.3.2 Modèle d'émission simple

Mettons l'équation (1.31) sous une forme utilisable pour l'étude des étoiles à neutrons dans le cas d'un détecteur placé sur terre.

On peut décomposer le tenseur $P_{\alpha\beta\gamma\psi}$ en la différence de deux produits d'un même tenseur $\Pi_{\alpha\beta}$ (*projecteur perpendiculaire à la ligne de visée*) :

$$P_{\alpha\beta\gamma\psi} = \Pi_{\alpha\gamma}\Pi_{\beta\psi} - \frac{1}{2}\Pi_{\alpha\beta}\Pi_{\gamma\psi} \tag{1.40}$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{r_\alpha r_\beta}{r^2} \tag{1.41}$$

On peut aussi décomposer le tenseur $Q_{\alpha\beta}$ en une partie due à la rotation de l'étoile à neutrons $Q^{rot}_{\alpha\beta}$, dont la dérivée seconde par rapport au temps est nulle, et une partie due à une distorsion de l'étoile $Q^{dist}_{\alpha\beta}$. Cette décomposition est possible grâce à la faible amplitude de ces moments, et donc à leur corrélation encore plus faible. L'équation (1.31) devient donc :

$$h^{TT}_{\alpha\beta} = \frac{2G}{c^4}\frac{1}{r}\left[\Pi^\gamma_\alpha\Pi^\psi_\beta - \frac{1}{2}\Pi_{\alpha\beta}\Pi^{\gamma\psi}\right]\ddot{Q}^{dist}_{\gamma\psi}\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{1.42}$$

Dans la jauge transverse sans trace et dans le référentiel de propagation[¶] de l'onde gravitationnelle on obtient alors :

$$h^{TT}_{\alpha\beta} = h_+ e^+_{\alpha\beta} + h_\times e^\times_{\alpha\beta} \tag{1.43}$$

$$h_+ = h_0 \sin\alpha\left[\cos\alpha\frac{\sin 2i}{4}\cos\Omega(t-t_0) - \sin\alpha\frac{1+\cos^2 i}{2}\cos 2\Omega(t-t_0)\right] \tag{1.44}$$

$$h_\times = h_0 \sin\alpha\left[\cos\alpha\frac{\sin i}{2}\sin\Omega(t-t_0) - \sin\alpha\cos i\sin 2\Omega(t-t_0)\right] \tag{1.45}$$

$$h_0 = -\frac{6G}{c^4}Q^{dist}_{\hat{z}\hat{z}}\frac{\Omega^2}{r} \tag{1.46}$$

où α est l'angle entre l'axe de rotation de l'étoile à neutrons et l'axe principal du moment quadrupolaire dû à une distorsion, et i l'angle entre l'axe de rotation et la direction de la terre. Ω est la fréquence de rotation de l'étoile à neutrons. $Q^{dist}_{\hat{z}\hat{z}}$ correspond à la projection du moment quadrupolaire sur son axe principal. Le terme en r/c a été inclu dans le terme t_0.

L'émission d'ondes gravitationnelles fait perdre de l'énergie à l'étoile à neutrons et donc la ralentit. L'équation (1.36) nous permet d'évaluer cette perte pour notre direction. Avec les notations précédentes, on a :

$$\frac{d^2E}{d\Omega dt} = \frac{c^3 r^2}{288G\pi}\left[\dot{h}^2_{11} + \dot{h}^2_{12} + \dot{h}^2_{21} + \dot{h}^2_{22}\right] \tag{1.47}$$

$$= \frac{c^3 r^2}{144G\pi}\left[\dot{h}^2_{+} + \dot{h}^2_{\times}\right] \tag{1.48}$$

[¶]On définit l'axe des z de ce repère comme étant confondu avec le vecteur $\vec{k}$ de propagation de l'onde. L'axe des x est défini, au sens près, comme l'intersection entre le plan perpendiculaire à $\vec{k}$ et le plan de rotation de l'étoile à neutrons. Le sens de l'axe des x n'est pas important car le sens opposé donne exactement la même métrique (*spin deux de la métrique*)

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{c^3 r^2}{144 G\pi} h_0^2 \sin^2\alpha \Omega^2 \left[\cos^2\alpha \frac{\sin^2 2i}{16} \sin^2\Omega(t-t_0)\right. \\
& - \cos\alpha \sin\alpha \frac{\sin 2i}{2}(1+\cos^2 i)\sin\Omega(t-t_0)\sin 2\Omega(t-t_0) \\
& + \sin^2\alpha(1+\cos^2 i)^2 \sin^2 2\Omega(t-t_0) + \cos^2\alpha \frac{\sin^2 i}{4}\cos^2\Omega(t-t_0) \\
& -2\cos\alpha\sin\alpha\sin i\cos i\cos\Omega(t-t_0)\cos 2\Omega(t-t_0) \\
& \left. +4\sin^2\alpha\cos^2 i\cos^2 2\Omega(t-t_0)\right] \qquad (1.49)
\end{aligned}
$$

Cela correspond à une énergie, E_T, perdue en moyenne par période :

$$
\begin{aligned}
E_T \quad = \quad & \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d^2E}{d\Omega dt} dt \qquad (1.50) \\
= \quad & \frac{c^3 r^2}{288 G\pi} h_0^2 \sin^2\alpha\Omega^2 \left[\cos^2\alpha\frac{\sin^2 2i}{16} + \sin^2\alpha(1+\cos^2 i)^2\right. \\
& \left. + \cos^2\alpha\frac{\sin^2 i}{4} + 4\sin^2\alpha\cos^2 i\right] \qquad (1.51)
\end{aligned}
$$

En additionnant E_T sur toutes les directions i possibles, on obtient l'énergie totale E_{Tot} émise par l'étoile à neutrons sous forme d'ondes gravitationnelles.

$$
\begin{aligned}
E_{Tot} \quad = \quad & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} di E_T \\
= \quad & \frac{c^3 r^2}{288 G\pi} h_0^2 \sin^2\alpha\Omega^2 2\pi \int_0^{\pi} di \left[\cos^2\alpha\frac{\sin^2 2i}{16} + \sin^2\alpha(1+\cos^2 i)^2\right. \\
+ \quad & \left. \cos^2\alpha\frac{\sin^2 i}{4} + 4\sin^2\alpha\cos^2 i\right] \\
= \quad & \frac{c^3 r^2 \pi}{288 G} h_0^2 \sin^2\alpha\Omega^2 \left[\frac{5\cos^2\alpha}{16} + \frac{35\sin^2\alpha}{4}\right] \qquad (1.52)
\end{aligned}
$$

On obtient, à h_0, fixé $E_{Tot}^{max} = \frac{35 c^3 r^2 \pi}{1152 G} h_0^2 \Omega^2$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad et un minimum nul pour $\alpha = 0$ rad. La valeur de α peut difficilement être prédite. Par exemple un angle $\alpha = 15°$ donne $E_{Tot} = 18\% E_{Tot}^{max}$.

Cette énergie, dans le cas d'une découverte d'ondes gravitationnelles pour un pulsar connu, pourra, une fois corrélée avec le ralentissement, permettre de discriminer certains modèles de description de pulsars.

Les mesures du ralentissement des divers pulsars connus permettent de donner l'ordre de grandeur maximal de h_0, en supposant que la perte d'énergie cinétique de rotation observée soit uniquement due à l'émission d'ondes gravitationnelles. Soit I, le moment d'inertie du pulsar (*typiquement* 10^{38} kg m^2), $\epsilon = -\frac{3}{2}\frac{Q_{\hat{z}\hat{z}}^{dist}}{I}$ son degré d'asymétrie et $\dot{P} = dP/dt$ la variation de sa période. Alors, en supposant que le ralentissement est dû à l'énergie rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{P} &\Rightarrow \epsilon_{max} = 7,6 \times 10^{-4} \\
h_{0max}^{Crabe} &= 1,44 \times 10^{-24} \left[\frac{I}{10^{38}\ \mathrm{kg\ m^2}}\right] \qquad (1.53) \\
\dot{P} &\Rightarrow \epsilon_{max} = 1,8 \times 10^{-3} \\
h_{0max}^{Vela} &= 1,91 \times 10^{-24} \left[\frac{I}{10^{38}\ \mathrm{kg\ m^2}}\right] \qquad (1.54) \\
\dot{P} &\Rightarrow \epsilon_{max} = 1,6 \times 10^{-9} \\
h_{0max}^{1957+20} &= 1,73 \times 10^{-30} \left[\frac{I}{10^{38}\ \mathrm{kg\ m^2}}\right] \qquad (1.55)
\end{aligned}$$

Remarquons que le paramètre ϵ, le degré d'asymétrie de l'étoile à neutrons, est important et malheureusement mal connu.

1.3.3 Modèle incluant une déformation de l'étoile à neutrons par son champ magnétique

Essayons de modéliser de manière plus précise le phénomène décrit précédemment. On suppose ici que la distorsion de l'étoile à neutrons est due à son champ magnétique, ce qui va nous permettre de donner une valeur à ϵ ou de déplacer le problème vers diverses hypothèses pour évaluer le degré de distorsion. Ici, on suppose que l'axe principal de $Q_{\hat{z}\hat{z}}^{dist}$ est confondu avec l'axe du champ magnétique.

Toujours d'après [7], on peut écrire, avec les notations suivantes : $M_i = (0, M\sin\alpha, M\cos\alpha)$ le dipôle magnétique, ρ la densité de masse de l'étoile, R le rayon moyen de l'ellipsoïde quasi-sphérique :

$$Q_{\hat{z}\hat{z}}^{dist} = -\frac{\mu_0 M^2}{16\pi^2 G\rho R^3} \qquad (1.56)$$

Relions M au ralentissement de l'étoile à neutrons [12] en supposant que la plus grosse partie de ce ralentissement est due à une perte d'énergie *via* le canal électromagnétique, une petite fraction seulement étant due au rayonnement gravitationnel :

$$M^2 = \frac{4\pi}{\mu_0}\frac{3c^3}{8\pi^2}\frac{I P\dot{P}}{\sin^2\alpha} \qquad (1.57)$$

Si l'on définit β comme suit :

$$\epsilon = \beta\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M^2 R^2}{G I^2} \qquad (1.58)$$

on obtient une reformulation de (1.44) et (1.45) :

$$h_+ = 6\beta\frac{R^2\dot{P}}{crP}\left[\frac{\sin i\cos i}{2\tan\alpha}\cos\Omega(t-t_0) - \frac{1+\cos^2 i}{2}\cos 2\Omega(t-t_0)\right] \quad (1.59)$$

$$h_\times = 6\beta\frac{R^2\dot{P}}{crP}\left[\frac{\sin i}{2\tan\alpha}\sin\Omega(t-t_0) - \cos i\sin 2\Omega(t-t_0)\right] \quad (1.60)$$

$$h_0 = 6\beta\frac{R^2\dot{P}}{crP\sin^2\alpha} \quad (1.61)$$

Ce qui nous donne comme liste d'amplitudes revisitées :

$$h_0^{Crabe} = 4,08\times 10^{-31}\left[\frac{R}{10\text{ km}}\right]^2\frac{\beta}{\sin^2\alpha} \quad (1.62)$$

$$h_0^{Vela} = 1,81\times 10^{-31}\left[\frac{R}{10\text{ km}}\right]^2\frac{\beta}{\sin^2\alpha} \quad (1.63)$$

$$h_0^{1957+20} = 4,51\times 10^{-37}\left[\frac{R}{10\text{ km}}\right]^2\frac{\beta}{\sin^2\alpha} \quad (1.64)$$

$$(1.65)$$

Ces valeurs semblent très petites ($h \simeq 10^{-31}$), et, pour les détecter, il faudrait intégrer les données pendant dix milliards d'années avec un détecteur comme VIRGO. Mais, si α est petit, h_0 croît très rapidement. Malheureusement, l'équation (1.57) n'est vraissemblablement plus valable pour α très petit ($\alpha < 10^{-2}$). On doit donc espérer obtenir de grandes valeurs pour β. Suivant les divers modèles utilisés pour décrire l'intérieur de l'étoile, on obtient diverses valeurs de β [7] :

- matière normale, conducteur parfait : $\beta \simeq [1-10]$
- intérieur de l'étoile, supraconducteur de type I : $\beta \simeq [150-5700]$
- intérieur de l'étoile, supraconducteur de type II : valeurs non calculées

Dans les cas extrêmes β prend des valeurs de l'ordre 6×10^3, en supposant $\alpha \simeq 10^{-1}$, on obtient pour le pulsar du CRABE $h \approx 10^{-26}$. Cela est encourageant pour la recherche de pulsar connus.

1.4 Données sur les pulsars connus

Nous disposons de données sur les étoiles à neutrons grâce à une de leurs sous-classes : les pulsars. Pour orienter nos recherches, nous pouvons nous intéresser à leur distribution fréquentielle ainsi qu'à leur distribution dans le ciel.

1.4.1 Distribution de la fréquence des sources potentielles

Plus de sept cents pulsars sont actuellement répertoriés dans le catalogue de TAYLOR [9]. La figure 1.3 présente la distribution de leur fréquence. Cette distribution nous montre l'intérêt de développer un détecteur sensible aux signaux basse fréquence (*quelques Hertz*). De plus, en regardant les équations (1.44) et (1.45), on remarque qu'il existe une émission d'ondes gravitationnelles à la fréquence double de l'étoile à neutrons, ce qui nous permet d'augmenter leur nombre dans la bande de fréquences de VIRGO. Nous pouvons remarquer que la distribution des pulsars en système binaire est concentrée dans les hautes fréquences, ce qui affecte peu la distribution à basse fréquences, intéressante pour la recherche aveugle (*qui n'est pas encore envisagée pour les étoiles à neutrons en système binaire à cause de l'inconnue que représente le compagnon de la source*).

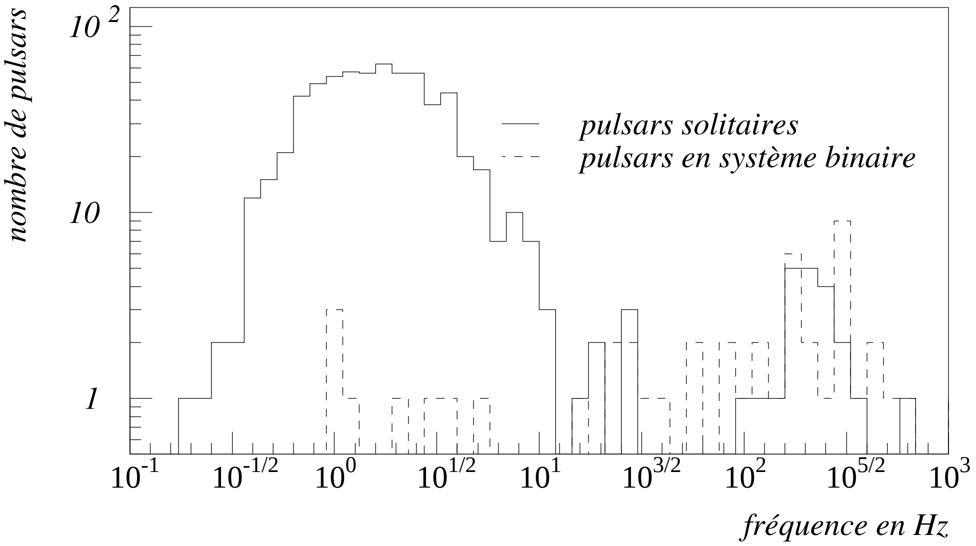


Figure 1.3: Distribution de la fréquence radio des pulsars connus

La faible proportion de pulsars en système binaire et la difficultée de corriger l'effet DOPPLER dû aux mouvements internes au système, fait que par la suite on ne s'intéressera qu'aux étoiles à neutrons solitaires.

1.4.2 Variation de la fréquence des pulsars

Les pulsars émettent des ondes électromagnétiques. Par là même, ils perdent de l'énergie, ce qui produit une diminution de leur fréquence de rotation. Une mesure de ce ralentissement est $\dot{P}$, *ie* la variation de la période du pulsar. La figure 1.4 montre les variations de période en fonction de celle-ci pour les 540 pulsars du catalogue de

TAYLOR dont on a une mesure du $\dot{P}$ positive. Cinq pulsars ont une mesure négative de $\dot{P}$ car ils sont accélérés par des phénomènes d'acrétion. Les autres n'ont pas de $\dot{P}$ mesuré. Pour un pulsar donné de période P_0, $T = P_0\sqrt{1/\dot{P}}$ correspond au temps qu'il faut attendre pour que la phase additionnelle due à $\dot{P}$ soit égale à π. Ce temps est important car il donne un ordre de grandeur du moment où l'intégration fait perdre du signal. En effet, à partir de ce moment, le signal est en opposition de phase avec celui attendu. Ceci permet de définir sur cette figure les zones où $\dot{P}$ est important en fonction du temps, T, pendant lequel le signal va être intégré.

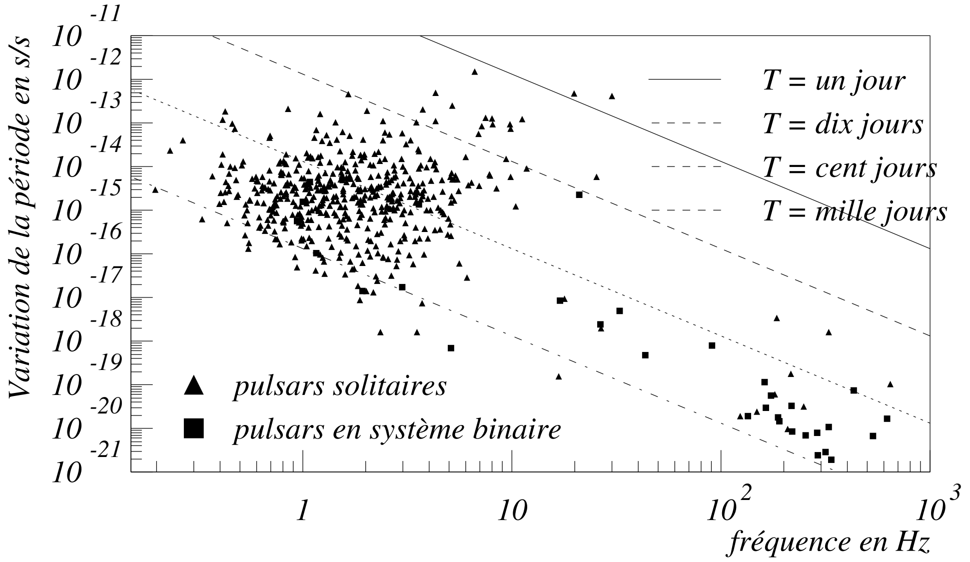


Figure 1.4: Variation de période d'un pulsar en fonction de sa fréquence

De plus, la mesure de ce ralentissement permet de donner une limite maximum sur l'amplitude des ondes gravitationnelles émises par les pulsars connus. L'équation suivante [13] donne l'amplitude en fonction du ralentissement $\dot{P}$ en supposant que toute l'énergie émise par le pulsar soit émise sous forme d'ondes gravitationnelles à la fréquence double du pulsar.

$$h_{max} = \sqrt{\frac{G\dot{P}}{c^3 P}}\frac{\sqrt{I}}{r} \tag{1.66}$$

I correspond au moment d'inertie de l'étoile à neutrons, qui vaut pour une étoile à neutrons typique de masse $1,4M_\odot$: 10^{38} Kg m^2. La figure 1.5 montre cette amplitude en fonction de la fréquence de la source.

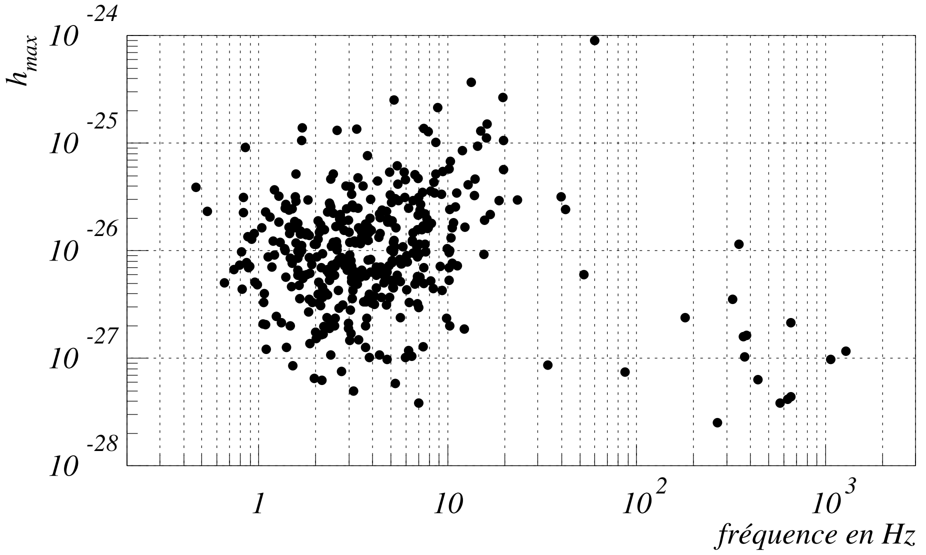


Figure 1.5: Amplitude maximum d'émission d'ondes gravitationnelles pour les 706 pulsars connus en fonction de leur fréquence d'émission

1.4.3 Distribution spatiale des pulsars connus

Le catalogue précise aussi la position de ces sources. La figure 1.6 nous montre cette distribution en coordonnées galactiques. Comme on peut s'y attendre, cette distribution est centrée sur le plan galactique. Ceci s'explique aisément car les sources détectées sont dans notre galaxie (*distance de l'ordre de quelques kiloparsecs*). De plus, 46% des pulsars solitaires se trouvent dans une bande $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $-0,1 < \delta < 0,1$ rad qui représente seulement 5% de l'angle solide total à couvrir pour une recherche aveugle. Les recherches seront donc à tenir préférentiellement dans cette direction.

Comme la majorité des sources se trouve approximativement dans le plan galactique, une vue du dessus de la Galaxie renseigne bien sur la distribution en distance des pulsars. Sur la figure 1.7 le centre galactique se trouve aux coordonnées (*en kpc*) (0,0) et la Terre aux coordonnées (-8,0). La distribution est centrée autour de la position de la Terre de manière à peu près uniforme, avec un étalement en direction du centre galactique.

La recherche en aveugle de pulsar devra donc être préférentiellement dirigée dans le plan galactique, sans zone plus particulière.

1.4.4 Incertitude sur la position des pulsars

La position des pulsars est connue avec une plus ou moins grande précision. La figure 1.8 présente la distribution de l'incertitude sur la position des pulsars. Elle est

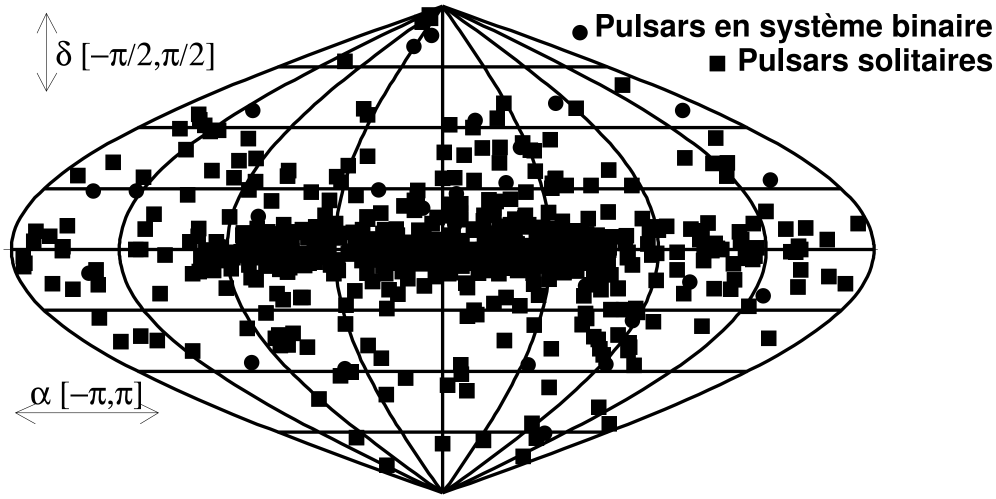


Figure 1.6: Distribution de la position des pulsars connus en coordonnées galactiques

en moyenne centrée sur un angle solide de l'ordre de $2,6 \times 10^{-10}$ sr. La présence de deux pics peut s'expliquer par le fait que la liste de 706 pulsars a été faite à partir d'un ancien catalogue (*long temps d'observation pour 558 pulsars*) et à partir de l'ajout de 148 nouveaux pulsars découverts entre 1993 et 1995 [9]. Pour ces derniers l'erreur sur la position n'a pas pu être diminuée, faute de temps d'observation. On peut remarquer sur la figure 1.9 que l'incertitude ne montre pas de dépendance en fréquence.

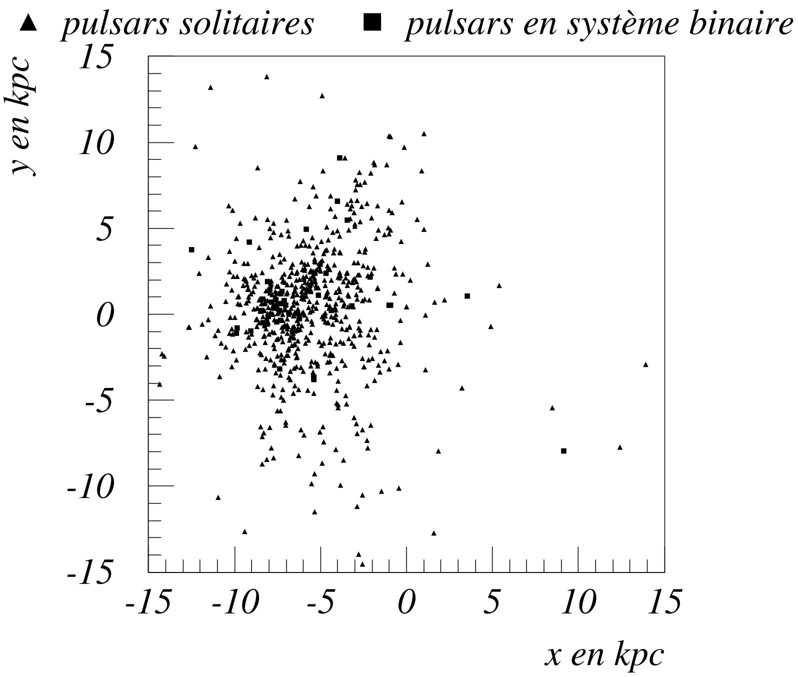


Figure 1.7: Distribution de la position des pulsars connus dans la Galaxie par rapport à son centre

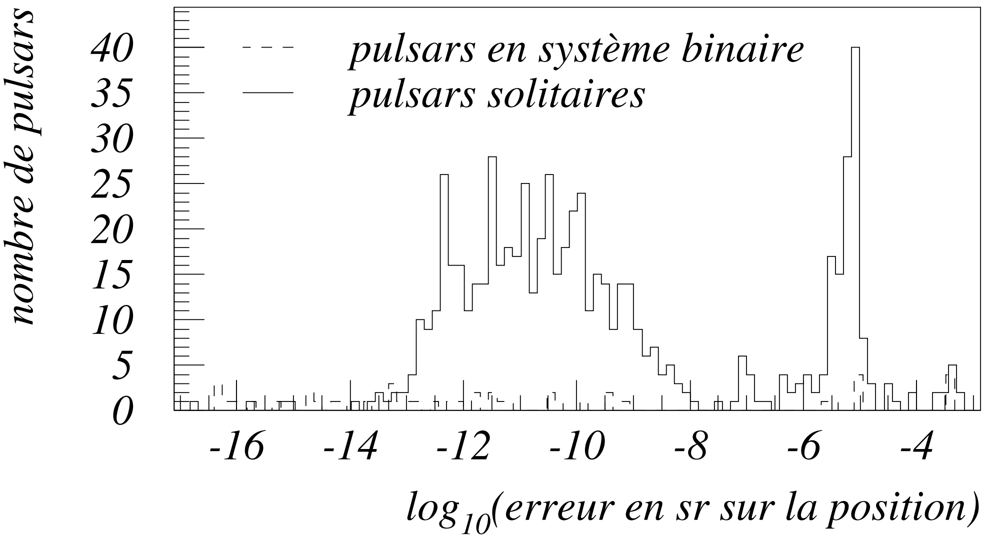


Figure 1.8: Distribution de l'erreur sur la position des pulsars connus, en stéradians

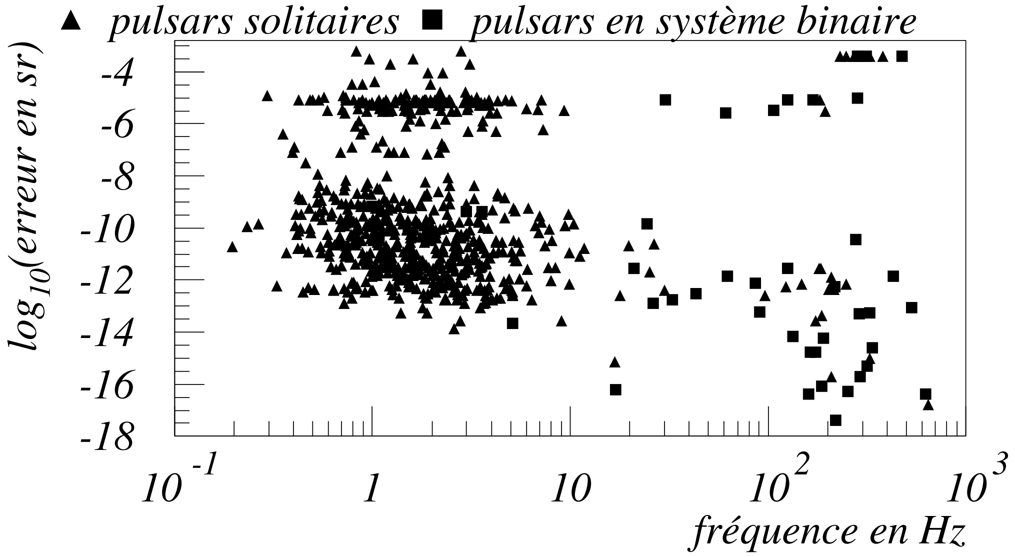


Figure 1.9: Distribution de l'erreur sur la position des pulsars connus en fonction de leur fréquence, en stéradians

Chapitre 2

Détecteurs d'ondes gravitationnelles

VIRGO est un détecteur d'ondes gravitationnelles dont le principe est de mesurer les variations de distances entre quatre masses libres. Sa mise en service est prévue pour la fin de l'année 2000. Pour cela on utilise l'interférométrie laser. Pour maximiser les chances d'observer un signal, l'expérience VIRGO tente d'atténuer toutes les sources potentielles de bruit. La bande de fréquences accessibles pour la recherche d'ondes gravitationnelles s'étend alors de quelques hertz à quelques kilohertz. La limite inférieure de cette bande de fréquences est déterminée par le système d'atténuation du bruit sismique, système particulièrement ambitieux qui permet à VIRGO d'envisager des recherches de signaux à basse fréquence. Ceci est primordial pour la recherche d'étoiles à neutrons, comme la montré la distribution des fréquences de la figure 1.3. La limite supérieure de la bande de fréquences est donnée par le filtrage des cavités FABRY-PÉROT.

Dans ce qui suit, le principe de détection de VIRGO et les principales sources de bruit sont détaillés. Ceci permettra par la suite de comprendre plus aisément l'étalonnage du détecteur et la recherche de signaux périodiques.

2.1 Principe de détection de VIRGO

La détection d'ondes gravitationnelles consiste à mesurer la distance entre des masses libres. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'effet d'une onde gravitationnelle est d'augmenter les distances suivant une direction tandis qu'elle les diminue dans une direction perpendiculaire. C'est pourquoi un interféromètre de MICHELSON, qui mesure la différence entre deux distances L_1 et L_2 généralement perpendiculaires, est approprié pour la détection d'ondes gravitationnelles. La figure 2.1 montre le schéma d'un tel interféromètre. La différence de chemin optique mesurée est proportionnelle aux variations de $L_1 - L_2$. Le passage d'une onde gravitationnelle polarisée h_+, qui serait orientée de façon optimale c'est-à-dire selon le système de mesure (*coïncidence des bras du détecteur avec les axes de polarisation h_+ de l'onde*), changerait L_2 en $(1-$

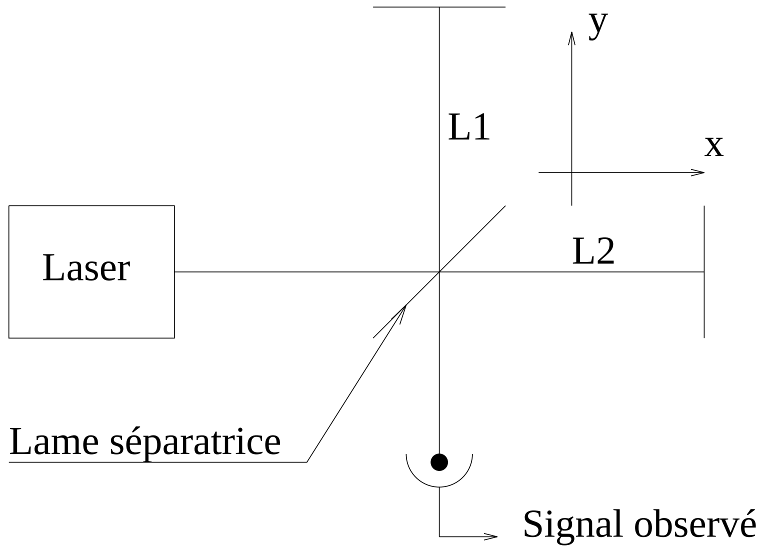


Figure 2.1: Schéma d'un interféromètre de MICHELSON

$\frac{1}{2}h^{TT}_{xx})L_2$, et L_1 en $(1+\frac{1}{2}h^{TT}_{xx})L_1$. La mesure est donc sensible à $h^{TT}_{xx}L$, si $L_2 = L_1 = L$. Ce système permet donc de tirer profit de la polarisation des ondes gravitationnelles.

La sensibilité d'un interféromètre a pour limite majeure le bruit de photons, qui est directement lié à la puissance présente sur la lame séparatrice. L'interféromètre est placé sur sa frange noire (*interférences destructrices*) pour accroître la sensibilité. La lumière présente dans l'interféromètre est donc renvoyée vers le laser. C'est pour cela qu'est introduit un miroir dit de recyclage, qui réinjecte cette lumière et augmente ainsi la puissance présente dans l'interféromètre. Le facteur de recyclage (*gain en puissance*) γ_r envisagé est de l'ordre de 50, ce qui permet de passer d'une puissance initiale de 20 W à une puissance effective de l'ordre de 1 kW. Pour augmenter la sensibilité de l'interféromètre, des cavités FABRY-PÉROT (*cf la figure 2.2*) sont ajoutées dans les bras du détecteur. Elles amplifient la différence de phase due au déplacement d'un miroir par un facteur $2F/\pi$, où F est la finesse de la cavité. La finesse prévue est de l'ordre de 50, ce qui, pour des bras de 3 km de long, donne une longueur effective de 150 km. On peut donc calculer le temps de stockage de la lumière dans les cavités $\tau = 2FL/\pi c = 3 \times 10^{-4}$ s et la fréquence de coupure de la cavité $\nu_{fp} = 1/(2\pi\tau) \approx 500$ Hz. Au delà de cette fréquence, la détection d'une source sera limitée par le filtrage passe-bas induit par les cavités.

2.2 Bruits limitant la sensibilité de VIRGO

La sensibilité de VIRGO est limitée par le bruit de photons ainsi que par les divers bruits thermiques et sismiques. La description qui suit doit permettre de mieux

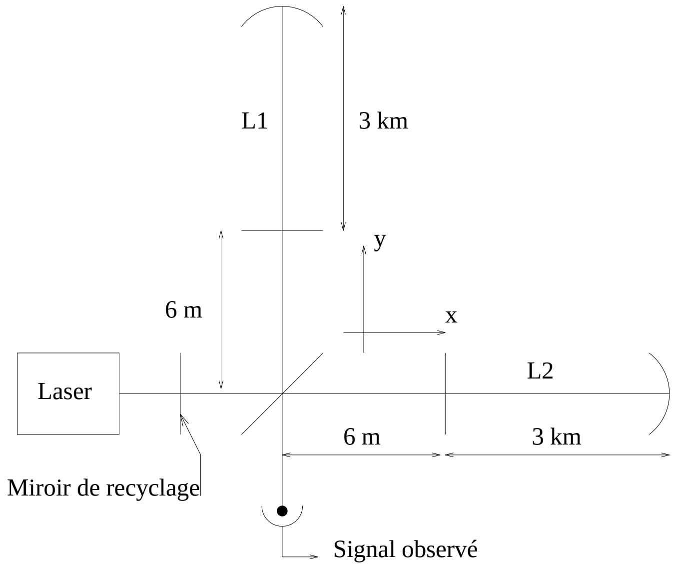


Figure 2.2: Schéma optique de VIRGO

comprendre le détecteur VIRGO.

2.2.1 Le bruit de photons

Le bruit de photons est dû à la fluctuation du nombre de photons observés. Si N est le nombre moyen de photons présents pendant un temps dt, les fluctuations statistiques nous donnent une incertitude $\sqrt{N}$ sur la mesure de N. De plus, pour minimiser la sensibilité aux variations de puissance du laser, on utilise la technique de modulation/démodulation à haute fréquence qui consiste en une modulation de la phase du laser et une démodulation synchrone du signal observé. L'erreur* δP sur la puissance observée P est alors :

$$\delta P \quad = \quad \sqrt{2\eta P\gamma_r h_P \nu_L} \; \frac{\mathrm{W}}{\sqrt{\mathrm{Hz}}} \tag{2.1}$$

où η est l'efficacité quantique des photo-diodes de détection et ν_L la fréquence du laser. En reliant la variation de puissance au déplacement d'un miroir, en prenant en compte l'effet d'amplification ainsi que le phénomène de filtrage des cavités FABRY-PÉROT,

Pour caractériser les diverses sources de bruit on utilise, dans VIRGO, leur densité spectrale, c'est-à-dire l'intégration du signal sur une seconde. On obtient alors un bruit en $1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. En effet, le bruit croissant comme $\sqrt{T}$ (T est le temps d'observation du signal*), on peut, à partir de la courbe obtenue (*courbe de sensibilité 2.4*) pour une seconde d'intégration, calculer quel sera le bruit pour un temps d'observation quelconque, en multipliant par $\sqrt{T}$ la courbe unité.

la densité spectrale du bruit de photons pour la mesure de h est :

$$\tilde{h}_{BP}(\nu) = \sqrt{\frac{2h_P\nu_L}{\eta\gamma_r P}}\frac{\pi\lambda}{4FL}\sqrt{1+\frac{\nu^2}{\nu_{fp}^2}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Hz}}} \tag{2.2}$$

où $\lambda = \frac{c}{\nu_L}$ est la longueur d'onde du laser.

2.2.2 Le bruit sismique

VIRGO est un interféromètre suspendu car, pour détecter les ondes gravitationnelles, il faut que les miroirs soient libres dans les directions de mesure. Il mérite d'autant plus ce nom qu'un système unique d'isolation sismique est utilisé. Il est fondé sur une succession de filtres passe-bas dont les fréquences de coupure sont les plus basses possibles afin d'atténuer les vibrations du sol dans la bande de fréquences de mesure. Les éléments de base de cette suspension sont des «filtres» qui agissent comme un pendule et comme un ressort vertical fonctionnant suivant les six degrés de liberté. En effet, compte tenu de l'énorme atténuation nécessaire, le déplacement du sol étant de l'ordre de 10^{-8} m/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$, il faut atténuer ces vibrations de plus de dix ordres de grandeurs dans toutes les directions, afin qu'elles n'induisent pas de déplacements longitudinaux au travers de couplages mécaniques faibles mais toujours présents.

Le système d'atténuation de VIRGO est constitué d'une chaîne de cinq atténuateurs, suspendue à un pendule inversé. Cette suspension est complétée par un double pendule, constitué du miroir et d'une masse de référence suspendus à une marionnette qui assure le contrôle. Cela donne huit filtres fréquentiels qui permettront à VIRGO d'obtenir la plus large bande de fréquences de tous les détecteurs d'ondes gravitationnelles. Le pendule inversé est constitué d'une masse attachée au sommet d'une barre flexible qui fournit la force de rappel pour ramener le pendule en position verticale. Cette force de rappel compense la force de gravitation et permet d'ajuster facilement la période du pendule. Ce pendule a une fréquence de résonance très faible : 100 mHz [14]. La figure 2.3 montre le schéma de suspension d'un miroir et la tour prévue pour placer la chaîne d'atténuateurs dans le vide.

On modélise le bruit sismique, $\tilde{h}_{BS}$, transmis au miroir par la formule suivante :

$$\tilde{h}_{BS}(\nu) = \frac{4}{L}\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^{16}|\tilde{x}(\nu)|_{sismique} \tag{2.3}$$

où $\nu_0 = 0,349$ Hz est la fréquence effective de l'ensemble de la chaîne pour des fréquences supérieures à la fréquence de coupure de chacun des pendules et filtres, ce qui est le cas dans le domaine de détection. Elle est obtenue par l'égalité suivante :

$$\nu_0^{16} = \nu_{marionette}^2\nu_{pendule\ miroir}^2\nu_{pendule\ invers\acute{e}}^2\Pi_{i=1}^5\nu_{filtre\ i}^2 \tag{2.4}$$

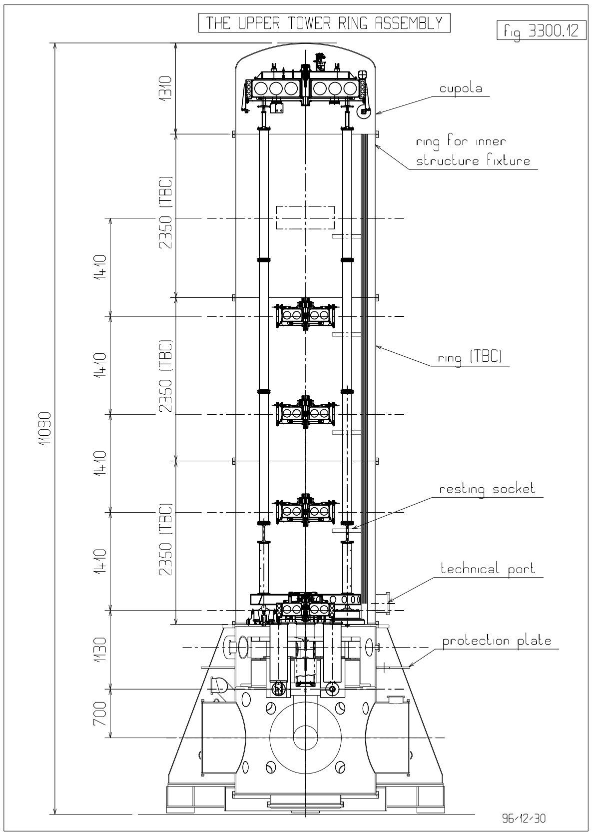


Figure 2.3: Suspensions du détecteur VIRGO

Le facteur 4 provient d'une part de la somme quadratique des bruits des quatre miroirs, d'autre part du fait qu'une erreur x simule une onde gravitationnelle $h = 2x/L$. Le bruit sismique mesuré sur le site est : $|\tilde{x}(\nu)|_{sismique} \approx 10^{-7}/\nu^2$ m/$\sqrt{\text{Hz}}$ pour des fréquences supérieures à 0, 3 Hz [15]. Le fait que le bruit dépende de la fréquence à la puissance dix-huit transforme ce bruit en un véritable «mur» à basses fréquences, et le rend négligeable pour des fréquences supérieures à quelques Hertz.

2.2.3 Le bruit thermique

Le bruit thermique provient de l'énergie thermique associée à chaque mode propre du miroir suspendu. Chaque degré de liberté recevant l'énergie $\frac{1}{2}k_BT$, la distribution spectrale de ce bruit dépend des propriétés mécaniques du mode considéré. En particulier, la distribution hors de la résonance dépend fortement des phénomènes dissipatifs mis en jeu. Pour modéliser ces phénomènes, on considère un oscillateur dont la constante de raideur k a une partie imaginaire. k devient alors $ke^{i\phi}$ (*il existe d'autres modèles plus complexes*). On va utiliser la description dissipative pour chacun des bruits thermiques qui suivent. Ces bruits seront ensuite ajoutés quadratiquement aux autres bruits pour donner la figure 2.4. On se place ici dans le cas où l'angle de perte ϕ est très faible et on obtient donc : $e^{i\phi} \approx 1 + i\phi$.

Le théorème de fluctuation-dissipation

Le théorème de fluctuation-dissipation [16] s'applique dans le cadre de mouvements non conservatifs et permet de connaître l'incertitude sur la mesure de position d'un objet à l'équilibre thermique. Dans le cadre d'une réponse à une excitation par une force $f = Fe^{i\omega t}$, on note $X = xe^{i\omega t}$ la position, $v = i\omega x$ la vitesse et $Z = F/v$ l'impédance du système. Alors :

$$\tilde{x}^2(\nu) = 4k_BT\frac{1}{(2\pi\nu)^2}Re\left[\frac{1}{Z(2\pi\nu)}\right] \tag{2.5}$$

Dans le cas d'un oscillateur simple dissipatif unidimentionel de masse m et de raideur $ke^{i\phi}$, l'équation du mouvement est la suivante :

$$\begin{aligned} m\ddot{X} + ke^{i\phi}X &= Fe^{i\omega t} && (2.6)\\ -m\omega^2 x + ke^{i\phi}x &= F && (2.7)\\ x &= \frac{F}{k\left(1+i\phi\right) - m\omega^2} && (2.8) \end{aligned}$$

d'où, en posant $\omega_0^2 = k/m$, $Z(\omega)$:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= m\omega_0^2\frac{1 + i\phi - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{i\omega} && (2.9)\\ \frac{1}{Z(\omega)} &= \frac{\omega\omega_0^2\phi + i\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{m\left[\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]^2 + \phi^2\omega_0^4\right]} && (2.10) \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de calculer le bruit thermique pour un oscillateur de fréquence propre ω_0 et d'angle de perte ϕ :

$$\tilde{x}^2(\omega) = 4k_BT\frac{\omega_0^2\phi}{m\omega\left[\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]^2 + \phi^2\omega_0^4\right]} \tag{2.11}$$

La difficulté majeure dans la prédiction de ce genre de bruit est de mesurer l'angle ϕ ainsi que les masses effectives entrant en jeu dans tous les modes qui peuvent résonner.

Bruit pendulaire

On ne s'intéresse qu'au bruit pendulaire des miroirs. En effet, les bruits des étages supérieurs sont du même ordre mais sont filtrés par la suspension. Calculons tout d'abord la forme du bruit thermique pendulaire pour un miroir seul. Pour cela on utilise le théorème de fluctuation-dissipation vu précédemment. Dans le cas du pendule de longueur $l = 0,7$ m, la pulsation de résonance est $\omega_p = \sqrt{g/l} = 3,74$ rad s^{-1}, ce qui correspond à une fréquence de $0,6$ Hz. Les fréquences utiles pour VIRGO sont donc grandes par rapport à celle-ci, ce qui justifie l'approximation suivante :

$$\tilde{x}^2(\omega) = 4k_BT\frac{\omega_p^2\phi}{m\omega^5} \tag{2.12}$$

En additionnant les contributions des miroirs des cavités, nous obtenons le bruit équivalent :

$$\tilde{h}_{BPend}(\omega) = \frac{2}{L}\sqrt{8k_BT\frac{\omega_p^2\phi}{\omega^5}\left(\frac{1}{m_e}+\frac{1}{m_f}\right)} \tag{2.13}$$

La masse des miroirs d'entrée est notée $m_e = 21,17$ kg et celle des miroirs de fond $m_f = 43$ kg. Le bruit final, pour une température $T = 300$ K et un angle de perte effectif $\phi = 10^{-6}$ (*en tenant compte du fait que les miroirs sont attachés par quatre fils de suspension [17]*), est :

$$\tilde{h}_{BPend}(\nu) = 2,18\times 10^{-20}\left(\frac{5\mathrm{Hz}}{\nu}\right)^{\frac{5}{2}} \tag{2.14}$$

Bruit des miroirs

Les miroirs eux mêmes peuvent vibrer. On peut, par exemple, modéliser un miroir comme deux masses reliées par un ressort. Les techniques de calculs par éléments finis permettent d'obtenir des valeurs de fréquences et de masses effectives relativement précises. Pour la géométrie des miroirs de VIRGO, les premiers modes sont à $5,7$ kHz pour les miroirs d'entrée et à $7,85$ kHz pour les miroirs d'extrémité, c'est-à-dire dans la partie hautes fréquences du spectre. Compte tenu de ces différents modes, le bruit thermique se modélise par :

$$\tilde{h}_{BMiroir}(\nu) = 1,47\times 10^{-23}\left(\frac{1000\ \mathrm{Hz}}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } \nu \ll 5,7\ \mathrm{kHz} \tag{2.15}$$

On utilise la formule complète pour tracer la courbe de sensibilité.

Modes violons

Les fils auxquels sont suspendus les miroirs vibrent telles les cordes d'un violon. Ces modes de vibration sont excités par le bruit thermique. Pour le modéliser, on ramène chaque résonance à un oscillateur à perte. La fréquence propre de chaque mode est un multiple d'une fréquence fondamentale qui elle même dépend de la section S du fil, de sa densité ρ, de sa longueur L et de la tension T_0 à laquelle il est soumis [15] :

$$\nu_n = n\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\rho S}} \tag{2.16}$$

Dans notre cas particulier, cela donne :

- $\nu_e = 327$ Hz pour les miroirs d'entrée
- $\nu_f = 308,6$ Hz pour les miroirs d'extrémité

La masse équivalente de chaque mode est :

$$\mu_{n,e} = \frac{m_e\omega_{n,e}^2}{2\omega_p^2} \tag{2.17}$$

$$\mu_{n,f} = \frac{m_f\omega_{n,f}^2}{2\omega_p^2} \tag{2.18}$$

où $\omega_p = 3,74$ rad.s^{-1} correspond à la pulsation propre du mode pendulaire.

Pour obtenir le bruit total, on n'additionne que sur les dix premiers modes, les modes supérieurs ayant une contribution négligeable à basses fréquences (*de l'ordre* $2 \times 10^{-2}\%$). On prend $\phi_n = \phi = 10^{-6}$ [15], d'où le bruit en amplitude relative :

$$\tilde{h}_{Violons}(\omega) = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{8k_BT}{\omega}}\sqrt{\sum_{n=1}^{10}\frac{\phi\omega_{n,e}^2}{\mu_{n,e}\left[\left(\omega_{n,e}^2-\omega^2\right)^2+\phi^2\omega_{n,e}^4\right]}+\sum_{n=1}^{10}\frac{\phi\omega_{n,f}^2}{\mu_{n,f}\left[\left(\omega_{n,f}^2-\omega^2\right)^2+\phi^2\omega_{n,f}^4\right]}}$$

Il est interéssant de noter que seules les résonances ressortent dans la courbe de sensibilité.

2.2.4 Autres bruits

Il existe bien d'autres sources possibles de bruit. Par exemple le bruit introduit par les fluctuations d'indice optique du gaz résiduel qui nous impose la qualité de vide nécessaire ($P < 10^{-8}$ torr) [14], le bruit d'amplitude ou de fréquence du laser [17], les bruits provenant des systèmes de contrôle, le bruit des photons diffusés dans les cavités FABRY-PÉROT [18] *etc...* Cependant, moyennant des efforts importants, ces différents bruits techniques peuvent être ramenés à un niveau suffisamment faible pour pouvoir être négligeables par rapport aux bruits précédemment décrits.

2.2.5 Courbe de bruit

Le bruit total est la somme quadratique de tous les bruits présentés précédemment. La figure 2.4 rassemble tous ces bruits et présente la somme quadratique de ceux-ci en équivalant signal après un an d'observation. Afin d'illustrer les espoirs mais aussi les aléas de la recherche d'étoiles à neutrons, la distribution de h_{max} pour les pulsars connus (*figure 1.5*) est aussi tracée sur cette courbe. Rappellons que h_{max} est l'amplitude maximum des ondes gravitationnelles émises pour un pulsar connu, évaluée à partir du ralentissement de leur rotation. Cette valeur ne tient pas compte des pertes dues aux effets de modulation d'amplitude. On peut remarquer que quelques candidats sont au dessus de la courbe de bruit.

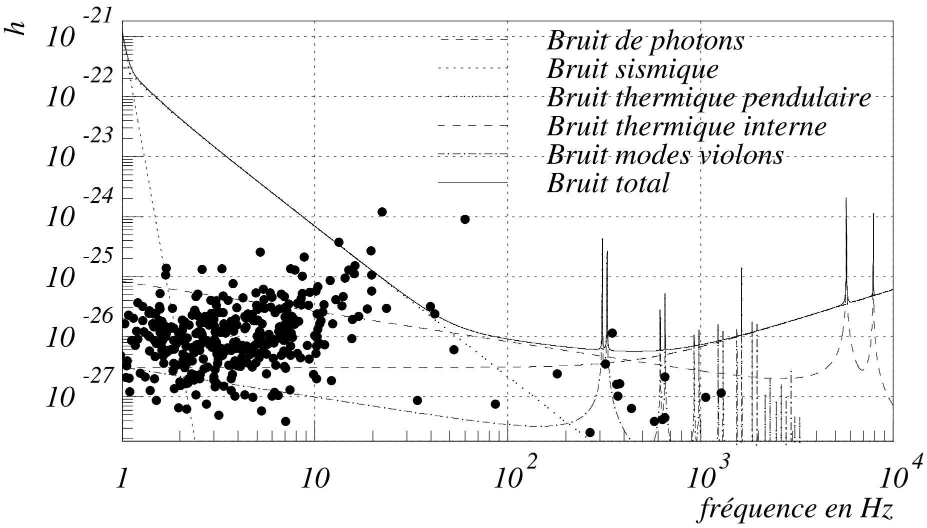


Figure 2.4: Niveau du bruit du détecteur VIRGO pour un an d'observation ainsi que l'amplitude maximum des pulsars connus

2.3 Autres détecteurs d'ondes gravitationnelles

La revue qui suit présente d'autres méthodes et projets de détection d'ondes gravitationnelles.

2.3.1 LIGO

LIGO est un projet américain [19] constitué de trois interféromètres placés dans deux enceintes à vides qui auront des bras de 4 km. Ils seront placés à plusieurs milliers de kilomètres l'un de l'autre avec une même orientation des bras. Ceci permettra la détection en coïncidence, technique particulièrement importante pour pouvoir exclure les bruits non-gaussiens lors de la recherche de sources impulsionnelles (*coalescences de systèmes binaires ou les super novae*) et la détection de signaux d'ondes gravitationnelles provenant de sources dont l'émission est aléatoire.

La différence essentielle entre la conception de VIRGO et celle de LIGO réside dans le choix de l'isolation du bruit sismique qui est moins ambitieuse dans le cas de LIGO, et déplace la fréquence de coupure du bruit sismique vers de plus hautes fréquences (*de l'ordre de* 50 *Hz*) au lieu de 1 Hz dans le cas de VIRGO.

Ce projet devrait commencer à prendre des données en l'an 2000.

2.3.2 GEO

Le détecteur GEO600 est le fruit d'une collaboration Germano-Britannique [20]. Comme son nom l'indique, il a des bras de 600 m de long. Pour compenser la faible taille de leurs bras, un double recyclage de la lumière laser est effectué. Ceci réduit la taille de la bande de fréquences d'observation, mais, contrairement aux détecteurs à barre, ce détecteur peut placer cette petite bande de fréquences où il le veut. Le projet complet commencera à prendre des données au printemps 2000.

2.3.3 TAMA

TAMA est un projet Japonais [21]. La longueur des bras est de 300 m. Ce projet est en fait un prototype pour mettre au point plusieurs techniques et ensuite les mettre en œuvre dans le cadre d'un projet plus grand.

2.3.4 LISA

Le projet LISA quant à lui, est un projet d'interféromètre qui doit fonctionner dans l'espace vers l'année 2017 [22]. Sa configuration, figure 2.5, et la longueur de ses bras $\approx 5 \times 10^6$ km diffèrent des autres interféromètres.

Les trois distances L_1, L_2, et L_3 sont mesurées séparément. Du fait de la longueur des bras, la bande de fréquences est limitée à quelques centaines de mHz. Le fait de placer le détecteur dans l'espace l'affranchit des problèmes du bruit sismique. La fréquence minimale d'observation serait de l'ordre de $0,1$ mHz. Les sources qu'un tel détecteur pourrait observer sont des ondes gravitationnelles émises lors du Big-Bang, par des trous noirs massifs ou des systèmes binaires galactiques, et par les systèmes binaires connus.

2.3.5 Barres et détecteurs omnidirectionnels

Les détecteurs à barres sont les premiers détecteurs à avoir été mis en œuvre. Ils prennent des données depuis déja plus de 30 ans (*première barre par* WEBER *en* 1966).

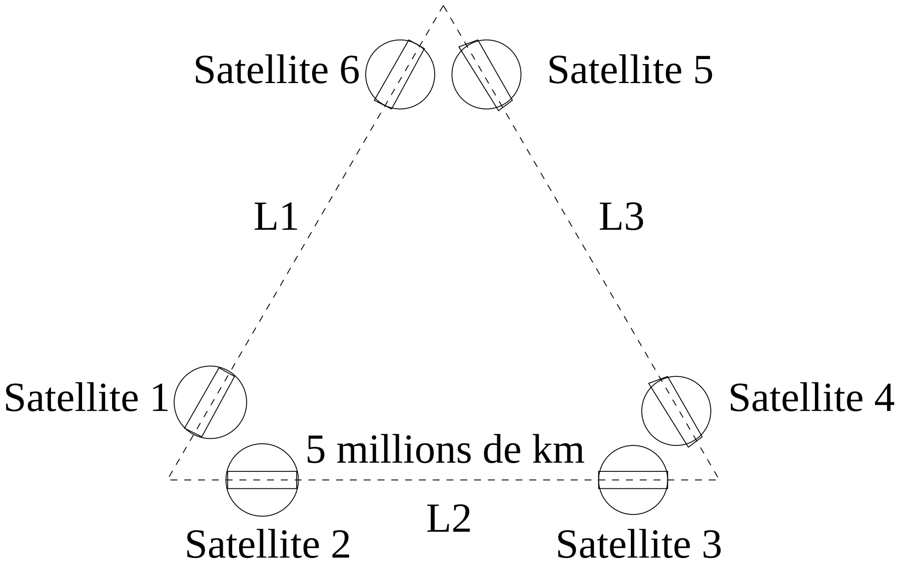


Figure 2.5: Schéma du détecteur LISA

La meilleure sensibilité atteinte pour l'instant est de l'ordre de 10^{-18} Hz$^{-\frac{1}{2}}$. Ils sont constitués d'une grosse masse qui réagit comme un ressort dont les oscillations forcées dues au passage d'une onde gravitationnelle font rentrer en résonance le détecteur.

L'énergie E emmagasinée par le ressort, lorsque la fréquence de l'onde et celle du ressort sont en résonance, est [23] :

$$E \simeq \frac{1}{16} m l_0^2 \Omega^2 h^2 Q^2 \tag{2.19}$$

où Ω est la fréquence propre du ressort.

Pour une fréquence propre de l'ordre de 1 kHz, une masse de 1500 kg, un haut facteur de qualité 10^5, et une longueur de $1,5$ m, l'onde gravitationnelle dépose une énergie de l'ordre de quelques 10^{-21} J, ce qui correspond à une élongation du ressort de l'ordre de 10^{-15} m (*diamètre d'un noyau atomique*).

Cependant, la faible largeur de la bande de fréquences de ce type de détecteur ne permet de rechercher qu'un petit nombre de pulsars connus.

La principale source de bruit pour ce genre de détecteur est le bruit thermique. Pour le réduire, on plonge le détecteur dans de l'hélium liquide. Ce qui suit est une liste de barres en fonctionnement.

Nom	masse	température	fréquences de résonance	lieu
NAUTILUS [24]	2300 kg	$0,1$ K	908 et 924 Hz	LNF Italie
EXPLORER [24]	2300 kg	2 K	906 et 923 Hz	CERN
ALLEGRO [25]	2300 kg	$0,2$ K	907 Hz	Louisiane

Le principe du détecteur omnidirectionnel est une généralisation du principe des détecteurs à barre. La différence réside dans la forme du ressort. Ici le ressort est une sphère, ce qui permet d'exciter le détecteur quelle que soit la direction de l'onde. La mesure de la longueur du détecteur dans trois directions orthogonales permet, en calculant le pourcentage des divers modes excités dans la sphère, de trouver la direction d'origine de l'onde gravitationnelle. Seul ce type de détecteur permet une telle localisation pour tout type de signal. Deux projets sont actuellement en cours d'étude GRAIL [26] et TIGA [27].

Chapitre 3

Étalonnage de VIRGO

ETALONNER LE DÉTECTEUR VIRGO, c'est établir la relation quantitative entre le signal d'onde gravitationnelle et le signal mesuré. Ceci peut se faire en analysant de manière détaillée le fonctionnement de l'interféromètre et en combinant notre connaissance des différents composants (*efficacité des photodiodes, gain des convertisseurs analogique numérique, fonction de transfert de l'interféromètre,...*). Cependant, pour minimiser le risque d'erreurs, nous allons chercher une ou des méthodes indépendantes et les plus directes possibles afin de pouvoir établir directement cette relation et ainsi vérifier ces calculs. Le signal que l'on veut observer correspond à une variation de longueur des bras de l'interféromètre. Pour étalonner le détecteur, il faut donc déplacer les miroirs. Reste à savoir comment. Les caractéristiques suivantes sont nécessaires pour un système optimal d'étalonnage :

- un générateur de signal indépendant du reste du détecteur
- une bonne dynamique (*plusieurs ordres de grandeurs*) dans l'amplitude et la forme du signal
- une bonne connaissance *a priori* de la réaction du détecteur aux stimuli du système d'étalonnage
- pas d'introduction de bruit additionnel

Parmi les nombreuses solutions possibles, deux solutions ont été retenues pour VIRGO [14] :

- l'addition d'un signal supplémentaire sur les bobines de contrôle du système d'asservissement des miroirs
- une force exercée par la pression de radiation d'un laser additionnel

La réalisation de la première méthode est plus simple car sa mise en œuvre ne nécessite *a priori* que peu de matériel supplémentaire. Mais elle n'est pas indépendante du système de contrôle de VIRGO puisqu'elle doit utiliser le système de pilotage des bobines. Il faudra donc étalonner séparément ce système avant de pouvoir l'utiliser pour le détecteur. La seconde méthode est plus indépendante puisqu'elle possède son propre générateur de signal, son propre système d'horloge et que le détecteur VIRGO pourra fonctionner sans elle. De plus, cet appareillage peut être utilisé pour étudier la stabilité de la fonction de transfert au cours du temps en réalisant une surveillance permanente entre deux périodes d'étalonnage. Pour cela, il émet en permanence une sinusoïde de fréquence, et d'amplitude, données. Ceci permet de surveiller toute dérive de la fonction de transfert dans la région de la fréquence utilisée. Dans la première phase du détecteur, ce système permettra aussi de tester les différentes boucles d'asservissement, qui servent à verrouiller l'interféromètre sur la frange noire, jusqu'à ce que le signal soit exploitable. C'est l'appareillage nécessaire à la mise en œuvre de la deuxième méthode que nous allons maintenant détailler dans ce chapitre.

3.1 Principe utilisé

Pour simuler le passage d'une onde gravitationnelle, nous allons exciter les miroirs d'entrée séparément ou simultanément afin de faire varier la longueur d'un seul ou des deux bras. Cette excitation sera produite par une source lumineuse *via* sa pression de radiation pour obtenir une action à distance facilement contrôlable. Le système comprend en fait :

- un générateur de signaux électriques
- une source lumineuse
- un système de contrôle
- des miroirs de VIRGO (*ceux d'entrée*)

La figure 3.1 détaille chaque partie du système d'étalonnage*. L'ensemble générateur de signal est groupé avec une partie du système de contrôle du signal dans un même chassis d'électronique. Afin de pouvoir étudier en détail la fonction de transfert de l'interféromètre et de bénéficier d'une certaine redondance, chacun des bras de l'interféromètre sera équipé d'un système d'étalonnage. Ils seront installés sur les miroirs d'entrée ce qui permet d'utiliser un seul chassis d'électronique de contrôle et de génération du signal.

*GPS, CNA et CAN désignent respectivement une horloge utilisant le système de satellites GPS, un convertisseur numérique-analogique et un convertisseur analogique-numérique.

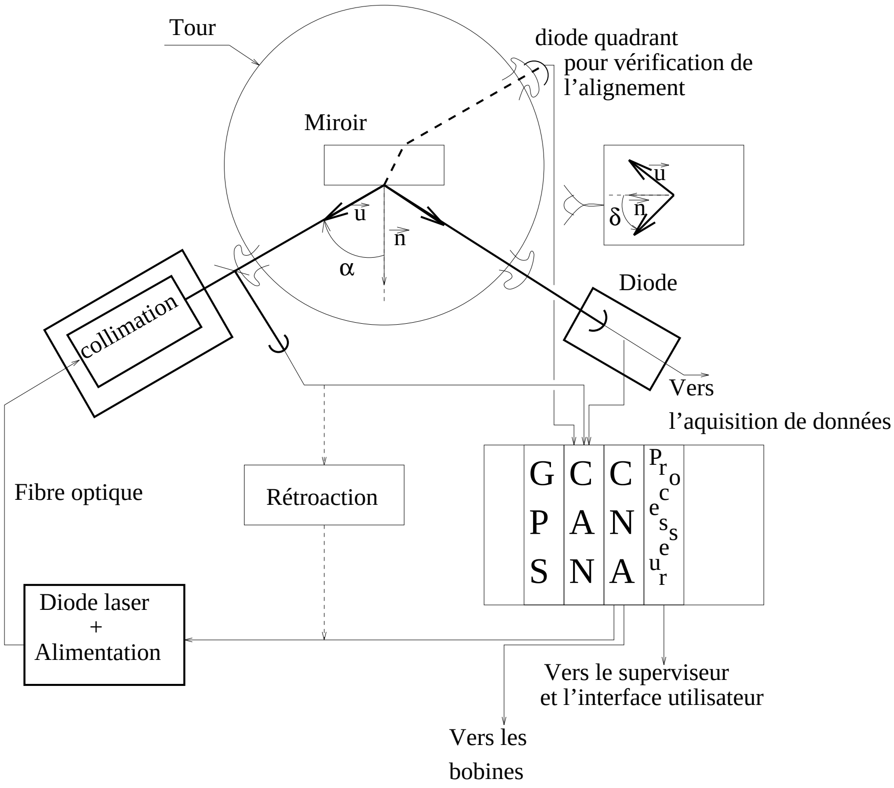


Figure 3.1: Configuration finale du système d'étalonnage monté sur la tour

3.2 Génération du signal

On veut pouvoir pousser les miroirs avec n'importe quelle forme de signal. Pour cela un processeur calcule la forme des signaux. Ces données sont transférées à une carte CNA qui génère une tension variable. La carte CNA choisie comporte quatre voies de sortie sur 16 bits, équipées chacune d'une pile «FIFO»[†].

3.3 La source lumineuse

La source lumineuse utilisée est une diode laser dont la puissance est modulée par la tension fournie par le convertisseur numérique-analogique. Nous avons choisi une diode laser pour sa facilité de collimation et pour sa réponse relativement linéaire en puissance à une modulation de son alimentation.

Le choix de la longueur d'onde est dicté par le coefficient de réflexion des miroirs d'entrée. Celui-ci varie fortement en fonction de la longueur d'onde et de l'angle d'incidence comme le montre la figure 3.2. Compte tenu de la géométrie de l'enceinte

[†]«FIFO» est une abréviation de First In-First Out.

à vide, l'angle d'incidence utilisé est de l'ordre de 65°. La longueur d'onde choisie est de 860 nm afin d'obtenir le meilleur coefficient de réflexion, $R \approx 97\%$, et pour avoir la plus faible variation de R due aux ± 5 nm de variation de la longueur d'onde de la diode. De plus, cette longueur d'onde est différente de celle du laser principal et n'est pas modulée en phase, ce qui permet d'éviter tout risque de confusion avec le faisceau principal.

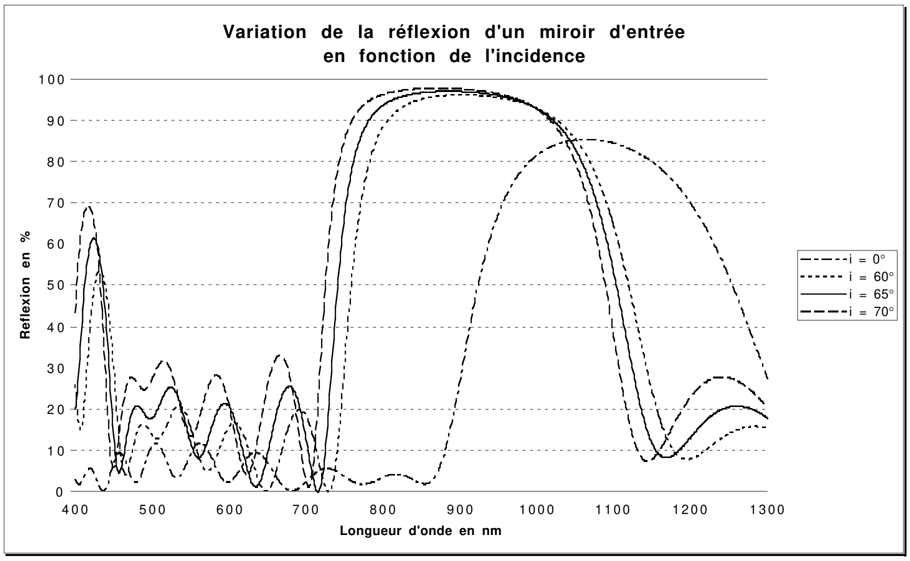


Figure 3.2: Coefficient de réflexion d'un miroir d'entrée en fonction de la longueur d'onde pour plusieurs angles d'incidence : 0, 60, 65 et 70°

Le système d'étalonnage doit pouvoir fonctionner dans toute la bande de fréquences de VIRGO, soit jusqu'à quelques kilohertz. La mesure de la fonction de transfert de la diode laser montre qu'elle peut fonctionner jusqu'à des fréquences supérieures d'un ordre de grandeur (*figure 3.3*). La réponse en puissance de la diode laser à une sinusoïde présente plusieurs pics à des fréquences multiples de la fréquence d'excitation montrant ainsi la non linéarité de la diode (*figure 3.4*). Un bruit blanc et continu est aussi présent à un niveau tel qu'il pourrait augmenter le bruit de l'interféromètre. Un système analogique d'asservissement sera donc nécessaire pour stabiliser la puissance lumineuse et corriger ces effets.

3.4 Contrôle du signal

Le contrôle consiste à mesurer la puissance réfléchie par le miroir au cours du temps. Ce signal sera échantillonné à la même fréquence que les principaux signaux de l'interféromètre et enregistré par le système d'acquisition de VIRGO. Une diode

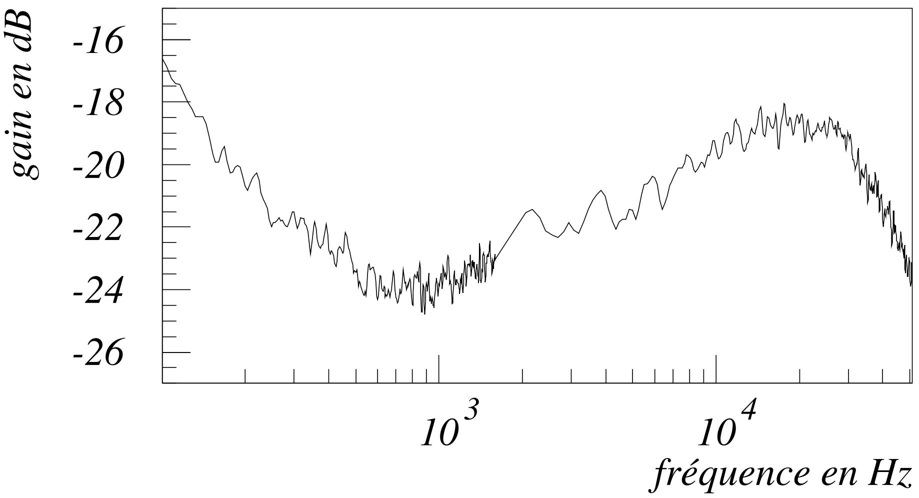


Figure 3.3: Mesure de la fonction de transfert de l'ensemble alimentation/diode laser

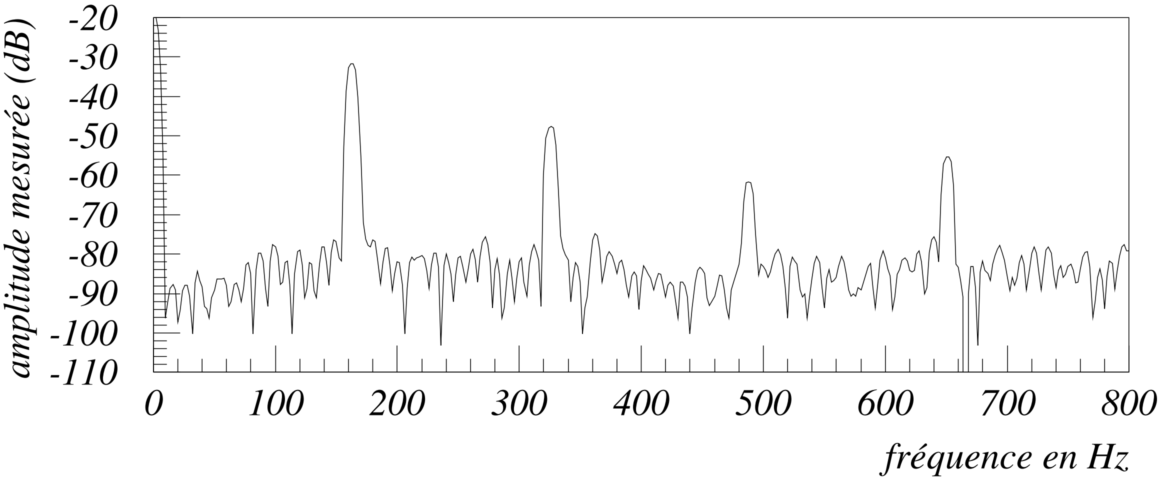


Figure 3.4: Réponse en puissance de la diode laser à une sinusoïde de fréquence 163 Hz

quadrant placée sur le faisceau transmis vérifiera la stabilité angulaire du faisceau.

3.5 Calcul de la fonction de transfert du miroir

La force $\vec{F}$ appliquée sur le miroir est due à la pression de radiation d'un laser. Elle résulte de la quantité de mouvement que transmettent les photons lors de leur réflexion par le miroir. Soit i l'angle d'incidence sur le miroir, R le coefficient de réflexion et P la puissance émise par le laser, alors :

$$\vec{F} = \frac{2RP\cos i}{c}\vec{x} \tag{3.1}$$

Pour évaluer la force d'excitation, il nous faut l'angle d'incidence i. Il est calculé en connaissant la configuration exacte du système dans sa version finale. La figure 3.1 représente une vue de dessus du système quand il sera installé ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$. Il est important de noter que le faisceau lumineux ne se trouve pas dans le plan horizontal, du fait de la configuration de la tour. En prenant le cosinus inverse du produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{n}$, on obtient l'angle d'impact $\cos i = \cos\alpha\cos\delta$, où $\alpha = 62,54°$ est dans le plan horizontal et $\delta = 23,97°$ dans le plan vertical (*en tenant compte de l'épaisseur du miroir*). On en déduit l'angle d'impact entre $\vec{u}_1$ et la normale du miroir $\vec{n}$, $i = \arccos(\vec{u}_1\cdot\vec{n}) = 65,08°$. Un des problèmes du principe d'étalonnage par pression de radiation est que toute la chaîne d'atténuateurs est excitée. Dans les fréquences qui nous intéressent, le miroir est en chute libre avant que l'on applique une quelconque correction. Pour un laser d'une puissance d'un watt on obtient $F = 2,7\times10^{-9}$ N.

La position x d'un miroir libre de masse m réagirait à une force $Fe^{i\Omega t}$, à la pulsation Ω, comme suit : $x = -e^{i\Omega t}F/(m\omega^2)$. Voyons si l'excitation que l'on applique reste bien dans le domaine de liberté des miroirs.

Pour connaître le déplacement total, il faut étudier la somme complète des mouvements des cinq filtres, du pendule inversé, de la marionnette et du miroir, ce qui est réalisé dans l'annexe B. La figure 3.5 montre le déplacement du miroir le long de l'axe du faisceau.

La figure 3.6 nous montre le rapport entre la réponse de notre miroir suspendu à sa longue chaîne de filtres et celle d'un miroir libre. La réponse à l'excitation peut être considérée comme libre à partir de 4 Hz (*la différence est de l'ordre de* 2%).

Le déplacement $x(\nu)$ que produit la diode laser est proportionnel à la puissance de la diode. En se plaçant à l'approximation de masse libre, le déplacement s'écrit :

$$x(\nu) = \frac{2PR\cos i}{mc4\pi^2\nu^2} \tag{3.2}$$

La courbe de sensibilité 2.4 nous permet alors de calculer la puissance nécessaire pour atteindre la sensibilité de VIRGO pendant l'étalonnage après une seconde

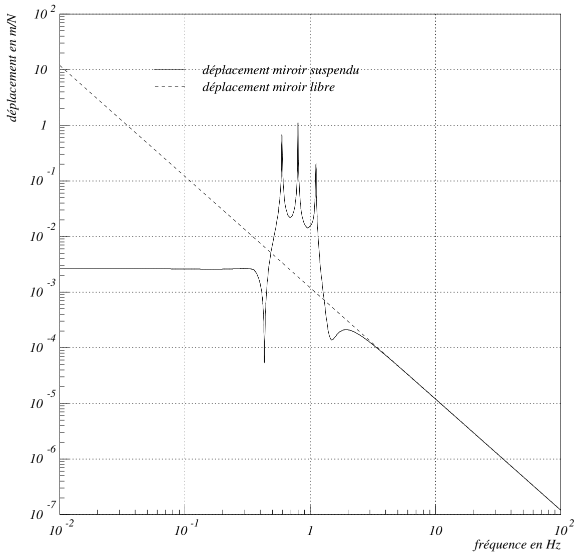


Figure 3.5: Amplitude du déplacement du miroir suspendu sous l'excitation d'une force de 1 N, et le déplacement d'un miroir libre

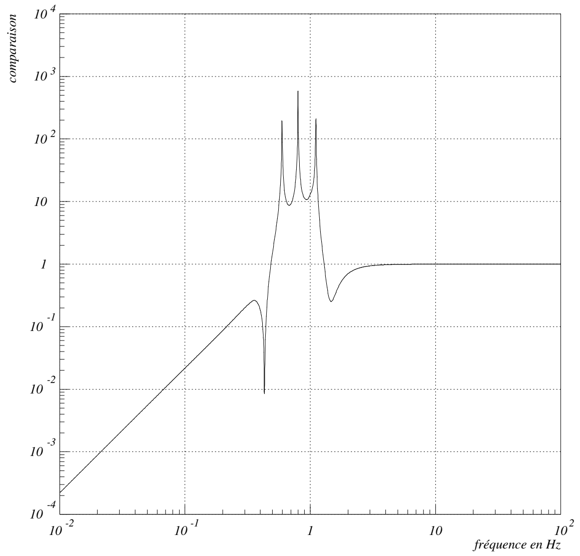


Figure 3.6: Rapport entre la fonction de transfert du miroir suspendu et celle du miroir libre, sous l'excitation d'une force de 1 N

d'intégration : $x(\nu) = \frac{L}{2}\tilde{h}(\nu)$.

$$\frac{L}{2}\tilde{h}(\nu) = \frac{PR\cos i}{mc2\pi^2\nu^2} \tag{3.3}$$

$$P = \frac{mc4\pi^2\nu^2 L\tilde{h}(\nu)}{R\cos i} \tag{3.4}$$

On multiplie cette puissance par deux, par rapport à la puissance donnée par l'équation (3.4), car on ne peut tirer le miroir. La force oscille donc autour d'une valeur moyenne qui est donnée par l'équation (3.4). La figure 3.7, montre qu'avec un laser de puissance 1 W, on peut atteindre la plus grande partie du spectre de VIRGO, de 4 Hz à 3 kHz, après seulement une seconde d'intégration. C'est pourquoi notre choix s'est porté sur une diode laser d'un puissance maximum de 5 W. En l'utilisant en sous régime, son temps de vie est multiplié par le taux de réduction de la puissance au carré. De plus, cela nous permet d'envisager des déplacements un peu plus important, forts utiles au moment des premiers tests de VIRGO qui se feront probablement à sensibilité réduite.

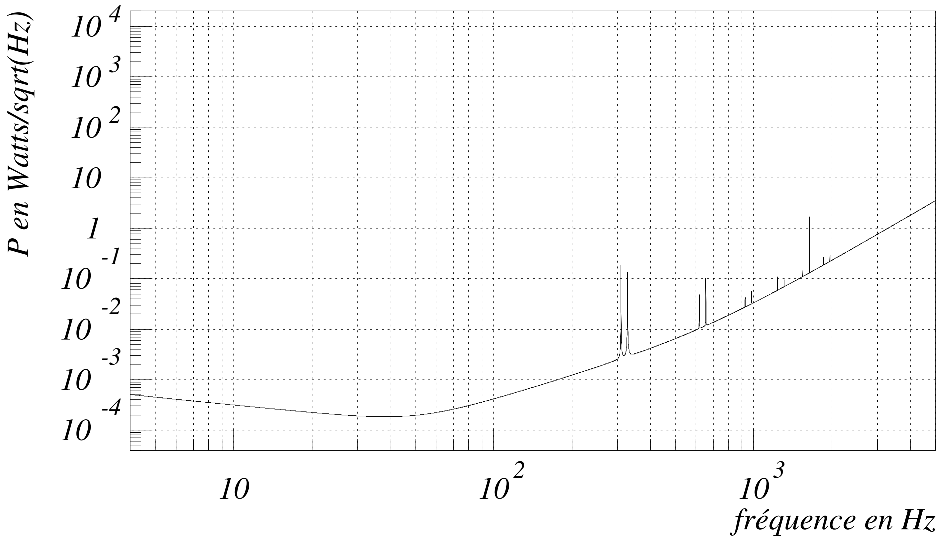


Figure 3.7: Puissance du laser nécessaire pour atteindre la sensibilité de VIRGO

Chapitre 4

Simulation du détecteur Virgo

SIMULER LE DÉTECTEUR VIRGO se révèle primordial pour certains choix, tant au niveau des stratégies possibles pour le verrouillage de l'interféromètre qu'au niveau des études des méthodes d'analyse de données. Une simulation complète de VIRGO, appelée SIESTA*, répond à ce besoin. Cette simulation est organisée en plusieurs modules modélisant les différentes parties de VIRGO et certains signaux d'ondes gravitationnelles. Ainsi, l'ensemble des bruits décrits dans le chapitre 2 peut être simulé. Dans ce chapitre, nous allons décrire plus particulièrement la bibliothèque de modules qui simule le signal provenant d'une étoile à neutrons. Certains modules seront décrits plus en détail, comme par exemple le module calculant la position de la terre au sein du système solaire et les changements de référentiels nécessaires pour calculer les effets du passage d'une onde gravitationnelle sur le détecteur.

4.1 Moteur de SIESTA

La simulation du détecteur VIRGO, SIESTA, fonctionne dans le domaine temporel. Elle est constituée de modules écrits en langage C. Chaque module contient le code pour un ou plusieurs types d'objets dont l'état ne dépend que du temps. L'exécution type d'un travail de simulation comporte quatre étapes :

- la lecture d'un fichier contenant la liste des objets à simuler et les liens entre ceux-ci
- l'initialisation des objets
- la simulation au cours du temps de l'ensemble des objets
- la terminaison des objets à la fin de la simulation

*pour Simulation of Interferometric Experiment Sensitive To grAvitational waves [28]

Les objets sont traités de manière équivalente lors de toutes ces étapes sauf au cours de la simulation au cours du temps. Là, les objets sont appelés en fonction d'une fréquence qui a été déclarée pour chacun d'eux. Ceci permet de respecter, pour chaque phénomène physique, son temps propre. Les modules permettent de simuler la quasi-totalité des phénomènes physiques entrant en jeu dans VIRGO :

- bruit thermique, sismique, *etc...*
- optique, électronique de VIRGO

4.2 Simulation du bruit de l'interféromètre

La simulation SIESTA peut générer différents bruits allant du bruit thermique au bruit sismique en passant par le bruit de photons. La figure 4.1 est un exemple de la transformée de FOURIER pour une seconde de données générées en prenant en compte le bruit de photons, le bruit thermique pendulaire, le bruit thermique interne des miroirs et le bruit thermique généré par les fils de suspension des miroirs. Des signaux d'ondes gravitationnelles peuvent être ajoutés à ce bruit. Ceci fait de la simulation un outil très utile pour des études réalistes d'analyse de données.

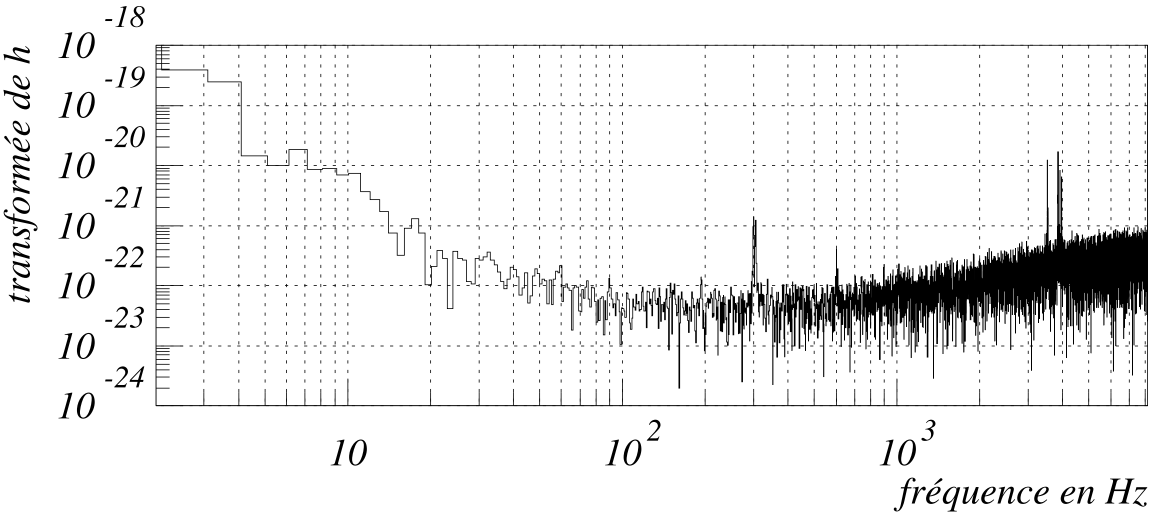


Figure 4.1: Transformée de FOURIER des bruits simulés avec SIESTA

4.3 Simulation du signal d'une étoile à neutrons

Le signal émis par une étoile à neutrons, $h_+(t)$ et $h_\times(t)$, est simulé à l'aide d'une somme de cosinus et de sinus aux fréquences simple et double de la source suivant les équations (1.44) et (1.45). L'effet DOPPLER est ensuite inclu en rajoutant une phase qui correspond à la propagation de l'onde : $\vec{k} \cdot \vec{r}(t)$. Le vecteur de propagation $\vec{k}$ est un paramètre défini par l'utilisateur et $\vec{r}(t)$ décrit la position de la source par rapport au détecteur au cours du temps. Un changement de repère est effectué afin d'obtenir la variation de longueur des bras de l'interféromètre. Enfin les bruits instrumentaux peuvent être ajoutés pour obtenir un signal tel qu'il serait produit par VIRGO. Détaillons un peu plus ces différentes étapes.

4.4 Position du détecteur dans l'espace

Pour pouvoir tenir compte correctement de l'effet DOPPLER, il faut connaître la position du détecteur à une fraction de longueur d'onde du signal gravitationnel près [29]. Pour des signaux à un kilohertz, la longueur d'onde est de 300 km et nous montrerons de manière plus précise dans le chapitre 5 qu'il est nécessaire de connaître la position du détecteur dans le système solaire avec une précision de l'ordre de 15 km (*la source étant considérée immobile par rapport au Soleil*). Décrire la trajectoire par une simple ellipse n'est pas suffisant. En effet, considérons l'effet de la Lune sur la position de la Terre. C'est le barycentre Terre-Lune qui a pour trajectoire une ellipse car c'est ce système qui subit l'attraction du Soleil. La distance TB du centre de la Terre au barycentre Terre-Lune est la suivante :

$$\begin{aligned} TB &= \frac{M_L}{M_L + M_T} TL \qquad (4.1) \\ &= 4669 \text{ km} \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Où $TL = 384401$ km est la distance Terre-Lune et M_T et M_L sont les masses de la Terre et de la Lune (6×10^{24} *kg et* $7,3 \times 10^{22}$ *kg*). La distance TB est à elle seule plus grande que l'erreur tolérée, et il faut malheureusement tenir compte aussi des autres planètes. Pour preuve, la figure 4.2 montre la position de la Terre sur dix ans hors du plan de l'écliptique en tenant compte de la position de l'ensemble des planètes (*excepté Pluton*) et des effets relativistes. Une trajectoire simplement elliptique produirait une valeur constante et nulle, alors que l'effet observé se situe à plusieurs ordres de grandeur au dessus de ce que que l'on peut tolérer. Pour prendre en compte tous ces effets, on utilise une fonction du Bureau des longitudes [30] de PARIS, qui donne la position de la Terre avec une erreur de l'ordre de 2 km. Cette fonction, après avoir été traduite en langage C, a été inclue dans la simulation de l'interféromètre VIRGO : SIESTA. La rotation journalière de la Terre est également inclue, en tenant compte de sa fréquence de rotation effective $\frac{1}{86164}$ Hz.

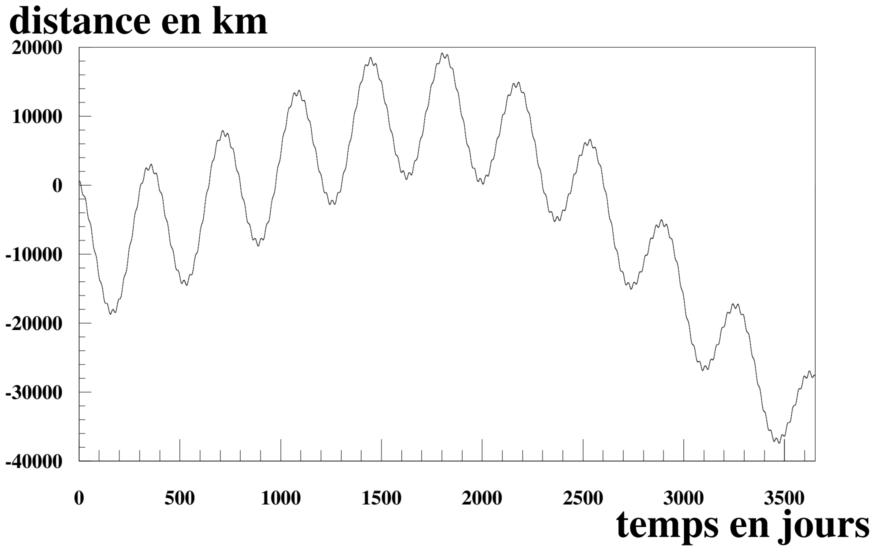


Figure 4.2: Position de la terre hors du plan de l'écliptique, en km

4.5 Validité de l'effet Doppler dans SIESTA

Pour vérifier que l'effet DOPPLER a bien été pris en compte dans la simulation, il suffit d'observer la fréquence d'une étoile à neutrons au cours du temps. Si on choisit bien la position de l'étoile à neutrons, on peut calculer facilement la vitesse qui est en jeu.

On va donc dans un premier temps observer la fréquence d'une étoile à neutrons se trouvant au pôle nord équatorial. Dans ce cas, on ne sera sensible qu'à la vitesse de la Terre dans le plan de l'écliptique. L'amplitude maximale de l'effet DOPPLER est donnée par la projection de cette vitesse sur l'axe de visée. Pour une étoile à neutrons placée au pôle nord équatorial, on doit obtenir au plus $\sin\alpha = 39.8\%$ de la vitesse de la Terre autour du Soleil, ce qui donne $V_{eff} \approx 12000$ m s^{-1} (*où* $\alpha = 23°26'$ *est l'angle entre le plan de l'écliptique et le plan équatorial*). La figure 4.3 montre la fréquence ν observée au cours du temps pour une étoile à neutrons de 50 Hz placée au pôle nord équatorial. La fréquence est mesurée par transformée de FOURIER sur 65536 s tous les dix jours. On peut traduire la fréquence observée en une vitesse effective de la Terre, $V_{eff} = \frac{\Delta\nu}{\nu}c$. La figure 4.3 nous permet d'observer les 12000 m s^{-1} attendus.

On peut refaire ce travail pour une étoile à neutrons se trouvant dans le plan de l'équateur. La vitesse du détecteur sera alors la somme de la vitesse de la Terre autour du Soleil et celle de la rotation propre de la Terre. La première, sur un jour d'étude peut être considérée comme produisant un décalage permanent de la fréquence. On ne verra alors que l'effet dû à la rotation propre de la Terre, qui doit donner, pour un détecteur sur l'équateur et une étoile à neutrons dans ce même plan, $\Delta V_{eff} \approx$

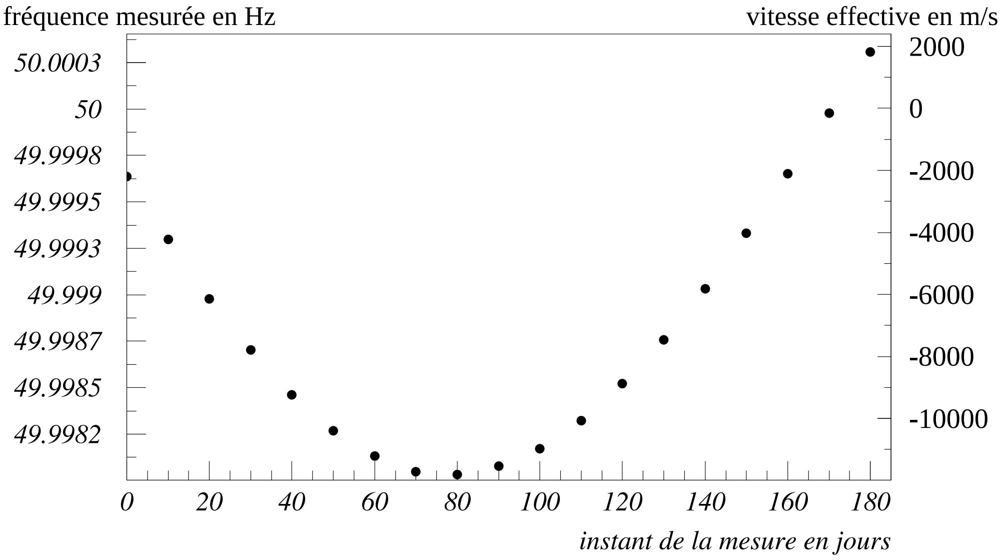


Figure 4.3: Décalage de la fréquence dû à l'effet DOPPLER sur six mois et vitesse effective correspondant pour une étoile à neutrons placée au pôle nord équatorial

465 m s^{-1}. La figure 4.4 montre la fréquence et la vitesse mesurées toutes les heures pour une étoile à neutrons de $511,5$ Hz placée dans le plan de l'équateur (*la fréquence ici est plus importante pour augmenter l'effet* DOPPLER *car on dispose de moins de temps pour le mesurer*). La vitesse maximum mesurée est de $\Delta V_{eff} \approx 500$ m s^{-1}, en accord avec la valeur prévue. La faible différence provient de la rotation de la Terre autour du Soleil.

4.6 Changement de repère

Le tenseur métrique peut être écrit (*cf chapitre 1*) dans son référentiel de propagation comme suit :

$$H_p = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

où h_+ et $h_\times$ sont décrits par les équations (1.44) et (1.45). On note α et δ les coordonnées équatoriales de la source d'ondes gravitationnelles, et ψ l'angle de polarisation†. La position du détecteur peut être donnée, en coordonnées équatoriales, par la longitude $\alpha'(t) = \alpha'(t)_0 + \frac{2\pi}{86164}(t - t_0)$, λ la latitude, et θ l'angle entre l'axe ouest-est et le

†Les angles α, δ et ψ sont les angles d'EULER du repère de propagation, en coordonnées équatoriales

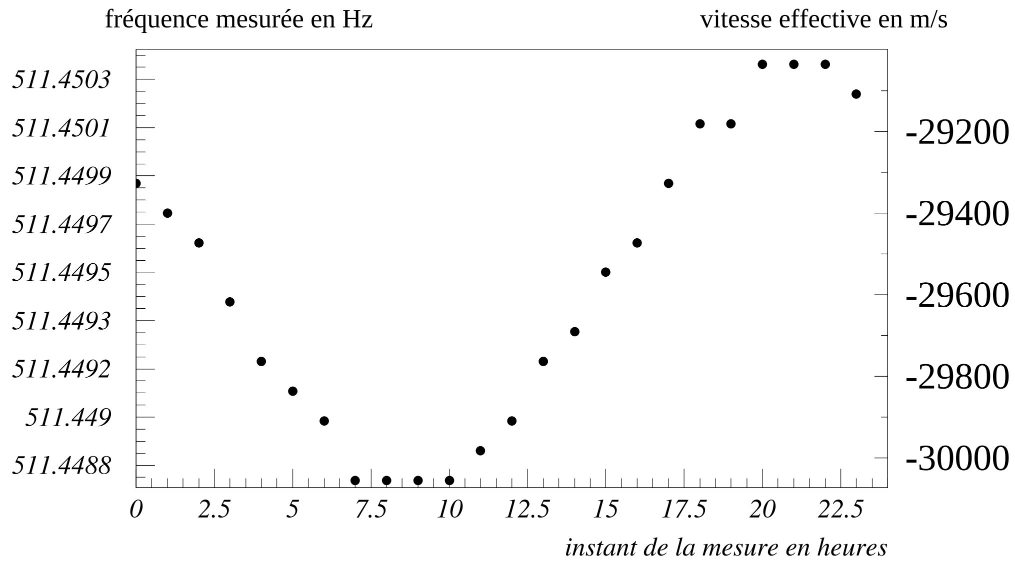


Figure 4.4: Décalage de la fréquence dû à l'effet DOPPLER sur un jour et vitesse effective associée pour une étoile à neutrons placée dans le plan de l'équateur

bras qui est considéré comme l'axe des x pour le détecteur (*pour* VIRGO $\lambda = 43,67°$, $\theta = 71°$, *et* $\alpha'(t_0)$ *est la longitude du détecteur le premier Janvier* 1970). Si on appelle H_d le tenseur métrique dans le référentiel du détecteur, H_p le tenseur métrique dans le référentiel de propagation, et $R(t)$ la matrice de rotation qui permet de passer du référentiel de propagation au référentiel du détecteur, on a alors :

$$
\begin{aligned}
H_d(t) &= R(t) \times H_p(t) \times R^{-1}(t) && (4.4)\\
&= R(t) \times H_p(t) \times {}^tR(t) && (4.5)\\
& && (4.6)
\end{aligned}
$$

${}^tR(t) = R^{-1}(t)$ ce qui évite de calculer $R^{-1}(t)$, ^{t} correspondant à l'opération de transposition. Pour calculer la matrice de rotation $R(t)$, on peut décomposer celle-ci en un produit de cinq matrices :

$$R(t) = R_5 R_4 R_3(t) R_2 R_1 \tag{4.7}$$

Où[‡] :

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Correction de la polarisation}$$

[‡]Pour simplifier on notera $\eta(t) = \alpha - \alpha'(t)$.

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta + \frac{\pi}{2}) & -\sin(\delta + \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \sin(\delta + \frac{\pi}{2}) & \cos(\delta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\delta & -\cos\delta \\ 0 & \cos\delta & -\sin\delta \end{pmatrix} \text{Passage dans le plan de l'équateur} \\
R_3(t) &= \begin{pmatrix} \cos\eta(t) & -\sin\eta(t) & 0 \\ \sin\eta(t) & \cos\eta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Rotation dans le plan de l'équateur} \\
R_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\lambda - \frac{\pi}{2}) & \sin(\lambda - \frac{\pi}{2}) \\ 0 & -\sin(\lambda - \frac{\pi}{2}) & \cos(\lambda - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\lambda & -\cos\lambda \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \end{pmatrix} \text{Passage du plan de l'équateur à la latitude du détecteur} \\
R_5 &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Orientation des bras du détecteur}
\end{aligned}
$$

Étant donné le principe de détection choisi, le détecteur ne «voit» en fait que la différence de deux coefficients de H_d : H_{dxx} et H_{dyy}.

$$h(t) = \frac{H_{dxx}(t) - H_{dyy}(t)}{2} \tag{4.8}$$

où $H_d(t)$ s'écrit :

$$H_d(t) = \begin{pmatrix} H_{dxx}(t) & H_{dxy}(t) & H_{dxz}(t) \\ H_{dyx}(t) & H_{dyy}(t) & H_{dyz}(t) \\ H_{dzx}(t) & H_{dzy}(t) & H_{dzz}(t) \end{pmatrix}$$

On peut donc, pour optimiser la simulation, ne calculer que ces deux coefficients. L'intérêt supplémentaire est qu'on n'a pas besoin de tous les coefficients de $R(t)$. On obtient :

$$H_{dxx} = \left(R_{xx}^2 - R_{xy}^2\right) h_+ + 2R_{xx}R_{xy}h_\times \tag{4.9}$$

$$H_{dyy} = \left(R_{yx}^2 - R_{yy}^2\right) h_+ + 2R_{yx}R_{yy}h_\times \tag{4.10}$$

Ce qui réduit à quatre (*au lieu de neuf*) le nombre de coefficients de $R(t)$ à calculer. Ces coefficients se décomposent en trois parties, dont deux dépendent du temps :

$$R_{xx} = R_{xx1}\cos\eta(t) + R_{xx2}\sin\eta(t) + R_{xx3} \tag{4.11}$$

$$R_{xy} = R_{xy1}\cos\eta(t) + R_{xy2}\sin\eta(t) + R_{xy3} \tag{4.12}$$

$$R_{yx} = R_{yx1}\cos\eta(t) + R_{yx2}\sin\eta(t) + R_{yx3} \tag{4.13}$$

$$R_{yy} = R_{yy1}\cos\eta(t) + R_{yy2}\sin\eta(t) + R_{yy3} \tag{4.14}$$

Ces coefficients, calculés avec le logiciel MAPLE, sont les suivants :

$$R_{xx1} = \cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\delta\sin\theta\sin\lambda \tag{4.15}$$
$$R_{xx2} = \cos\psi\sin\theta\sin\lambda + \sin\psi\sin\delta\sin\theta \tag{4.16}$$
$$R_{xx3} = -\sin\psi\sin\theta\cos\lambda\cos\delta \tag{4.17}$$
$$R_{xy1} = -\sin\psi\cos\theta - \cos\psi\sin\delta\sin\theta\sin\lambda \tag{4.18}$$
$$R_{xy2} = -\sin\psi\sin\theta\sin\lambda + \cos\psi\sin\delta\cos\theta \tag{4.19}$$
$$R_{xy3} = -\cos\psi\sin\theta\cos\lambda\cos\delta \tag{4.20}$$
$$R_{yx1} = -\cos\psi\sin\theta - \sin\psi\sin\delta\cos\theta\sin\lambda \tag{4.21}$$
$$R_{yx2} = \cos\psi\cos\theta\sin\lambda - \sin\psi\sin\delta\sin\theta \tag{4.22}$$
$$R_{yx3} = -\sin\psi\cos\theta\cos\lambda\cos\delta \tag{4.23}$$
$$R_{yy1} = \sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin\delta\cos\theta\sin\lambda \tag{4.24}$$
$$R_{yy2} = -\sin\psi\cos\theta\sin\lambda - \cos\psi\sin\delta\sin\theta \tag{4.25}$$
$$R_{yy3} = -\cos\psi\cos\theta\cos\lambda\cos\delta \tag{4.26}$$

Ce changement de repère induit un effet de modulation de phase et d'amplitude qui sera détaillé dans le chapitre 5. Une validation possible de ce calcul consiste à comparer les effets de ce changement de repère sur un pulsar connu (*le pulsar du Crabe*) avec des travaux similaires effectués par d'autres. Ceci est réalisé dans le paragraphe 5.4.3.

Chapitre 5

Effet de mouvement du détecteur

LE MOUVEMENT DU DÉTECTEUR par rapport à une source provoque des modifications de sa fréquence et de son amplitude. Dans le cas d'une source monochromatique, le signal détecté n'est plus périodique si ce mouvement n'est pas rectiligne et uniforme. Il est alors dilué dans une bande de fréquences ce qui provoque une diminution du rapport signal sur bruit. Dans le chapitre précédent, les matrices de passage du référentiel de propagation au référentiel du détecteur ont été calculées. Elles dépendent du temps à cause de la rotation journalière de la Terre, ce qui va aussi entraîner une modification du signal observé en distribuant l'énergie du signal sur cinq fréquences distinctes au lieu d'une seule. Dans ce chapitre, nous allons étudier les pertes entraînées par les variations de l'effet DOPPLER ainsi que celles qu'entraînent les variations de l'orientation du détecteur.

5.1 Pertes dues aux variations de l'effet Doppler

Soit un signal périodique d'onde gravitationnelle, de fréquence ν_0 :

$$h(t) \quad = \quad h_0 \cos\left(2\pi\nu_0 t\right) \tag{5.1}$$

Notons $\vec{k} = 2\pi\nu_0/c\vec{u}$ le vecteur de propagation de cette onde et $\vec{r}(t)$ la position du détecteur par rapport au Soleil. La source est considérée comme immobile dans le référentiel solaire (*ie ses coordonnées angulaires ne changent pas*). Le signal observé par un détecteur basé sur la Terre prend en compte une phase additionnelle $\vec{k}\cdot\vec{r}(t)$ due au temps de propagation de l'onde. Le signal devient alors :

$$h(t) \quad = \quad h_0 \cos\left(2\pi\nu_0 t + \vec{k}\cdot\vec{r}(t)\right) \tag{5.2}$$

Comme cette phase additionnelle n'est pas constante, elle induit des pertes de signal dans le cas d'une simple recherche de signaux périodiques. En fait, nous ne sommes sensibles qu'à ce que l'on pourrait appeler l'effet DOPPLER différentiel, c'est-à-dire aux variations de la vitesse autour d'une vitesse moyenne. En effet, la phase introduite par l'effet DOPPLER peut être minimisée en lui enlevant une phase αt qui correspond à $\vec{k}\cdot\vec{V}_{moy}t$. La phase s'écrit donc maintenant $\vec{k}\cdot\left(\vec{r}(t)-\vec{V}_{moy}t\right)$, en ajoutant un terme constant à la fréquence $\vec{k}\cdot\vec{V}_{moy}/(2\pi)$. Intéressons nous alors, non plus à la transformée du signal à sa fréquence ν_0, mais à une nouvelle fréquence : $\nu' = \nu_0 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{V}_{moy}}{c}$. Nous allons donc calculer, sans aucune correction, la transformée de FOURIER $\hat{h_e}(\nu')$ du signal $h(t)$, pour un temps d'intégration $T = n/\nu'$:

$$\begin{aligned}\hat{h_e}(\nu') &= 2\frac{h_0}{T}\int_0^T e^{-i2\pi\nu' t}\cos(2\pi\nu' t + \vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t)t)dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2\frac{h_0}{T}\int_{\frac{i}{\nu'}}^{\frac{i+1}{\nu'}} e^{-i2\pi\nu' t}\Big[\cos(2\pi\nu' t)\cos(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t)t) \\ &\qquad - \sin(2\pi\nu' t)\sin(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t)t)\Big]\,dt \end{aligned} \tag{5.3}$$

Comme $\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t)t$ varie très lentement par rapport aux fréquences observées, nous pouvons supposer que $\cos(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t)t)$ est constant pendant un période $(1/\nu')$. En notant $t_i = i/\nu'$, alors :

$$\begin{aligned}\hat{h_e}(\nu') &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_0}{T\nu'}\Big(\cos(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t_i)t_i) + i\sin(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t_i)t_i)\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_0}{n}\Big(\cos(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t_i)t_i) + i\sin(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t_i)t_i)\Big) \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$|\hat{h_e}(\nu')| = \frac{h_0}{n}\sqrt{\left[\sum_{i=0}^{n-1}\cos(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t_i)t_i)\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{n-1}\sin(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t_i)t_i)\right]^2} \tag{5.5}$$

d'où les pertes :

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{n}\sqrt{\left[\sum_{i=0}^{n-1}\cos(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t_i)t_i)\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{n-1}\sin(\vec{k}\cdot\Delta\vec{V}(t_i)t_i)\right]^2} \tag{5.6}$$

Ou en utilisant la vitesse et la position du détecteur, on obtient :

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{n}\sqrt{\left[\sum_{i=0}^{n-1}\cos(\vec{k}\cdot(\vec{r}(t_i)-\vec{V}_{moy}t_i))\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{n-1}\sin(\vec{k}\cdot(\vec{r}(t_i)-\vec{V}_{moy}t_i))\right]^2} \tag{5.7}$$

L'équation (5.7) montre que les pertes induites par l'effet DOPPLER sont déterminées par la direction de la source, sa fréquence et la position de la Terre. La figure 5.1 illustre cet effet en présentant la carte des pertes calculées avec l'équation (5.7). Elle correspond à une source de fréquence 20 Hz dont le signal a été intégré pendant un jour. Les deux zones où les pertes dues à l'effet DOPPLER sont plus faibles correspondent approximativement aux pôles des coordonnées équatoriales. En effet, dans ces zones, les variations de la vitesse du détecteur sur un jour sont perpendiculaires à la direction de l'étoile à neutrons, ce qui n'engendre pas d'effet DOPPLER.

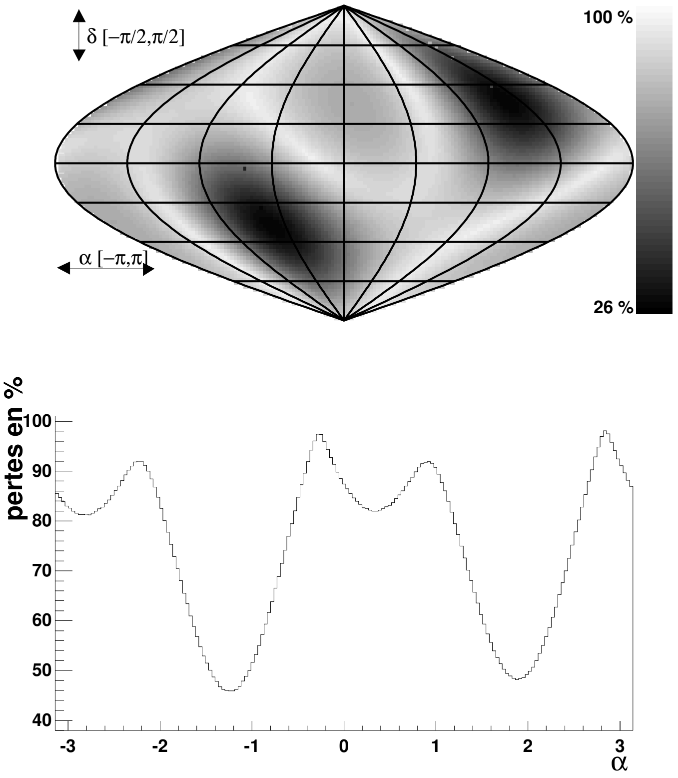


Figure 5.1: Pertes sur un jour d'intégration pour une étoile à neutrons de fréquence 20 Hz, suivant sa direction en coordonnées galactiques, et une coupe pour $\delta = 0$ rad

Remarquons enfin que pour corriger l'effet DOPPLER, c'est-à-dire pour retrouver la forme du signal avant perturbation, il suffit de changer la phase du signal détecté en soustrayant le terme $\vec{k}.\vec{r}(t)$ de l'équation (5.2). Cette phase dépend du vecteur polarisation $\vec{k}$ de l'onde et de la position relative du détecteur par rapport à la source $\vec{r}(t)$. En fait on peut considérer les sources immobiles dans le repère héliocentrique, ce qui fait que $\vec{r}(t)$ correspond seulement au mouvement du détecteur par rapport au Soleil. Nous séparons donc l'effet DOPPLER en deux parties, une dépendant de la source ($\vec{k}$) et l'autre dépendant de la position du détecteur dans le système solaire. Nous allons maintenant étudier l'effet qu'ont ces deux paramètres.

5.2 Influence de la position du détecteur

Comme cela a été précisé auparavant, la correction de l'effet DOPPLER, utilise la position du détecteur. Nous allons calculer la sensibilité de la correction par rapport à ce paramètre. Les temps d'observations étant notablement plus long que la journée le travail [31] n'a pas été utilisé.

Supposons que nous fassions une erreur $\delta\vec{r}(t)$ sur la position du détecteur. Alors la transformée de FOURIER $\hat{h_e}(\nu)$, du signal corrigé, pour un temps d'intégration $T \approx n/\nu$ (n entier), devient :

$$\hat{h_e}(\nu) = 2\frac{h_0}{T}\int_0^T e^{-i2\pi\nu t}\cos(2\pi\nu t + \vec{k}\cdot\delta\vec{r}(t))dt \tag{5.8}$$

En suivant le même raisonnement que dans la paragraphe précédent, nous obtenons les pertes :

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{n}\sqrt{\left[\sum_{i=0}^{n-1}\cos(\vec{k}\cdot\delta\vec{r}(t_i))\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{n-1}\sin(\vec{k}\cdot\delta\vec{r}(t_i))\right]^2} \tag{5.9}$$

Si de plus nous supposons que $\vec{k}\cdot\delta\vec{r}(t)$ est suffisamment petit pour faire un développement limité, alors :

$$\begin{aligned}
\epsilon &= 1 - \sqrt{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{(\vec{k}\cdot\delta\vec{r}(t_i))^2}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\vec{k}\cdot\delta\vec{r}(t_i)\right]^2} \\
&= 1 - \sqrt{\left[1 - \frac{1}{2} < (\vec{k}\cdot\delta\vec{r})^2 >\right]^2 + < \vec{k}\cdot\delta\vec{r} >^2} &(5.10) \\
&= 1 - \sqrt{1 - \left(< (\vec{k}\cdot\delta\vec{r})^2 > - < \vec{k}\cdot\delta\vec{r} >^2\right)} &(5.11) \\
&= \frac{1}{2}\left[< (\vec{k}\cdot\delta\vec{r})^2 > - < \vec{k}\cdot\delta\vec{r} >^2\right] &(5.12)
\end{aligned}$$

Soit δr la racine carrée de la variance de $\delta\vec{r}(t)$ projetée le long de $\vec{k}$. Alors (5.12) peut se réécrire :

$$\epsilon = \frac{(k\delta r)^2}{2} \tag{5.13}$$

Pour limiter les pertes à 5%, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{(k\delta r)^2}{2} &\leq 0.05 \\
\delta r &\leq \frac{c\sqrt{0.1}}{2\pi\nu} \\
\delta r &\leq 15km\left(\frac{1kHz}{\nu}\right) &(5.14)
\end{aligned}$$

L'équation (5.14) montre qu'il faut connaître la position de la Terre à quelques kilomètres près. Mais comme nous l'avons montré dans le chapitre 4, cette condition peut être facilement remplie et la précision obtenue étant largement supérieure à celle requise, les pertes dues à la méconnaissance de $\vec{r}(t)$ seront largement inférieures à 5% (*de l'ordre de* 0, 3% *pour* 1 *kHz*).

5.3 Influence de la position de la source

5.3.1 Pertes de signal

La figure 5.2 montre à quel point il est important de corriger l'effet DOPPLER. Elle représente les transformées de FOURIER du signal d'une même étoile à neutrons avec une correction plus ou moins bonne de l'effet DOPPLER, due à une erreur sur la position de la source. Lorsque la bonne direction, pour la correction, est appliquée ($\Delta\alpha = 0$ *rad*), le signal observé est maximum et égal à $0,25h_0$. Dans le cas contraire, le signal mal corrigé ressemble de moins en moins à un pic. De plus, la fréquence est décalée proportionnellement à l'erreur sur la position ainsi qu'à la vitesse moyenne lors de l'intégration. Cette figure est produite à partir de la transformée de FOURIER pour un temps T de données. Les valeurs sont obtenues pour un ensemble discret de fréquences, multiples de $1/T$. Si la fréquence du signal se trouve entre deux de ces fréquences, il se produit une perte de signal allant jusqu'à 36%. Pour réduire ce type de perte, le signal est simulé à dix fréquences différentes, toutes espacées d'un dixième de $1/T$ et le signal maximum a été utilisé. Ceci permet de réduire les pertes à 1, 6%.

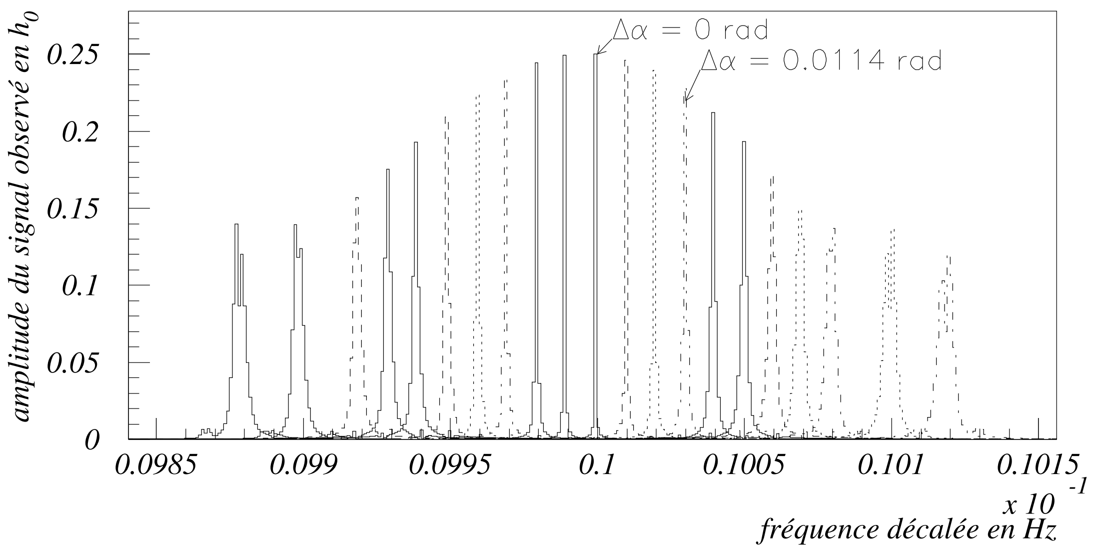


Figure 5.2: Pertes en fonction de la mauvaise correction appliquée

Connaître l'effet d'une erreur $\delta\vec{k}$ sur $\vec{k}$ permet de calculer l'erreur tolérable sur la position d'une source en fonction d'un niveau de perte accepté.

Soit $\hat{h_e}(\nu)$ la valeur de la transformée de FOURIER à la fréquence ν calculée en tenant compte de l'erreur sur la position de la source.

$$\hat{h}_e(\nu) = \frac{2h_0}{T}\int_0^T e^{-i2\pi\nu t}\cos(2\pi\nu t + \delta\vec{k}\cdot\vec{r}(t))dt \tag{5.15}$$

En utilisant les mêmes approximations et le même raisonnement que précédemment, l'erreur ϵ sur le signal est :

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{n}\sqrt{\left[\sum_{i=0}^{n-1}\cos(\delta\vec{k}\cdot\vec{r}(t_i))\right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{n-1}\sin(\delta\vec{k}\cdot\vec{r}(t_i))\right]^2} \tag{5.16}$$

ou encore :

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i,j=0}^{n-1}\cos\left(\delta\vec{k}\cdot(\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_j))\right)} \tag{5.17}$$

L'équation (5.17) montre que les calculs sont indépendants de l'origine des coordonnées. L'équation (5.16) permet d'estimer numériquement l'erreur tolérée sur la position de la source. Ce calcul numérique est beaucoup plus rapide qu'une simulation faite avec SIESTA telle que celle de la figure 5.2. Il est donc important de vérifier la validité de ce calcul puisqu'il sera utilisé abondamment pour évaluer la précision sur la position d'une source et le nombre de recherches supplémentaires que l'on doit effectuer pour pallier toute imprécision. Cette validation est effectuée avec les paramètres suivants :

- fréquence de l'étoile à neutrons = 499.5 Hz
- amplitude de l'étoile à neutrons = h_0
- $\alpha = -1$ rad
- $\delta = 0,4$ rad
- $\psi = 0$ rad
- $i = \frac{\pi}{4}$ rad
- $\gamma = \frac{\pi}{4}$ rad
- temps d'intégration = 65536 s = 18H12$'$

Les angles α et δ sont les coordonnées équatoriales de l'étoile à neutrons, i et ψ sont les mêmes qu'au chapitre 1. L'angle γ est l'angle α de déformation du chapitre 1.

D'après les équations (1.44) et (1.45), l'amplitude du signal à la fréquence simple de l'étoile à neutrons est de $0,25h_0$.

La figure 5.3 présente la comparaison entre les pertes calculées analytiquement et celles mesurées avec SIESTA. Les deux courbes montrent un accord raisonnable.

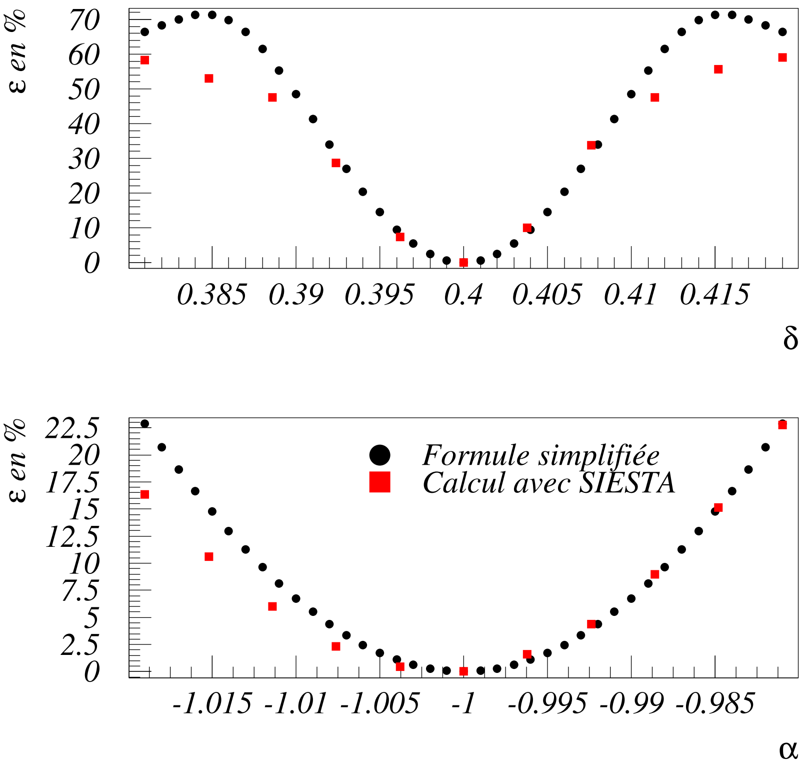


Figure 5.3: Comparaison entre les pertes calculées analytiquement et celles mesurées à l'aide de SIESTA

5.3.2 Sensibilité angulaire du détecteur à fréquence libre

La méconnaissance de la position de la source entraîne une baisse du rapport signal sur bruit, comme nous l'avons vu dans le paragraphe (5.3.1), ainsi qu'une variation de fréquence. Nous allons nous intéresser à la sensibilité des pulsars connus à ces effets. Pour calculer l'amplitude de ces effets, l'erreur tolérée est évaluée dans un nombre discret de directions (*via l'équation (5.17)*) qui se trouvent dans un plan perpendiculaire à la direction de la source (*l'erreur sur la source est dans ce plan*). Un calcul pour ces directions permet de déterminer l'amplitude de l'erreur pour chacune d'elles et le décalage fréquentiel correspondant. Ceci définit un contour dont la surface correspond à la région où l'erreur sur la position de la source doit se trouver pour rester dans les limites de pertes fixées. Cette surface est homogène à un angle solide, et elle peut être comparée à l'erreur sur les pulsars connus que montre la figure 1.8. La figure 5.4 représente la forme d'une de ces régions pour une direction donnée et différents niveaux de perte. Cette figure a été réalisée pour un temps d'intégration de deux jours et une fréquence de 20 Hz. Les coordonnées équatoriales de la source sont $\alpha = -1$ rad, $\delta = 0.4$ rad.

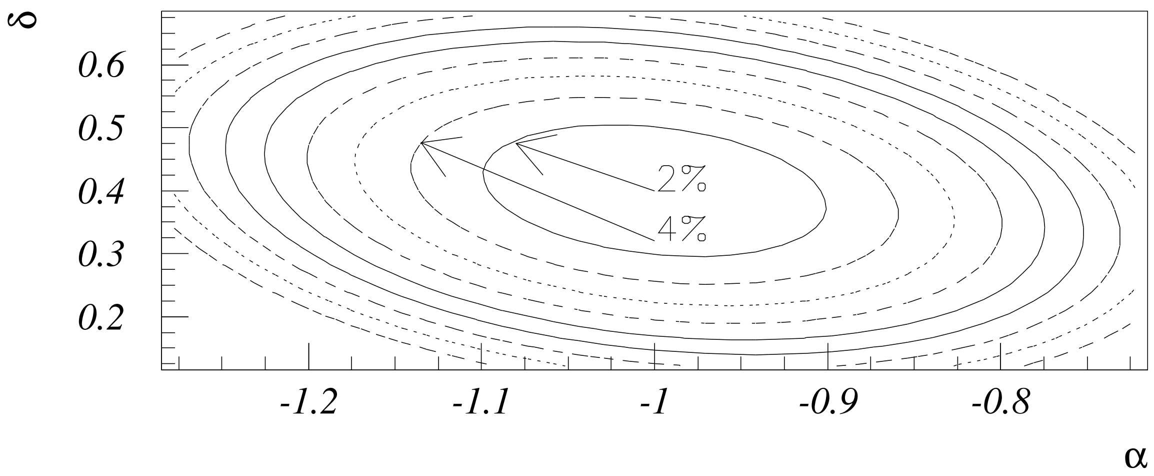


Figure 5.4: Définition d'une cellule de recherche (2 jours)

Les figures 5.5 et 5.6 montrent l'angle solide qui définit l'erreur tolérée sur la position de l'étoile à neutrons, pour des pertes de 5%, en fonction de la direction de recherche de l'étoile à neutrons pour respectivement un jour et dix jours d'intégration.

La figure 5.7 montre la tolérance moyenne en stéradians pour des sources ayant des fréquences de 10 et 20 Hz, et la proportion de pulsars connus qui franchissent cette limite. La tolérance dépend de la fréquence du signal au carré car $\delta\vec{k}$ dépend de la fréquence et la surface du contour dépend de δk^2. On peut remarquer que la proportion de pulsars connus qui dépassent le seuil est faible jusqu'à un an d'intégration, ce qui est normal car la précision avec laquelle ils sont connus dépend de leur temps d'observation par des antennes directionnelles.

La figure 5.8 montre le nombre total de recherches supplémentaires qu'il faut faire pour l'ensemble des pulsars connus afin de corriger le décalage fréquentiel moyen. On peut remarquer que le nombre moyen de recherches supplémentaires pour les pulsars qui n'ont pas encore atteint la précision limite diminue. Deux faits y contribuent : d'une part les pulsars demandant le plus de recherches supplémentaires sont ôtés de cette moyenne au cours du temps, d'autre part plus le temps d'intégration est long plus la vitesse moyenne est proche de zéro. En effet la trajectoire de la Terre autour du Soleil est une ellipse, donc pour un an, la vitesse moyenne est nulle.

5.4 Effets de la modulation d'amplitude

La réponse du détecteur dépend de la position de la source par rapport au détecteur [32]. Or l'orientation du détecteur varie au cours du temps. L'amplitude et la phase du signal d'une onde gravitationnelle observé sur Terre vont donc être modulées. Cet effet est important dans le cas d'une source d'ondes gravitationnelles périodique

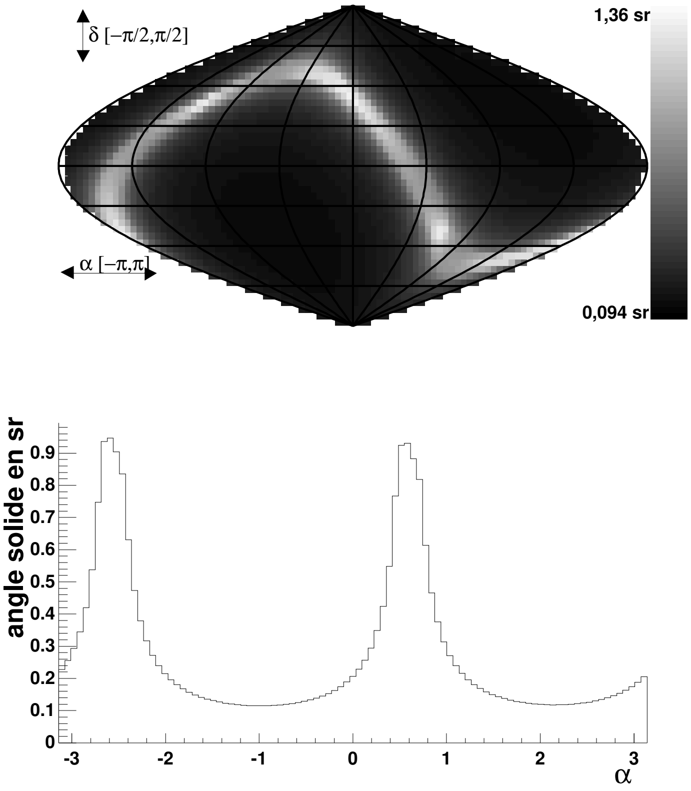


Figure 5.5: Taille de l'erreur tolérable sur la position d'une étoile à neutrons pour un jour d'intégration à une fréquence de 20 Hz, suivant la direction de la source en coordonnées galactiques

puisque le signal sera observé pendant des temps longs. L'étude quit suit est plus détaillée que celle effectuée dans [32].

5.4.1 Diagrammes d'antenne du détecteur

Un diagramme d'antenne est un instantané de la sensibilité directionnelle du détecteur. Dans le cas d'une onde gravitationnelle, on doit produire deux diagrammes, un pour la polarisation h_+ et un autre pour la polarisation $h_\times$. En effet ces polarisations représentent les deux degrés de liberté pour une source quelconque. Pour calculer ces diagrammes d'antenne, on utilise des équations de changement de repère similaires à celles données dans le paragraphe (4.6), en prenant $h_\times = 0$ pour le diagramme de la figure 5.9, $h_+ = 0$ pour le diagramme de la figure 5.10, détecteur immobile et des angles faisant référence au repère local du détecteur.

Lors de la détection de sources à émission brève, ces deux diagrammes sont importants pour connaître les zones d'ombres du détecteur. En effet lors d'une super nova

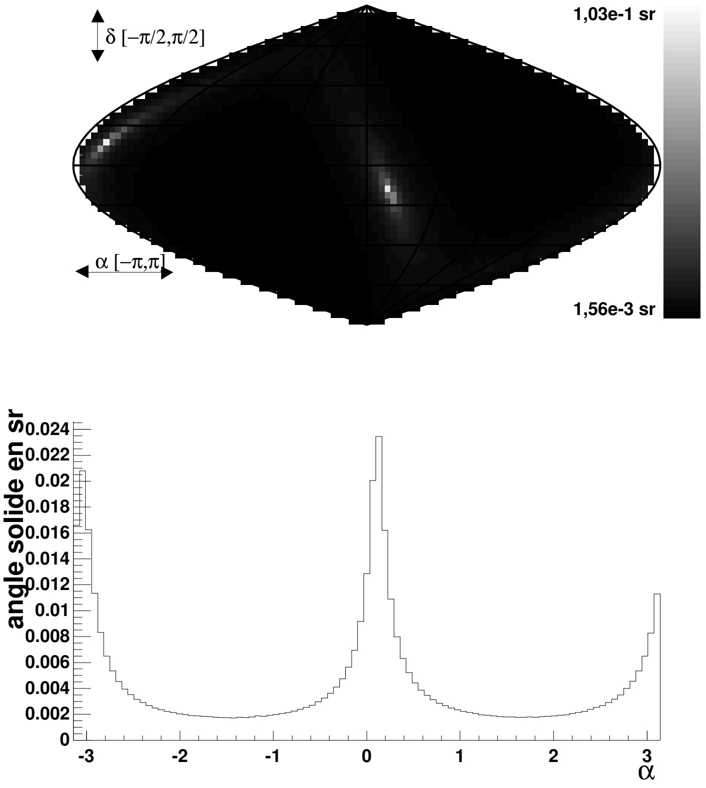


Figure 5.6: Taille de l'erreur tolérable sur la position d'une étoile à neutrons pour dix jours d'intégration à une fréquence 20 Hz, suivant la direction de la source en coordonnées galactiques

ou d'une coalescence de système binaire, le signal est présent pendant un temps bref pendant lequel la direction de la source n'a pas changé. Pour une source périodique, ces diagrammes doivent être moyennés sur le temps d'intégration de la transformée de FOURIER, ce qui donne une généralisation du diagramme d'antenne. Les coordonnées les plus intéressantes pour tracer le diagramme de la figure 5.11 sont les coordonnées galactiques car c'est dans le plan galactique que l'on attend le plus de sources. La couverture du ciel est relativement homogène puisqu'il n'y a qu'une différence de $8,9\%$ d'amplitude relative entre la valeur la plus faible et la plus élevée. Le diagramme concernant la fréquence double n'est pas tracé car les effets de la modulation sont très similaires pour les fréquences simple et double.

5.4.2 Mise en forme de l'effet de modulation d'amplitude

Dans le cas d'une étoile à neutrons, l'effet de modulation d'amplitude, se produit à une phase près sur l'onde à sa fréquence simple, $\Omega/2\pi$, et à sa fréquence double.

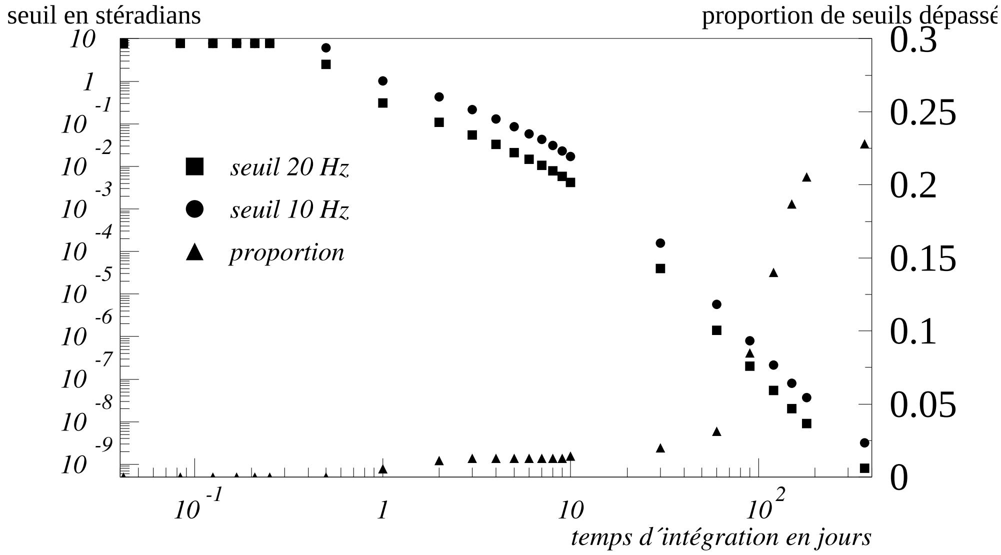


Figure 5.7: Seuil de tolérance sur la position des pulsars connus à 10 et 20 Hz

Les équations (1.44) et (1.45) peuvent se mettre sous une forme plus maniable :

$$h_+ = h_{+1}\cos(\Omega t) + h_{+2}\cos(2\Omega t) \tag{5.18}$$

$$h_\times = h_{\times 1}\sin(\Omega t) + h_{\times 2}\sin(2\Omega t) \tag{5.19}$$

Les équations pour la fréquence double sont identiques à celles de la fréquence simple hormis le remplacement de h_{+1} et $h_{\times 1}$ par h_{+2} et $h_{\times 2}$. Les équations ne seront donc détaillées que pour la fréquence simple.

Cet effet s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2}\Big[\cos(\Omega t)\left(R_{xx}^2 + R_{yy}^2 - R_{xy}^2 - R_{yx}^2\right) h_{+1} \\ &\quad + \sin(\Omega t)\left(R_{xx}R_{xy} - R_{yy}R_{yx}\right) h_{\times 1}\Big] \end{aligned}$$

Comme on l'a montré au chapitre 4, on peut décomposer chaque élément de la matrice R en une partie constante, une partie dépendant de $\cos\eta(t)$ et une autre dépendant de $\sin\eta(t)$. Ceci nous ramène à (*détail des calculs dans l'annexe C*) :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2}h_{+1}\cos(\Omega t)\left[a + b\cos\eta(t) + c\sin\eta(t)\right. \\ &\quad \left. + d\cos 2\eta(t) + e\sin 2\eta(t)\right] \\ &+ \frac{1}{2}h_{\times 1}\sin(\Omega t)\left[a' + b'\cos\eta(t) + c'\sin\eta(t)\right. \\ &\quad \left. + d'\cos 2\eta(t) + e'\sin 2\eta(t)\right] \end{aligned} \tag{5.20}$$

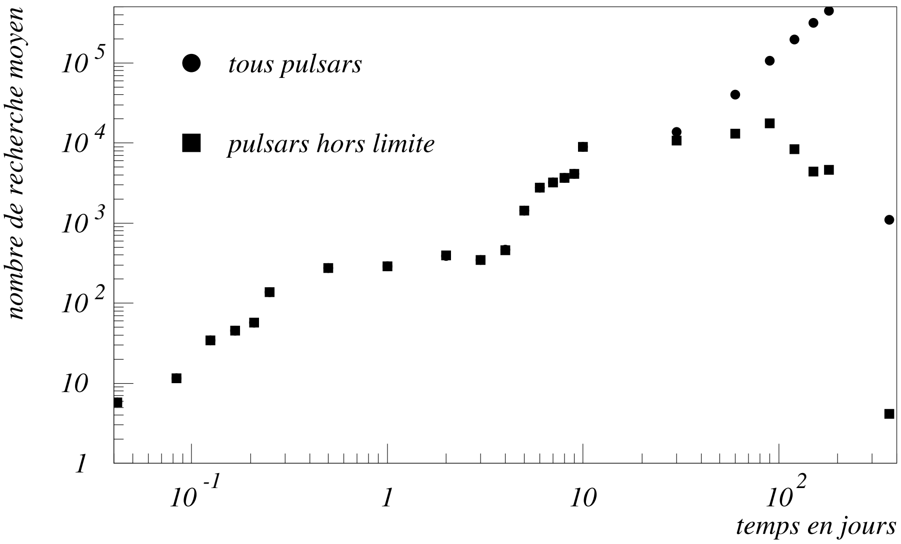


Figure 5.8: Nombre moyen de recherches supplémentaires pour les pulsars connus

Les coefficients définis précédemment dépendent de la position de la source et de sa polarisation. L'équation (5.20) donne du signal à la fréquence de la source $\Omega/2\pi$ et sur quatre bandes latérales aux fréquences $\Omega/2\pi \pm \nu_T$ et $\Omega/2\pi \pm 2\nu_T$. $\nu_T = \frac{1}{86164}$ Hz est la fréquence de rotation de la Terre. L'équation (5.20) peut s'écrire :

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2}h_{+1}\frac{e^{i\Omega t}+e^{-i\Omega t}}{2}\left[a + b\frac{e^{i\eta(t)}+e^{-i\eta(t)}}{2} + c\frac{e^{i\eta(t)}-e^{-i\eta(t)}}{2i}\right. \\
&+ \left. d\frac{e^{2i\eta(t)}+e^{-2i\eta(t)}}{2} + e\frac{e^{2i\eta(t)}-e^{-2i\eta(t)}}{2i}\right] \\
&+ \frac{1}{2}h_{\times 1}\frac{e^{i\Omega t}-e^{-i\Omega t}}{2i}\left[a' + b'\frac{e^{i\eta(t)}+e^{-i\eta(t)}}{2} + c'\frac{e^{i\eta(t)}-e^{-i\eta(t)}}{2i}\right. \\
&+ \left. d'\frac{e^{2i\eta(t)}+e^{-2i\eta(t)}}{2} + e'\frac{e^{2i\eta(t)}-e^{-2i\eta(t)}}{2i}\right]
\end{aligned}
$$

ou encore en ne tenant compte que des fréquences positives :

$$
\begin{aligned}
h(t) = \frac{1}{8}&\left[2\left[ah_{+1} - ia'h_{\times 1}\right]e^{i\Omega t}\right. \\
&+ \left[bh_{+1} - c'h_{\times 1} - i\left(ch_{+1} + b'h_{\times 1}\right)\right]e^{i(\Omega t+\eta(t))} \\
&+ \left[bh_{+1} + c'h_{\times 1} + i\left(ch_{+1} - b'h_{\times 1}\right)\right]e^{i(\Omega t-\eta(t))} \\
&+ \left[dh_{+1} - e'h_{\times 1} - i\left(eh_{+1} + d'h_{\times 1}\right)\right]e^{i(\Omega t+2\eta(t))} \\
&+ \left[dh_{+1} + e'h_{\times 1} + i\left(eh_{+1} - d'h_{\times 1}\right)\right]e^{i(\Omega t-2\eta(t))}
\end{aligned}
\qquad (5.21)
$$

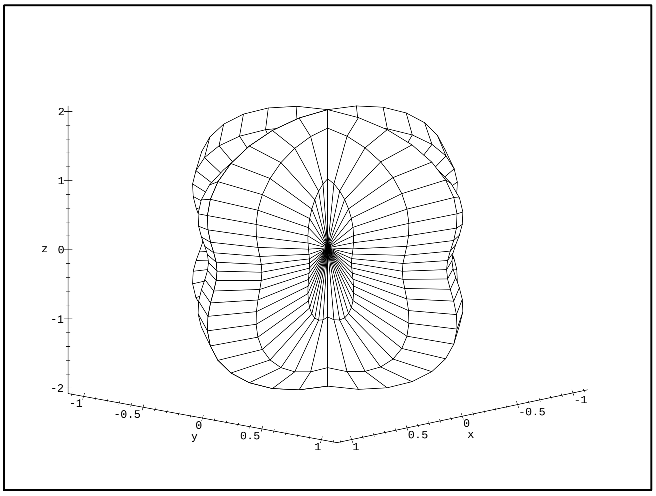


Figure 5.9: Diagramme d'antenne pour une onde polarisée h_+. Les bras du détecteur coïncident avec l'axe des x et l'axe des y

fréquence	amplitude
$\Omega/2\pi - 2\nu_T$	$\frac{1}{4}\sqrt{(h_{+1}d - h_{\times 1}e')^2 + (h_{+1}e + h_{\times 1}d')^2}$
$\Omega/2\pi - \nu_T$	$\frac{1}{4}\sqrt{(h_{+1}b - h_{\times 1}c')^2 + (h_{+1}c + h_{\times 1}b')^2}$
$\Omega/2\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{(h_{+1}a)^2 + (h_{\times 1}a')^2}$
$\Omega/2\pi + \nu_T$	$\frac{1}{4}\sqrt{(h_{+1}b + h_{\times 1}c')^2 + (h_{+1}c - h_{\times 1}b')^2}$
$\Omega/2\pi + 2\nu_T$	$\frac{1}{4}\sqrt{(h_{+1}d + h_{\times 1}e')^2 + (h_{+1}e - h_{\times 1}d')^2}$

Cela donne l'amplitude de la transformée de FOURIER* pour chacune des fréquences :

La fréquence et la position de la source sont les seules données connues. Sa polarisation ψ, son angle de vue i, son angle de déformation γ et son amplitude initiale h_0 sont par contre inconnus. Avec l'effet de modulation, on a dix valeurs mesurables et seulement quatre inconnues. On pourra donc par une méthode d'ajustement (χ^2 *ou maximum de vraisemblance*) mesurer tous ces paramètres et donc obtenir des renseignements cruciaux pour les modèles d'étoiles à neutrons. Cet effet peut permettre de signer un signal extraterrestre. En effet, tout signal périodique devra être accompagné de quatre pics de modulation à la fréquence mesurée du signal $\pm\nu_T$ et $\pm 2\nu_T$.

*On normalise notre transformée de FOURIER pour qu'une sinusoïde ait comme maximum d'amplitude 1.

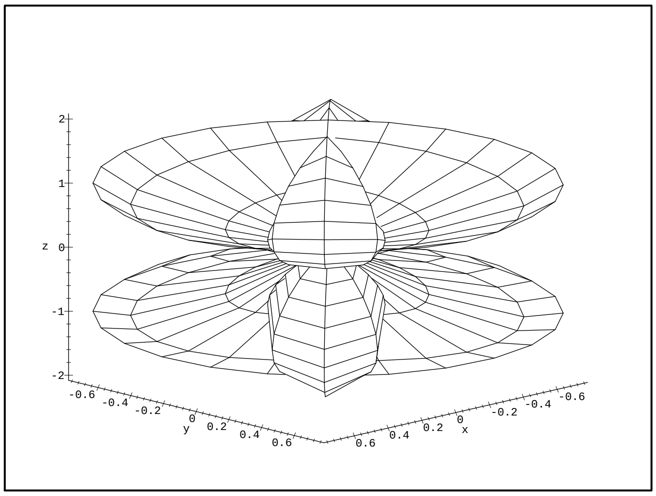


Figure 5.10: Diagramme d'antenne pour une onde polarisée $h_\times$. Les bras du détecteur coïncident avec l'axe des x et l'axe des y

5.4.3 Effet sur le Pulsar du Crabe

Afin de valider le changement de référentiel introduit dans la simulation SIESTA, on va comparer l'effet de modulation résultant du changement d'orientation du détecteur à un résultat produit dans la littérature pour une source connue : le pulsar du CRABE.

On met le signal sous la forme de l'équation (5.22) pour pouvoir le comparer aux résultats de [7] qui présente A_1 et A_2 pour différentes valeurs de i, ψ pour le pulsar du CRABE.

$$h(t) = \frac{1}{2}A_1(t)\cos(\Omega t - \phi_1(t)) + \frac{1}{2}A_2(t)\cos(2\Omega t - \phi_2(t)) \tag{5.22}$$

où :

$$\begin{aligned}
A_1(t) &= \sqrt{\left(R_{xx}^2 + R_{yy}^2 - R_{xy}^2 - R_{yx}^2\right)^2 h_{+1}^2 + 4\left(R_{xx}R_{xy} - R_{yy}R_{yx}\right)^2 h_{\times 1}^2} \\
A_2(t) &= \sqrt{\left(R_{xx}^2 + R_{yy}^2 - R_{xy}^2 - R_{yx}^2\right)^2 h_{+2}^2 + 4\left(R_{xx}R_{xy} - R_{yy}R_{yx}\right)^2 h_{\times 2}^2} \\
\cos(\phi_1(t)) &= \frac{(R_{xx}^2 + R_{yy}^2 - R_{xy}^2 - R_{yx}^2)h_{+1}}{A_1(t)} \\
\sin(\phi_1(t)) &= \frac{2(R_{xx}R_{xy} - R_{yy}R_{yx})h_{\times 1}}{A_1(t)} \\
\cos(\phi_2(t)) &= \frac{(R_{xx}^2 + R_{yy}^2 - R_{xy}^2 - R_{yx}^2)h_{+2}}{A_2(t)}
\end{aligned}$$

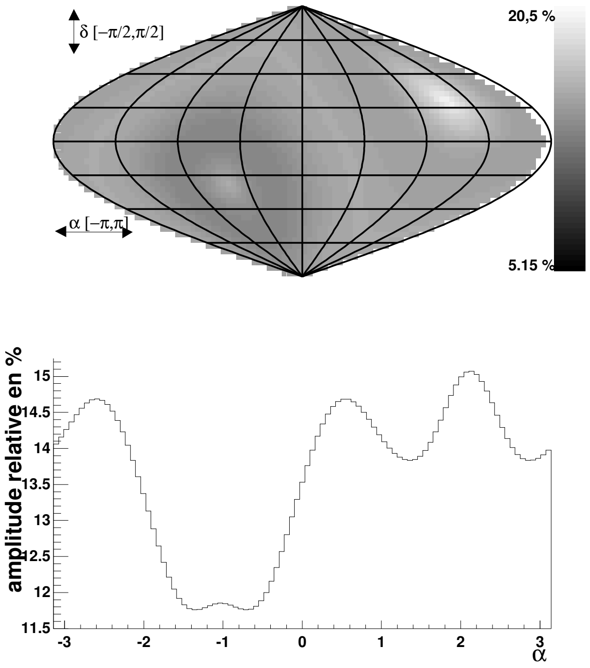


Figure 5.11: Diagramme d'antenne pour une onde gravitationnelle émise par une étoile à neutrons à sa fréquence simple et coupe pour $\delta = 0$ rad

$$\sin(\phi_2(t)) \quad = \quad \frac{2(R_{xx}R_{xy} - R_{yy}R_{yx})h_{\times 2}}{A_2(t)}$$

Les coefficients R_{xx}, R_{yy}, *etc...* sont ceux définis au chapitre 4. A_1 et A_2 sont donc seulement fonction de $\cos \eta(t)$ et $\sin \eta(t)$ et donc de période un jour de rotation, c'est-à-dire 86164 s. La figure 5.12 montre $\frac{A_1(t)}{h_0}$ et $\frac{A_2(t)}{h_0}$ pour le détecteur VIRGO et le pulsar du CRABE dont les coordonnées équatoriales sont $\alpha = 5h34min$, $\delta = 22°01'$. L'angle de déformation (défini au chapitre 1) est supposé être $\gamma = 15°$, la polarisation initiale $\psi = 0$ rad et l'angle $i = 45°$. On obtient les mêmes résultats que dans [7] mis à part un décalage temporel, dû à l'origine des temps et un facteur de proportionnalité, car dans [7] il est supposé que la déformation serait due au champ magnétique, ce qui change l'amplitude relative du pulsar. La figure 5.13 montre les résultats obtenus dans l'article [7].

5.4.4 Distribution du signal due à la modulation

On peut calculer la distribution d'amplitude des bandes latérales. On peut aussi la mesurer en utilisant SIESTA pour simuler des étoiles à neutrons. On va comparer ces deux méthodes pour obtenir une vérification croisée de la méthode de simulation et des calculs effectués dans les paragraphes précédents. Pour cela, on simule les sept

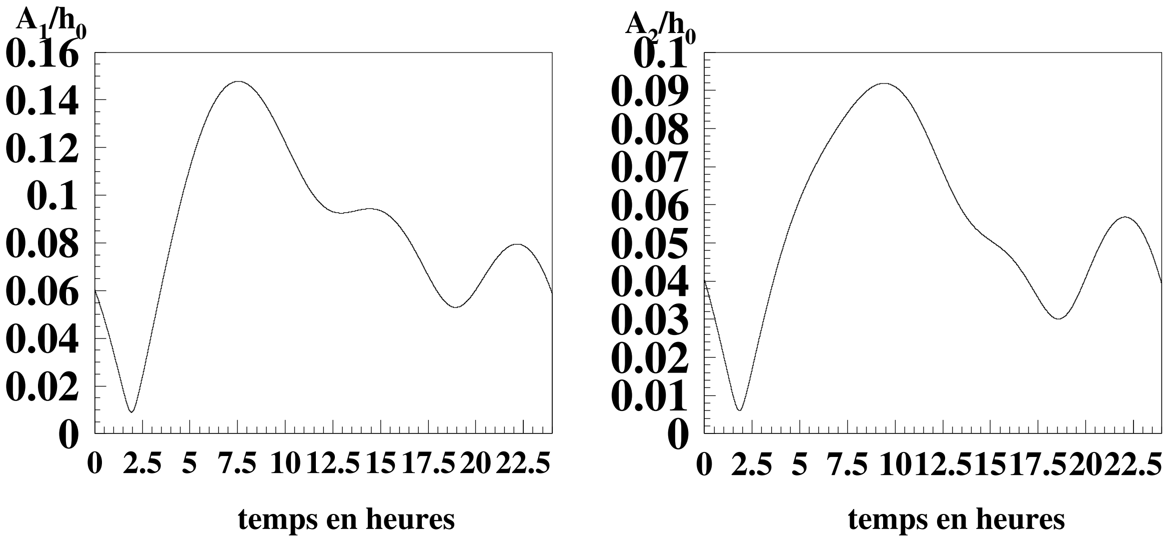


Figure 5.12: Modulation à la fréquence simple et à la fréquence double du pulsar du CRABE calculée avec SIESTA

cent six pulsars du catalogue [9].

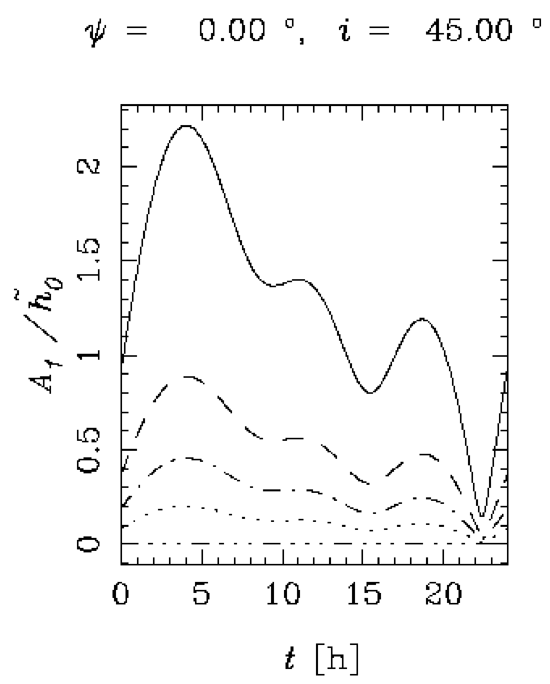
On parcourt, pour réaliser la mesure de la distribution, une partie de l'espace possible des paramètres régissant l'effet de modulation d'amplitude. On ne fait varier que la polarisation ψ et l'angle i (*quatorze valeurs pour chaque paramètre*). L'angle γ n'intervenant que d'une manière relative, on ne le fait pas varier. La figure 5.14 montre le résultat de trois des simulations SIESTA pour des étoiles à neutrons dans trois directions différentes, mais avec les mêmes paramètres i, ψ et γ. La disparité de répartition de l'énergie dans les différentes bandes y est bien représentée.

Ce qui donne 138376 simulations pour les 706 pulsars connus dont on mesure la distribution du signal sur les bandes latérales multiples de ν_T pour leur fréquence simple et pour leur fréquence double. La figure 5.15 montre la distribution, relative à la somme des bandes, de la bande centrale et des deux bandes latérales entourant la fréquence principale.

La figure 5.16 montre les mêmes distributions pour la fréquence double des pulsars connus. L'intérêt de produire cette figure est que le rapport $h_{+1}/h_{\times 1}$ est différent de $h_{+2}/h_{\times 2}$. Les distributions seront donc différentes.

On peut remarquer que le signal des bandes latérales est en moyenne plus important que celui de la fréquence principale. Ceci est à retenir pour les algorithmes de recherche que l'on va être amené à développer.

Les mêmes distributions mais calculées analytiquement, sont représentées en pointillés sur les figures 5.15 et 5.16. Les différences avec la simulation sont mineures et peuvent s'expliquer à cause de la proximité des cinq pics lors de la simulation.



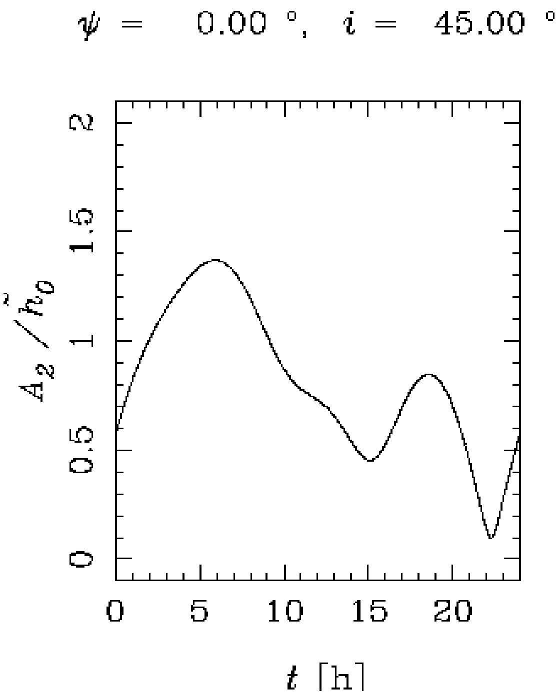


Figure 5.13: Modulation à la fréquence simple et à la fréquence double du pulsar du CRABE [7]

Grâce aux calculs de l'annexe C et du paragraphe 5.4.2, on peut calculer la distribution des bandes latérales pour toutes les directions du ciel. On va aussi pouvoir observer si la tendance qu'ont les bandes latérales d'être plus élevées en moyenne que l'amplitude de la transformée de FOURIER, pour la fréquence de la source, se confirme quand on uniformise l'origine des sources dans le ciel. Ceci est intéressant car certaines sources ne sont peut être pas toutes dans le plan galactique. Les figures 5.17 et 5.18 nous montrent cette distribution relative respectivement pour la fréquence simple et la fréquence double. On peut remarquer la similitude entre les distributions. La recherche pour le ciel entier n'est pas différente de la recherche dans le plan galactique du point de vue modulation d'amplitude.

Bien que l'énergie ne soit pas équirépartie entre les différentes bandes, les distributions des bandes sont deux à deux similaires car les distributions en i et ψ sont uniformes, ce qui permet d'avoir un symétrique qui équilibre les distributions pour chaque source.

Pour mesurer cette disparité, on calcule, pour chaque direction et chaque bande, la moyenne et l'écart quadratique moyen. Comme le montre la figure 5.19 les distributions dans chaque direction sont peu piquées (*écart quadratique moyen important*). C'est aussi le cas pour chaque bande latérale.

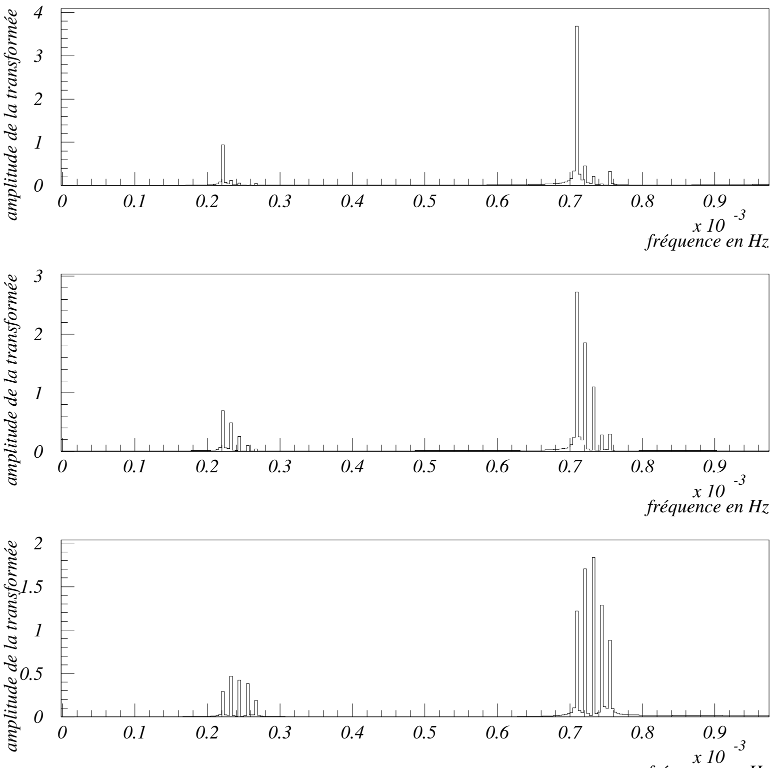


Figure 5.14: Transformées de FOURIER pour trois étoiles à neutrons identiques dans trois directions différentes

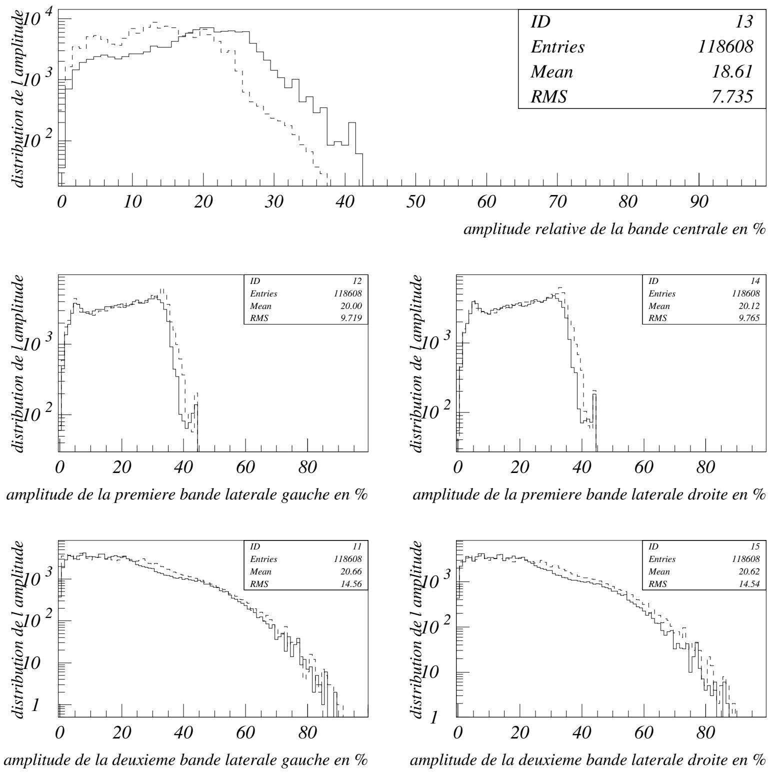


Figure 5.15: Distribution relative du signal sur ses bandes latérales à la fréquence simple des 706 pulsars connus. Les lignes pleines correspondent aux données simulées avec SIESTA et les lignes pointillées au calcul analytique

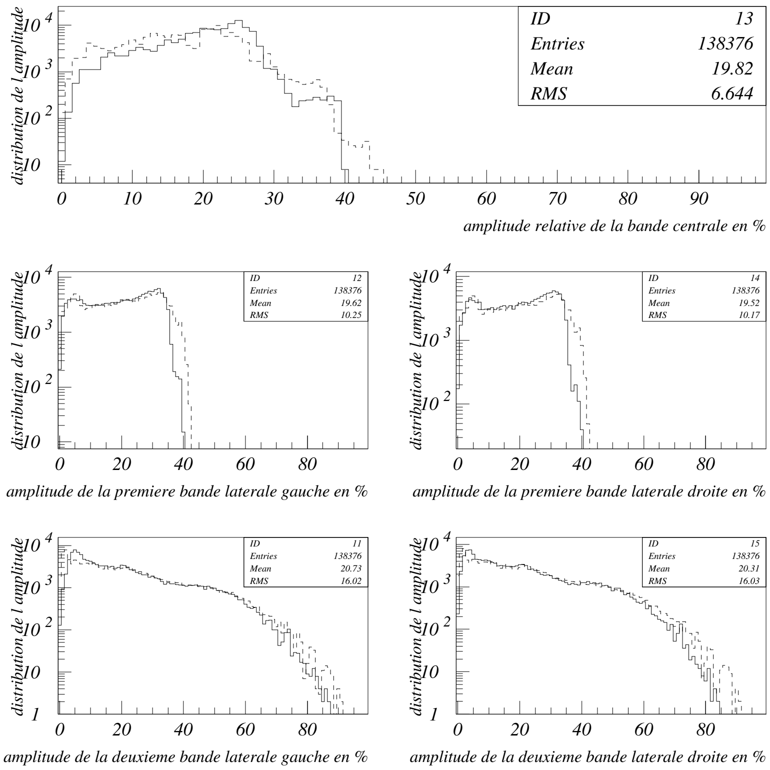


Figure 5.16: Distribution relative du signal sur ses bandes latérales à la fréquence double des 706 pulsars connus. Les lignes pleines correspondent aux données simulées avec SIESTA et les lignes pointillées au calcul analytique

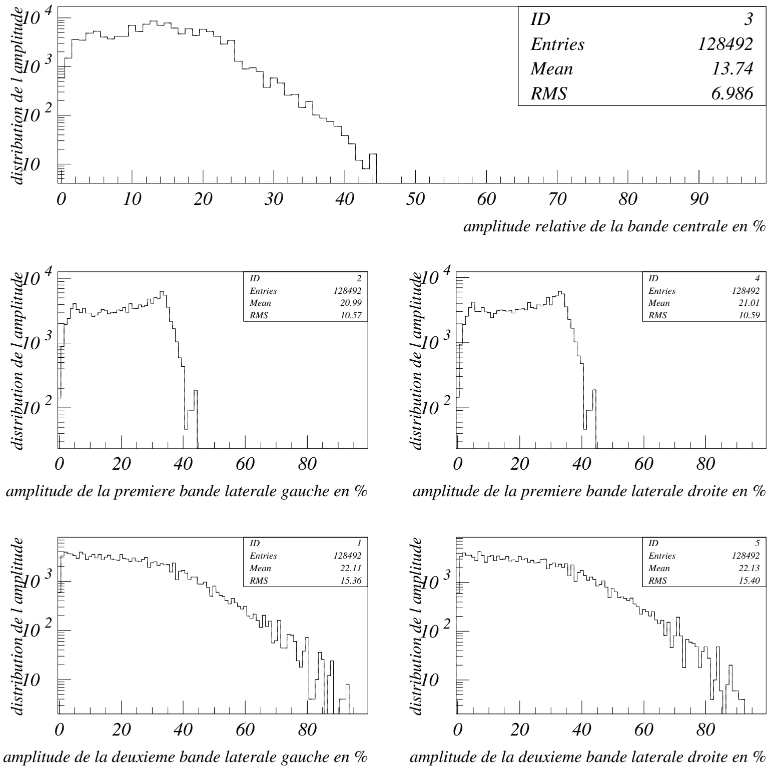


Figure 5.17: Distribution relative du signal sur ses bandes latérales à la fréquence simple d'une étoile à neutrons pour le ciel entier

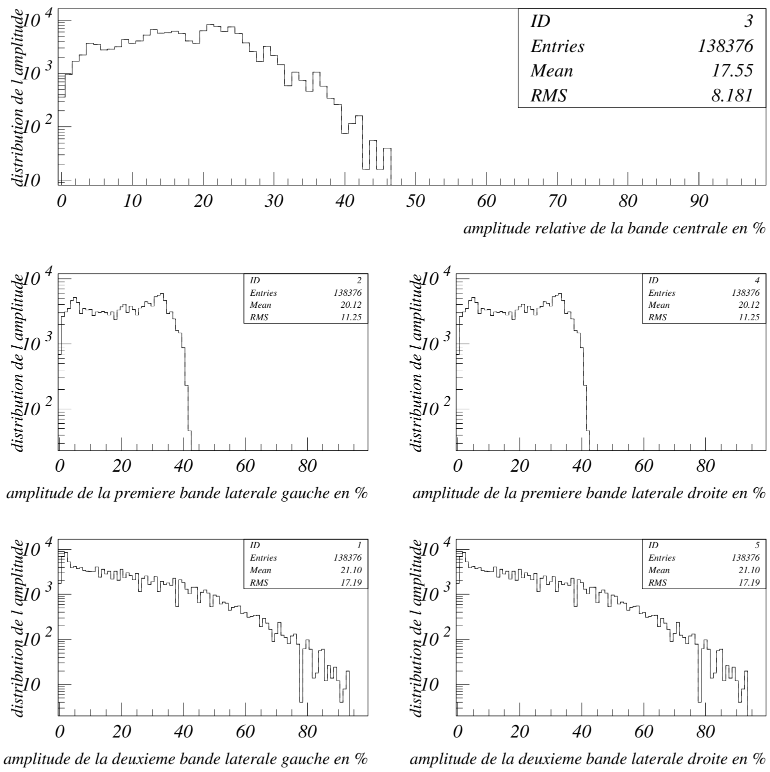


Figure 5.18: Distribution relative du signal sur ses bandes latérales à la fréquence double d'une étoile à neutrons pour le ciel entier

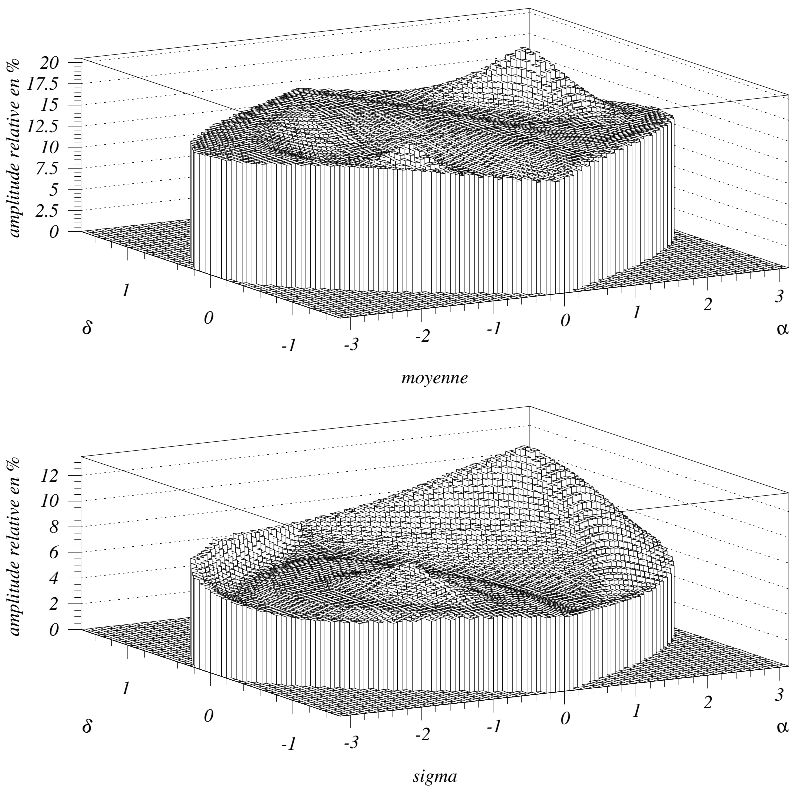


Figure 5.19: Distribution relative du signal dans sa bande centrale à la fréquence simple en fonction de la direction de la source en coordonnées galactiques

Chapitre 6

Recherche de pulsars connus

ON PEUT RECHERCHER plusieurs types de sources périodiques. Les seules dont on connaisse la position sont les étoiles à neutrons que l'on a détectés *via* leurs ondes électromagnétiques (*les pulsars*). Ce chapitre est consacré à l'étude de plusieurs méthodes pour détecter les pulsars connus. L'intérêt de réduire la quantité de données à utiliser dans les recherches de signaux périodiques est discuté. La connaissance de la source fait penser à la détection synchrone, qui est *a priori* la méthode la plus simple. Le manque d'informations sur ces sources connues complique tout de même cette méthode au point de la rendre moins attrayante. La méthode de correction de l'effet DOPPLER est ensuite expliquée. Deux autres méthodes de recherche différentes de la détection synchrone (*méthode avec ajustement et méthode dite «simple»*) sont finalement comparées.

6.1 Réduction de la quantité de données

Si on veut rechercher une étoile à neutrons de fréquence 20 Hz, d'après le théorème de SHANNON [33] on doit échantillonner le signal à au moins le double de la fréquence de celui-ci, ici 40 Hz. Si l'on intègre un an de données, on a $3,15 \times 10^7$ s $\times$ 40 Hz $=$ $1,26 \times 10^9$ valeurs qu'il faut utiliser pour l'intégration. Ce volume de données est supérieur à la capacité mémoire d'une station de travail ordinaire ce qui complique et ralentit toute l'analyse. Pour s'affranchir de ce problème, et donc pour réduire le nombre de valeurs nécessaires, on sélectionne une zone du spectre où l'on peut effectuer la recherche des sources qui nous intéressent. Pour cela on multiplie le signal en sortie du détecteur par une exponentielle complexe à la fréquence ν_s dont on veut décaler le signal. Ensuite on filtre pour éviter le repliement qui risque d'ajouter du bruit lors du sous-échantillonnage. Un signal périodique de fréquence ν_0 a alors comme nouvelle fréquence $\nu_0 - \nu_s$. On peut alors entreprendre, en tenant compte des filtres appliqués, la recherche de pulsars connus ou d'étoiles à neutrons inconnues.

6.2 Détection synchrone

Pour procéder à la détection synchrone il faut connaître la fréquence du signal. On multiplie alors le signal de sortie du détecteur par un signal à cette même fréquence (*qui peut être variable*) et on intègre le tout. Le problème ici est que le détecteur est en mouvement, ce qui introduit deux effets :

- L'effet DOPPLER
- L'effet de modulation d'amplitude

Ces deux effets ont été décrits dans le chapitre précédent. Pour tenir compte de l'effet DOPPLER, il suffit d'avoir la position et la fréquence de la source, auxquelles on a accès. Le problème se pose en fait pour l'effet de modulation d'amplitude. On a montré que le signal à la fréquence simple ou à la fréquence double se mettait sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2}h_+\cos(\Omega t)\left[a + b\cos\eta(t) + c\sin\eta(t) + d\cos 2\eta(t) + e\sin 2\eta(t)\right] \\ &+ \frac{1}{2}h_\times\sin(\Omega t)\left[a' + b'\cos\eta(t) + c'\sin\eta(t) + d'\cos 2\eta(t) + e'\sin 2\eta(t)\right] \end{aligned}$$

Tous les coefficients de cette équation dépendent d'une variable inconnue ψ (*la polarisation de l'onde*) car inaccessible sinon par la détection de l'onde gravitationnelle. Si on calcule l'effet de ce paramètre seul, on transforme l'onde gravitationnelle dans son repère (*représentée par la matrice H_r*) en la matrice, H_d, suivante :

$$\begin{aligned} H_d &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \\ H_d &= \begin{pmatrix} h_+\cos 2\psi - h_\times\sin 2\psi & h_+\sin 2\psi + h_\times\cos 2\psi \\ h_+\sin 2\psi + h_\times\cos 2\psi & -h_+\cos 2\psi + h_\times\sin 2\psi \end{pmatrix} \\ H_d &= \begin{pmatrix} h'_+ & h'_\times \\ h'_\times & -h'_+ \end{pmatrix} \\ h'_+ &= h_+\cos 2\psi - h_\times\sin 2\psi \\ h'_\times &= h_+\sin 2\psi + h_\times\cos 2\psi \end{aligned}$$

On peut donc rendre les coefficients a, b,... indépendants de ψ en redéfinissant h_+ et $h_\times$ en h'_+ et $h'_\times$.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2}h'_+(t)\left[a + b\cos\eta(t) + c\sin\eta(t) + d\cos 2\eta(t) + e\sin 2\eta(t)\right] \\ &+ \frac{1}{2}h'_\times(t)\left[a' + b'\cos\eta(t) + c'\sin\eta(t) + d'\cos 2\eta(t) + e'\sin 2\eta(t)\right] \end{aligned}$$

Le problème de l'effet de modulation est ainsi déplacé dans les termes h'_+ et $h'_\times$ qui s'écrivent (*équations (1.44) et (1.45)*) :

$$\begin{aligned} h'_+ &= h_0 \sin\alpha\cos\alpha \left[\frac{\sin 2i}{4}\cos(\Omega t)\cos 2\psi - \frac{\sin i}{2}\sin(\Omega t)\sin 2\psi\right] \\ &= h_{+0}\cos\left(\Omega t + \phi_+\right) \\ h'_\times &= h_0 \sin\alpha\cos\alpha \left[\frac{\sin 2i}{4}\cos(\Omega t)\sin 2\psi + \frac{\sin i}{2}\sin(\Omega t)\cos 2\psi\right] \\ &= h_{\times 0}\cos\left(\Omega t - \phi_\times\right) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} h_{+0} &= h_0 \left|\sin\alpha\cos\alpha\right| \sqrt{\left[\frac{\sin 2i}{4}\cos 2\psi\right]^2 + \left[\frac{\sin i}{2}\sin 2\psi\right]^2} \\ h_{\times 0} &= h_0 \left|\sin\alpha\cos\alpha\right| \sqrt{\left[\frac{\sin 2i}{4}\sin 2\psi\right]^2 + \left[\frac{\sin i}{2}\cos 2\psi\right]^2} \\ \cos\phi_+ &= \frac{\sin 2i}{4h_{+0}}\cos 2\psi \\ \sin\phi_+ &= \frac{\sin i}{2h_{+0}}\sin 2\psi \\ \cos\phi_\times &= \frac{\sin 2i}{4h_{\times 0}}\sin 2\psi \\ \sin\phi_\times &= \frac{\sin i}{2h_{\times 0}}\cos 2\psi \end{aligned}$$

Sous cette forme, le signal peut être détecté de façon synchrone pour sa polarisation h_+ ou sa polarisation $h_\times$, sans avoir à supposer un quelconque paramètre. Pour la détection de h_+, le signal est multiplié par :

$$f_1(t) \quad = \quad A(t)\cos\Omega t\left(a + b\cos\eta(t) + c\sin\eta(t) + d\cos 2\eta(t) + e\sin 2\eta(t)\right) \tag{6.1}$$

puis intégré au cours du temps. Le même signal est aussi multiplié par :

$$f_2(t) \quad = \quad B(t)\sin\Omega t\left(a + b\cos\eta(t) + c\sin\eta(t) + d\cos 2\eta(t) + e\sin 2\eta(t)\right) \tag{6.2}$$

puis intégré au cours du temps. En faisant la somme quadratique de ces deux résultats, on obtient un résultat indépendant de ϕ_+ : h_{+0}. Le résultat pour la polarisation $h_\times$ est obtenu de même en remplaçant a par a', *etc...*

Malheureusement, le rapport le rapport signal sur bruit change au cours du temps à cause de l'effet de modulation d'amplitude. Pour optimiser cette méthode de recherche il faudrait repondérer les données tel que cela sera décrit dans le paragraphe (6.6), c'est le rôle des coefficients $A(t)$ et $B(t)$. Le signal sera malheureusement réparti entre les polarisations h_+ et $h_\times$, ce qui diminue le signal effectivement disponible. De plus, cette méthode n'est pas utilisable pour la recherche aveugle de sources périodiques, d'où l'intérêt des deux méthodes présentées dans les paragraphes qui suivent.

6.3 Méthode de correction de l'effet DOPPLER

On peut traduire le changement de forme du signal par l'introduction d'un retard dans l'arrivée du signal dû au mouvement du détecteur ou par un changement de phase du signal périodique. Ces deux aspects d'un même phénomène que l'on a étudié vont être décrits dans ce qui suit. La deuxième méthode de correction est utilisée dans les deux méthodes de recherches de pulsars connus présentées dans le paragraphe (6.7).

6.3.1 Méthode du changement du temps d'arrivée

Dans cette méthode, on calcule le temps t_a auquel le signal $h(t)$ observé sur la Terre à l'instant t sera observé au barycentre du système solaire. Cette correction est aisée et ne nécessite que la position du détecteur et la direction de la source. On n'a aucunement besoin de la fréquence de la source. Mais le mouvement de la Terre n'est pas linéaire. La correction ne l'est donc pas non plus et les temps d'arrivée t_a du signal sont non équidistants en temps. On ne peut donc pas utiliser un simple algorithme de transformée de FOURIER rapide, excepté si on interpole le signal pour le rééchantillonner. Mais on a dans ce cas besoin d'une méthode très précise car l'amplitude d'une onde gravitationnelle est très faible par rapport au bruit. Ceci limite les performances de cette méthode ou augmente le coût en temps de calcul.

6.3.2 Méthode du déphasage

Dans cette méthode, au lieu de changer le temps d'arrivée, on change la phase du signal. Pour cela on a besoin d'une fréquence pour transformer un temps en phase, et donc cette méthode ne pourra être appliquée qu'à une bande de fréquences donnée.

En fait, limiter la bande de fréquences n'est pas un problème et se trouve être une solution très efficace du point de vue du temps de calcul et des entrées sorties des données comme nous l'avons vu précédemment. L'idée est de décaler la fréquence du signal vers une fréquence plus basse. Ce décalage de fréquence est effectué dans le repère du barycentre du système solaire. En effet au lieu de décaler simplement les données par une fréquence donnée $-\nu_s$ en multipliant les données du détecteur par $e^{-i2\pi\nu_s t}$, on multiplie le signal par $e^{-i2\pi\nu_s t_a}$, où $t_a = t + \frac{\vec{u}.\vec{r}(t)}{c}$. Ceci corrige l'effet DOPPLER de manière parfaite pour un signal à la fréquence ν_s et d'une très bonne manière pour un signal de fréquence ν_0 si $\nu_0 - \nu_s$ est suffisamment petit. Ce «suffisamment petit» dépend du temps d'intégration. En effet multiplier par $e^{-i2\pi\nu_s t_a}$ revient à décaler la fréquence de la source dans son référentiel. La prise de données est alors effectuée à basse fréquence où on est beaucoup moins sensible à l'effet DOPPLER (*proportionnel à la fréquence du signal à laquelle il est observé*). Le calcul qui suit montre l'effet de la correction proposée. Le signal attendu à ν_0 est maintenant attendu à $\nu_0 - \nu_s$:

$$\hat{h}(\nu_0 - \nu_s) = 2\frac{h_0}{T}\int_0^T e^{-i2\pi(\nu_0-\nu_s)t}\cos\left(2\pi\nu_0 t + \vec{k}.\vec{r}\right).e^{-2i\pi\nu_s t_a}dt$$

$$\begin{aligned}
&= 2\frac{h_0}{T}\int_0^T e^{-i2\pi(\nu_0-\nu_s)t}\frac{e^{i2\pi\nu_0 t_a}+e^{-i2\pi\nu_0 t_a}}{2}e^{-2i\pi\nu_s t_a}dt \\
&= \frac{h_0}{T}\left(\int_0^T e^{-i2\pi(\nu_0-\nu_s)t}e^{2i\pi(\nu_0-\nu_s)\left(t+\frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right)}dt\right. \\
&+ \left.\int_0^T e^{-i2\pi(\nu_0-\nu_s)t}e^{i\left(-2\pi(\nu_0+\nu_s)\left(t+\frac{\vec{u}.\vec{r}}{c}\right)\right)}dt\right) \\
&= \frac{h_0}{T}\left(\int_0^T e^{i2\pi(\nu_0-\nu_s)\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}}dt+\int_0^T e^{-i4\pi\nu_0 t}e^{-i2\pi\nu_s(\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c})}dt\right) \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

L'oscillation rapide de $e^{-i4\pi\nu_0 t}$ comparée à la variation de l'effet DOPPLER fait que le second terme dans (6.3) est nul. Dans le premier terme, l'effet DOPPLER est proportionnel à la fréquence d'observation et est négligeable dans toute la bande de fréquences d'observation si on a choisi une bande de fréquences suffisamment petite.

Il est intéressant de remarquer qu'on peut procéder en deux temps pour calculer le décalage. On multiplie d'abord les données par $e^{-2i\pi\nu_s t}$, ce qui décale le signal sans corriger l'effet DOPPLER. Ensuite on applique un filtre passe-bas pour éviter les effets de repliement lors de la transformée de FOURIER rapide. Après quoi on rééchantillonne à basse fréquence et enfin on multiplie par $e^{-2i\pi\nu_s\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}}$ pour corriger l'effet DOPPLER. Cela présente l'avantage de faire les corrections sur un très petit lot de données, ce qui produit une très grosse économie de temps de calcul. Cela se révélera crucial par la suite dans le cadre d'une recherche aveugle de sources périodiques.

On choisit donc cette dernière méthode plutôt que celle du changement du temps d'arrivée car elle est beaucoup plus fiable, et surtout beaucoup plus rapide.

6.3.3 Détail de la mise en œuvre de la méthode de correction

On va maintenant préciser le fonctionnement de la correction de l'effet DOPPLER. Le travail est partagé en deux phases. La première décale en fréquence les données vers les basses fréquences. Le signal que l'on veut sélectionner est alors dans une bande de fréquences allant de 0 Hz à $\Delta\nu$. On filtre les données avec un filtre passe bas du quatrième ordre pour éviter le repliement du spectre des hautes fréquences. La fréquence de coupure de ce filtre est $\Delta\nu\sqrt{\sqrt{2}-1}/2$, car on ne va accéder qu'à une bande de fréquences de moitié celle du rééchantillonnage. Le filtre du quatrième ordre est un filtre numérique dont la fonction de transfert est :

$$H(\nu) = \left[\frac{1}{1+\frac{4\nu^2}{\Delta\nu^2}}\right]^2 \qquad (6.4)$$

$\Delta\nu$ est tel que $\Delta\nu = \nu_e/m$, où m est un entier et ν_e la fréquence d'échantillonnage. On moyenne sur m points pour diminuer le niveau du bruit, ce qui produit un rééchantillonnage des données à la fréquence $\Delta\nu$. De plus ce moyennage se conduit comme un filtre passe bas.

La deuxième phase consiste à corriger la phase résiduelle due à l'effet DOPPLER en multipliant le résultat du traitement précédent par l'exponentielle complexe $e^{-i2\pi\nu_s \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}(t)}{c}}$.

Ensuite les effets de ces deux filtres doivent être corrigés pour la mise en forme finale. Il faut calculer l'effet que la moyenne produit sur la bande de fréquences comme le filtre précédent. Supposons qu'on moyenne un signal $S(n) = e^{2i\pi n\nu/\nu_e}$. La valeur prise pour le rééchantillonnage, $S'(k)$, est :

$$S'(k) = \frac{\sum_{n=0}^{m-1} S(n+k)}{m} \tag{6.5}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{m-1} e^{2i\pi\frac{\nu}{\nu_e}(n+k)}}{m} \tag{6.6}$$

$$= \frac{e^{2i\pi\frac{\nu}{\nu_e}(k)}}{m}\frac{1-e^{2im\pi\frac{\nu}{\nu_e}}}{1-e^{2i\pi\frac{\nu}{\nu_e}}} \tag{6.7}$$

d'où le module de la fonction de transfert, $F(\nu)$:

$$|F(\nu)| = \left|\frac{1}{m}\frac{\sin\frac{\pi\nu}{\Delta\nu}}{\sin\frac{\pi\nu}{m\Delta\nu}}\right| \tag{6.8}$$

On multiplie donc la norme de la transformée de FOURIER par l'inverse des fonctions de transfert des deux filtres pour obtenir la correction voulue et obtenir une réponse identique pour toute la bande de fréquences. La figure 6.1 montre l'effet de cette correction.

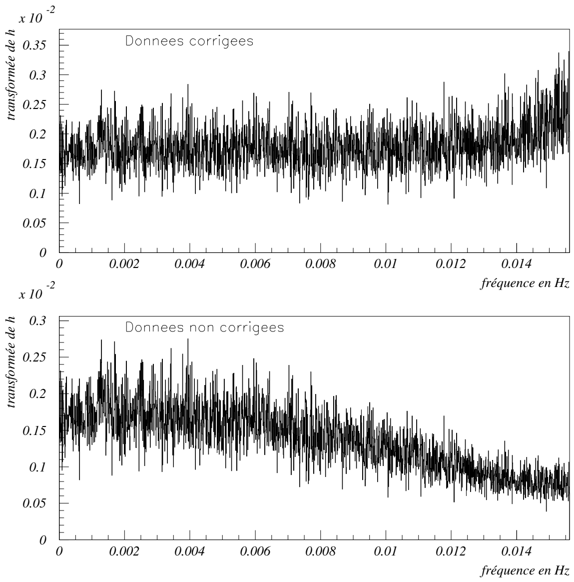


Figure 6.1: Bruit blanc avec et sans correction des filtres

Le seul problème que peuvent causer ces filtres se pose dans le cas où l'effet DOPPLER est corrigé après avoir décalé les données mais pas en même temps, car on introduit un filtrage entre le décalage fréquentiel et la correction de l'effet DOPPLER. Montrons que ce problème n'est pas critique. L'effet DOPPLER est proportionnel à la vitesse relative entre la source et le détecteur, divisée par la vitesse de la lumière. Dans le cas de la vitesse de la Terre, l'effet DOPPLER sur la fréquence est de l'ordre 1×10^{-4}. Cet effet est encore plus faible pour l'effet DOPPLER différentiel. Les variations de la fonction de transfert des deux filtres sont du même ordre à savoir $\approx 10^{-4}$ (*car le filtre a un comportement localement linéaire*), ce qui ne produit pas de modifications majeures du signal. On peut donc encore le corriger après son passage à travers l'ensemble de filtres.

6.4 Correction de l'effet de $\dot{P}$

La correction de cet effet dans le cadre d'une recherche de pulsars connus est relativement simple. Il suffit de procéder de manière similaire à la correction de l'effet DOPPLER en multipliant le signal par une exponentielle complexe. Supposons que seul l'effet de variation de la fréquence dû à $\dot{P}$ intervient. Le signal s'écrit alors :

$$h(t) \quad = \quad h_0 \cos\left(\frac{2\pi}{P_0}t - \frac{\pi\dot{P}}{P_0^2}t^2\right) \tag{6.9}$$

Pour corriger cet effet, il suffit de corriger la phase de ce signal en le multipliant par $exp(i\frac{\pi\dot{P}}{P_0^2}t^2)$, ce qui est possible pour un pulsar connu car P_0 et $\dot{P}$ sont connus. Cet effet n'entraîne donc pas de pertes pour la recherche de pulsars connus.

6.5 Utilité du fenêtrage pour les transformées de FOURIER

La discrétisation de la transformée de FOURIER peut entraîner une perte de signal. En effet, dans le cas idéal on dispose pour la calculer d'un temps d'intégration infini ainsi que du signal en continu. Mais le détecteur donne un signal échantillonné à une fréquence ν_e pendant un temps d'intégration T. Le résultat de la transformée de FOURIER ne peut donc être obtenu que pour un nombre restreint de fréquences, toutes multiples de $\frac{1}{T}$. Prendre le temps d'intégration fini est équivalent à multiplier le signal par une fonction dite rectangle (fonction nulle hors du domaine d'intégration, valant un ailleurs), ce qui dans le domaine fréquentiel se traduit par une convolution par une fonction sinus cardinal de largeur $\frac{1}{T}$. La transformée de FOURIER du signal (*une fonction cosinus*) n'est pas une distribution de DIRAC mais un sinus cardinal centré sur la fréquence du signal. La discrétisation de la transformée laisse la possibilité que la fréquence du signal se situe entre deux fréquences multiples de $1/T$. Dans ce cas, on observe les bords du sinus cardinal, ce qui, dans le pire des cas correspond à $sinc(\pi/2) = 2/\pi \approx 0.64$, donc à une perte de 36%. En moyenne, cet effet s'élève à 12,75%. Pour éviter ce genre de pertes, on peut utiliser une fenêtre autre que la fonction rectangle. Étudions l'effet d'une fenêtre de HANNING sur le signal et le bruit pour évaluer son utilité.

6.5.1 Effet d'une fenêtre de Hanning sur le signal

La fenêtre de HANNING permet de passer d'une manière plus douce de la zone sans données à celle où il y en a. Pour des données comprises entre les temps $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$, la fenêtre $f(t)$ s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi t}{T}\right) \tag{6.10}$$

Le résultat de la transformée de FOURIER n'est plus la convolution avec un sinus cardinal mais avec la transformée de FOURIER de la fenêtre de HANNING $F(\nu)$:

$$F(\nu) = \frac{1}{2}\frac{\sin\pi\nu T}{\pi\nu T\,(1-(\nu T)^2)} \tag{6.11}$$

Cette fonction convoluée avec la distribution de DIRAC perd, par rapport à l'amplitude maximale, en moyenne 5,2% de signal, ce qui est mieux que dans le cas d'une fenêtre rectangle. Mais l'amplitude maximale absolue est deux fois moins grande avec une fenêtre de HANNING. Si le bruit baisse d'un facteur supérieur ou égal à deux, alors on gagne en rapport signal sur bruit, c'est pourquoi on va étudier l'effet de cette fenêtre sur le bruit.

6.5.2 Effet d'une fenêtre de Hanning sur le bruit

Si on a un bruit variant dans le temps, on somme les valeurs locales de manière quadratique. Pour déterminer le paramètre Σ qui va régir la loi de distribution finale on a alors :

$$\Sigma = \sqrt{\int_0^T \sigma^2(t)dt} \tag{6.12}$$

Supposons ici un bruit blanc constant $\sigma(t) = \sigma$. On a alors $\Sigma = \sqrt{T}\sigma$. Le bruit modifié Σ' par la fenêtre de HANNING est alors :

$$\Sigma' = \sqrt{\int_0^T \sigma^2\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2 dt} \tag{6.13}$$

$$= \frac{\sigma}{2}\sqrt{\int_0^T \left(1 + 2\cos\frac{2\pi t}{T} + \cos^2\frac{2\pi t}{T}\right)dt} \tag{6.14}$$

$$= \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}\sqrt{\frac{3}{2}} \tag{6.15}$$

Le rapport signal sur bruit, $S_1 = \frac{h_0 * 0,8725}{\sigma\sqrt{T}}$ dans le cas de la fenêtre rectangle et dans le cas de la fenêtre de HANNING, est de $h_0(1 - 0,052)/(\sigma\sqrt{T}\sqrt{\frac{3}{2}}) = 0,774 h_0/(\sigma\sqrt{T})$, soit moins que dans le cas de la fenêtre rectangle. Ce résultat joue clairement en faveur du fenêtrage de type rectangle.

6.6 Mise en forme des données

Si on veut intégrer le signal d'une source périodique sur un temps long, typiquement une année, il faut prendre en compte les divers problèmes que va rencontrer le détecteur. Ici deux effets sont traités :

- La variation du niveau de bruit au cours du temps
- La disparition complète du signal due à l'arrêt du détecteur

Ainsi des lots de données de différentes qualités vont être mélangés. Quelle est la meilleure façon de traiter ce problème ? Tout ceci est discuté dans les paragraphes suivants.

6.6.1 Méthode proposée pour minimiser l'effet de variation

Pour corriger l'effet d'une variation de bruit, on peut affecter un poids aux différents lots de données en fonction de leur qualité. Pour cela on pondère les lots de données par un coefficient α qui tient compte de leur niveau de bruit par rapport à un niveau de bruit de référence, ce qui va affecter le signal et le bruit d'une manière différente. On va donc devoir choisir α de manière optimum. Dans un premier temps, voyons l'effet que ce coefficient a sur le signal.

6.6.2 Effet d'un coefficient α sur un signal périodique

Considérons un signal périodique, de fréquence ν_0 :

$$h(t) = h_0 \cos 2\pi\nu_0 t \tag{6.16}$$

Le résultat de la transformée de FOURIER normalisée de ce signal est h_0. Supposons maintenant que le signal est multiplié par α pendant une fraction p du temps d'intégration T. Calculons maintenant la transformée de FOURIER de ce signal modifié :

$$\begin{aligned} \hat{h}(\nu_0) &= \frac{2}{T}\left(\int_0^{(1-p)T} e^{-i2\pi\nu_0 t} h_0 \cos 2\pi\nu_0 t dt + \int_{(1-p)T}^{T} \alpha e^{-i2\pi\nu_0 t} h_0 \cos 2\pi\nu_0 t dt\right) \\ &= \frac{2}{T}\left(\int_0^{(1-p)T} e^{-i2\pi\nu_0 t} h_0 \frac{e^{i2\pi\nu_0 t} + e^{-i2\pi\nu_0 t}}{2} dt\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{(1-p)T}^{T} \alpha e^{-i2\pi\nu_0 t} h_0 \frac{e^{i2\pi\nu_0 t} + e^{-i2\pi\nu_0 t}}{2} dt \Big) \\
&= h_0 \left(1 + p(\alpha - 1)\right) \\
&+ h_0 \left[(1-p)e^{-2i\pi\nu_0(1-p)T} sinc(2\pi\nu_0 T(1-p)) - \alpha p e^{-4i\pi\nu_0 T(1+\frac{p}{2})} sinc(2\pi\nu_0 Tp)\right] \\
&\approx h_0 \left(1 + p(\alpha - 1)\right) \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

Les termes en sinus cardinal peuvent être négligés car $\nu_0 T(1-p) \gg 2\pi$ et $\nu_0 Tp \gg 2\pi$ sauf dans le cas où $p \simeq 0$ ou $\simeq 1$, cas qui correspondent à un lot de données à peu près homogène. Ce calcul n'a alors plus d'intérêt.

6.6.3 Effet d'un coefficient α sur du bruit

Le niveau de bruit est donné en intégrant la puissance du bruit (carré de l'écart type) sur le temps d'intégration. Ici, on suppose que le bruit est séparé en deux lots de données : une première fraction $1-p$ de données ayant un niveau de bruit σ (en $h/\sqrt{Hz}$), et une deuxième fraction p de données ayant un niveau de bruit σ'. Si on multiplie, comme précédemment, la fraction p du bruit par α, on doit donc faire une somme pondérée des carrés des écarts-types.

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \sqrt{(1-p)\sigma^2 + p\alpha^2\sigma'^2} \qquad (6.18) \\
&= \sigma\sqrt{1 + p(\frac{\alpha^2\sigma'^2}{\sigma^2} - 1)} \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

En raison de la normalisation de la transformée de Fourier pour un temps d'intégration T, ce niveau de bruit devient :

$$
N = \frac{\sigma\sqrt{4-\pi}\sqrt{1 + p(\frac{\alpha^2\sigma'^2}{\sigma^2} - 1)}}{\sqrt{T}} \qquad (6.20)
$$

Le facteur $\sqrt{4-\pi}$ vient de la forme de la distribution du bruit, P, qui pour un σ donné, est une distribution de type Rayleigh :

$$
P(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \qquad (6.21)
$$

6.6.4 Rapport signal sur bruit

On veut maximiser le rapport signal sur bruit en fonction du coefficient α choisi. Si on définit le rapport signal sur bruit comme $\frac{S}{N}$, on obtient, en fonction de α :

$$
\frac{S}{N} = \frac{h_0\sqrt{T}\left[1 + p(\alpha - 1)\right]}{\sigma\sqrt{4-\pi}\sqrt{1 + p(\frac{\alpha^2\sigma'^2}{\sigma^2} - 1)}} \qquad (6.22)
$$

Dérivons l'équation (6.22) par rapport à α. Ceci déterminera le coefficient le plus adapté au problème.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \frac{S}{N}}{\partial \alpha} &= \frac{h_0\sqrt{T}}{\sigma\sqrt{4-\pi}} \frac{p\sqrt{1+p(\frac{\alpha^2\sigma'^2}{\sigma^2}-1)} - \frac{p\alpha\sigma'^2[1+p(\alpha-1)]}{\sigma^2\sqrt{1+p(\frac{\alpha^2\sigma'^2}{\sigma^2}-1)}}}{1+p(\frac{\alpha^2\sigma'^2}{\sigma^2}-1)} && (6.23)\\
&= \frac{ph_0\sqrt{T}}{\sigma\sqrt{4-\pi}} \frac{\left(1+p(\frac{\alpha^2\sigma'^2}{\sigma^2}-1)\right) - \alpha\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}[1+p(\alpha-1)]}{\left(1+p(\frac{\alpha^2\sigma'^2}{\sigma^2}-1)\right)^{\frac{3}{2}}} && (6.24)\\
&= 0 && (6.25)\\
&\Longleftrightarrow && (6.26)\\
0 &= \left(1+p(\frac{\alpha^2\sigma'^2}{\sigma^2}-1)\right) - \alpha\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}[1+p(\alpha-1)] && (6.27)\\
\alpha &= \frac{\sigma^2}{\sigma'^2} && (6.28)
\end{aligned}$$

Ce coefficient α correspond bien à un maximum du rapport signal sur bruit. On peut généraliser cette méthode à plus de deux sous-lots de données. On pondère chaque sous-lot de données par un coefficient $\frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$, où σ est l'écart quadratique moyen du sous-lot de données le moins bruité. Le rapport signal sur bruit devient alors :

$$\frac{S}{N} = \frac{h_0\sqrt{T}}{\sigma\sqrt{4-\pi}}\sqrt{1+\sum p_i\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}-1\right)} \qquad (6.29)$$

Si on est dans le cas idéal, c'est-à-dire avec un seul niveau de bruit, on s'attend à ce que le rapport signal sur bruit soit $\frac{h_0\sqrt{T}}{\sigma\sqrt{4-\pi}}$. Pour un lot de données à niveau de bruit variable, on peut donc définir un temps d'intégration équivalent T_e qui correspond à une intégration avec un niveau de bruit constant σ. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{h_0\sqrt{T_e}}{\sigma\sqrt{4-\pi}} &= \frac{h_0\sqrt{T}\sqrt{1+\sum p_i\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}-1\right)}}{\sigma\sqrt{4-\pi}} \\
T_e &= T\left[1+\sum p_i\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}-1\right)\right] && (6.30)
\end{aligned}$$

La définition de ce temps équivalent permet d'évaluer l'intérêt d'ajouter des données de très mauvaise qualité.

De plus, on peut généraliser la formule de l'équation (6.29) avec un poids continu :

$$T_e = \int_0^T \omega(t)dt \qquad (6.31)$$

où $\omega(t) = \frac{\sigma_{min}^2}{\sigma(t)^2}$ est le poids appliqué en continu. Dans le cas où la variation du niveau de bruit est due à la différence jour/nuit, on peut voir apparaître une certaine périodicité dans $\omega(t)$, ce qui peut produire des bandes latérales dans la transformée de FOURIER du signal. Ces bandes latérales sont de nature bien définie. On peut en effet connaître la transformée de FOURIER de $\omega(t)$. Grâce à une convolution, on obtient donc la transformée de FOURIER du signal.

6.6.5 Comparaison numérique dans un cas réaliste

On compare ici un même signal périodique ($\nu = 6$ Hz, $h_0 = 1$) avec un niveau de bruit variable $\sigma_{min} = 5$ Hz$^{-\frac{1}{2}}$ et $\sigma_{max} = 10$ Hz$^{-\frac{1}{2}}$. La période de variation du bruit est de 12 heures pour simuler la différence jour/nuit. La figure 6.2 montre la somme du signal et du bruit en fonction du temps, le signal étant très inférieur au bruit, il n'apparaît pas sur la figure.

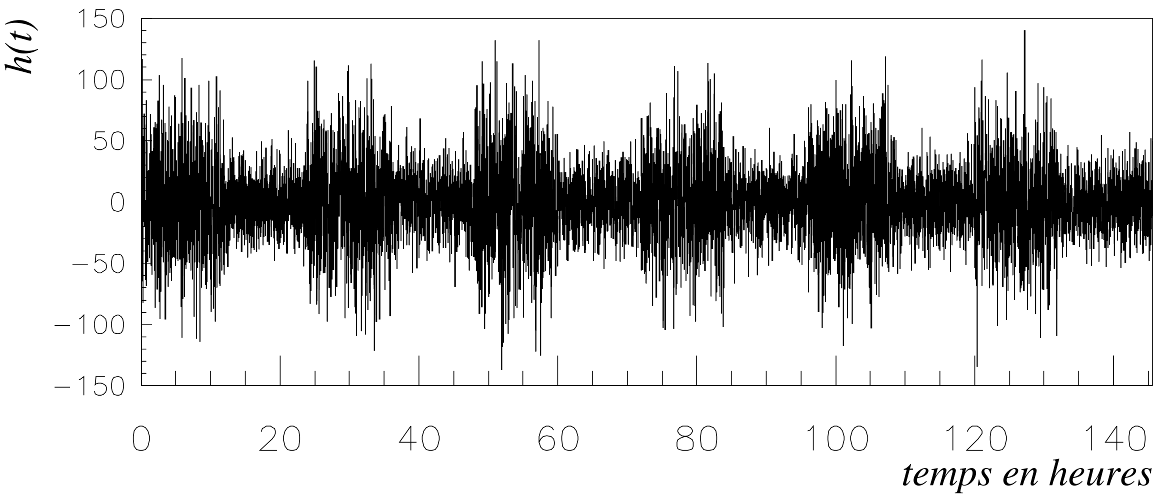


Figure 6.2: Signal plus bruit en fonction du temps

La figure 6.3 montre la transformée de FOURIER de cette somme sans les corrections proposées précédemment. La figure 6.4 présente la même transformée avec la correction optimale appliquée.

La mesure des distributions de bruit et des hauteurs des signaux donne pour la figure 6.3 un rapport signal sur bruit de $24,36$ et pour la figure 6.4 un rapport signal sur bruit de $30,82$. L'équation (6.29) prédit pour ces deux courbes un rapport de respectivement $24,71$ et $30,89$.

On observe donc un bon accord entre les prévisions analytiques et la mesure du rapport signal sur bruit. Les mesures ont été effectuées à l'aide de la méthode de correction de l'effet DOPPLER décrite au chapitre 5. Pour mesurer le signal, il suffit

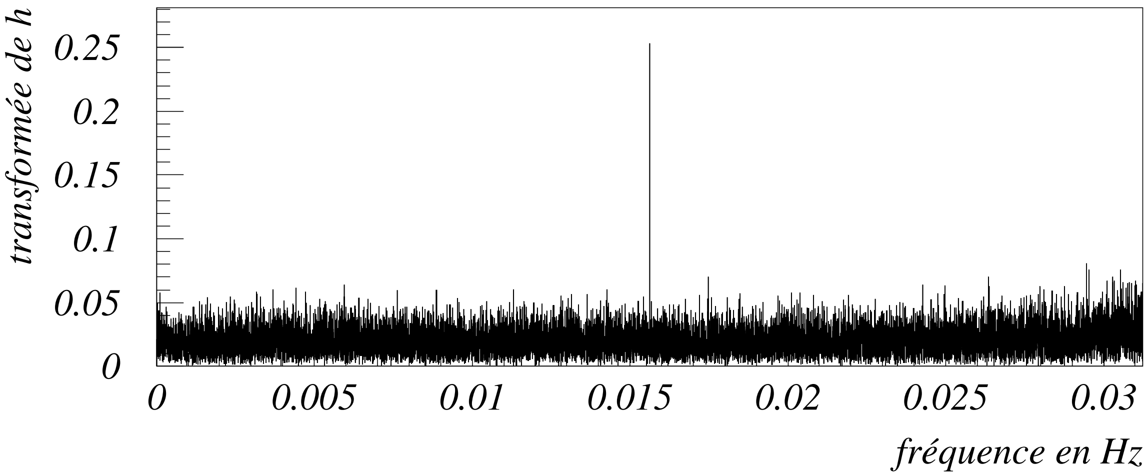


Figure 6.3: Transformée de FOURIER du signal plus bruit sans correction

de prendre la valeur maximale que renvoie la transformée de FOURIER à la fréquence attendue. Pour mesurer le bruit, il faut prendre les points hors signal, et hors de la zone où l'on est sensible au repliement. Cela correspond ici à toutes les valeurs de la fréquence sauf les dix derniers % de la bande de fréquences de la transformée et la valeur de la transformée au niveau de la fréquence du signal.

6.6.6 Que faire en cas de zone de temps sans données ?

On suppose ici que la valeur moyenne du signal est zéro. Dans le cas contraire, il faudrait soustraire la valeur moyenne aux données. La transformée de FOURIER étant une opération linéaire, une zone sans données peut être considérée comme la somme du signal et de son opposé. Le signal final est donc altéré par un signal opposé émis pendant le temps ΔT sans données. L'amplitude du signal croissant comme T, la perte de signal est proportionnelle à $\Delta T/T$. Le bruit, quant à lui, va évoluer comme suit : $\sqrt{1-\frac{\Delta T}{T}}$. Le rapport signal sur bruit va donc passer de $\propto \sqrt{T}$ à $\propto \sqrt{T}\sqrt{1-\frac{\Delta T}{T}}$, ce qui est équivalent à la prise de données sur un temps $T-\Delta T$. La forme d'un signal périodique sera altérée mais calculable.

6.7 Recherche d'une source périodique dans le spectre en fréquence

Si la source est monochromatique, on peut profiter de la forme que va avoir la transformée de FOURIER. Pour un temps d'intégration T fini, la transformée de FOURIER $f(\nu)$ d'une sinusoïde de fréquence ν_0 va être un sinus cardinal centré en ν_0. S'il

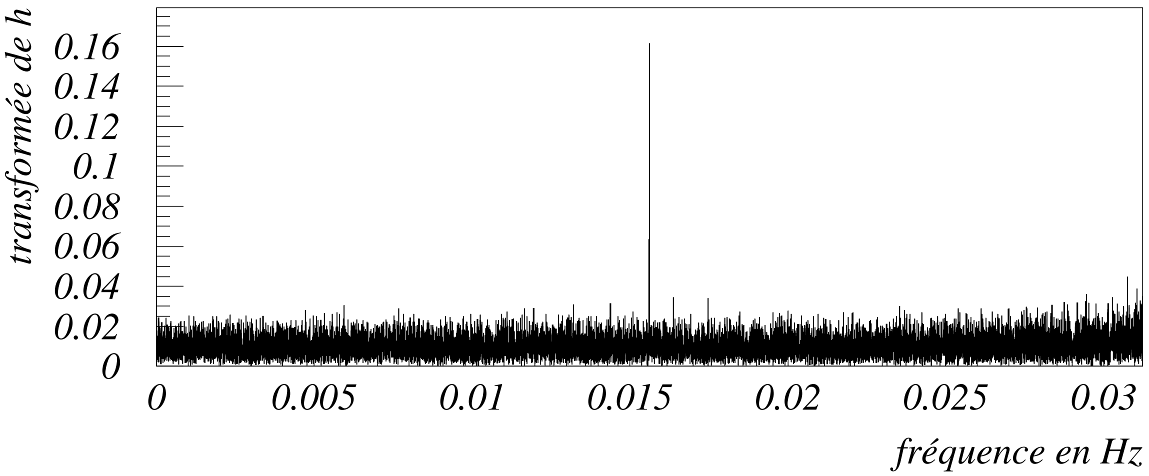


Figure 6.4: Transformée de FOURIER du signal plus bruit avec la correction optimale

y a des arrêts du détecteur ou des corrections des variations du niveau de bruit (*cf paragraphe (6.6)*),la forme de f est différente mais calculable en utilisant les coefficients de correction et les temps morts du détecteur. Une fois l'effet DOPPLER corrigé et la transformée de FOURIER effectuée, deux méthodes s'offrent à nous pour mesurer la hauteur des pics des pulsars connus. La première est celle que l'on pourrait qualifier de simple et l'autre la méthode dite avec ajustement. Ces deux méthodes vont être détaillées dans les paragraphes suivants. Mais auparavant, la mesure du bruit est expliquée et ensuite utilisée par les deux méthodes pour évaluer le bruit de fond lors de la mesure.

6.7.1 Mesure du bruit

Le niveau de bruit peut varier en fonction du temps, mais il reste localement gaussien en partie réelle et imaginaire sur de petits domaines de fréquences après transformée de FOURIER. On prend donc un sous-lot de données où le bruit est localement gaussien. Ceci permet de calculer un estimateur de l'écart quadratique moyen afin de discriminer localement le signal du bruit. Si le bruit est parfaitement gaussien, on peut alors calculer la forme qu'il doit avoir. La transformée, sur un temps T, d'une variable aléatoire gaussienne, de largeur à mi-hauteur σ_0 en $\mathrm{Hz}^{-\frac{1}{2}}$, a pour partie réelle une variable aléatoire x, d'écart quadratique moyen $\sigma = \sigma_0/\sqrt{T}$. La partie imaginaire y, est, elle aussi, une variable aléatoire de même écart quadratique moyen. Ces variables sont distribuées selon les lois suivantes :

$$p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (6.32)$$

$$p(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \tag{6.33}$$

Calculons la distribution P de l'amplitude $r = \sqrt{x^2+y^2}$ de la transformée de FOURIER.

$$\begin{aligned} P(R)dR &= \int_{R<\sqrt{x^2+y^2}<R+dR} p(x)p(y)dxdy & (6.34)\\ &= \int_{R<\sqrt{x^2+y^2}<R+dR} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dxdy & (6.35)\\ &= \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} RdR & (6.36)\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$P(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \tag{6.37}$$

Calculons l'espérance, M, de cette distribution et son écart quadratique moyen, σ', en fonction de σ.

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty rP(r)dr & (6.38)\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma & (6.39)\\ \sigma' &= \sqrt{\int_0^\infty r^2 P(r)dr - M^2} & (6.40)\\ \sigma' &= \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}\sigma & (6.41)\end{aligned}$$

On peut remarquer que M et σ' sont tous deux proportionnels à σ, ce qui nous permet d'avoir une mesure de la forme plus ou moins gaussienne du bruit que l'on a dans chaque sous lot de données. En effet le rapport σ'/M doit être égal à $\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$. On n'a malheureusement accès qu'à un nombre fini, N, d'occurences de la variable aléatoire r, et on ne peut qu'estimer la moyenne et l'écart quadratique moyen de notre distribution en bruit. Heureusement les estimateurs suivants convergent vers les bonnes valeurs :

$$\begin{aligned} M &\approx \frac{\sum_i r_i}{N} & (6.42)\\ \sigma' &\approx \frac{N}{N-1}\left[\frac{\sum_i r_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_i r_i}{N}\right)^2\right] & (6.43)\end{aligned}$$

Ces estimateurs donnent une valeur approchée des valeurs théoriques à l'erreur relative $\frac{1}{N}$ près. Ces valeurs seront utilisées dans les deux méthodes suivantes pour évaluer le bruit autour du signal.

6.7.2 Mesure dite simple

Cette mesure de la hauteur du pic est réalisée en prenant le maximum de l'amplitude sur les trois valeurs de la transformée de FOURIER discrète aux fréquences entourant la fréquence cherchée. Trois mesures ont été choisies plutôt que deux à cause du manque de définition dans la position de la fréquence. En effet, le décalage moyen dû à une correction de l'effet DOPPLER ne donne pas une fréquence très précise.

6.7.3 Mesure de hauteur de pic par ajustement

On essaye d'ajuster les pics en fréquence et en amplitude. Bien que la fréquence de la source soit connue, sa position par rapport à la mesure par transformée de FOURIER peut ne pas être optimale, en particulier si la position de la source n'est pas parfaitement connue. L'ajustement permet de réduire ce problème. On peut ajuster les pics par la méthode de minimisation du χ^2 ou de maximisation de la vraisemblance. Cette dernière méthode n'est pas utilisée ici car dans notre cas elle est moins robuste numériquement (*l'évaluation de la distribution du signal comportant une fonction de* BESSEL*, l'évaluation numérique a posé problème*). On ajuste les données autour d'un pic de signal avec la forme de la fonction f qui peut être calculée en faisant la transformée de FOURIER des corrections appliquées pour corriger les variations du niveau de bruit. On tient compte aussi des coupures de prises de données. On les considère comme des corrections du signal avec un coefficient égal à zéro. Une méthode qui crée une série de modèles* pouvant être comparés au signal potentiel a été mise au point. Elle consiste en l'émission d'un signal un quand le détecteur fonctionne, et nul quand il est hors de fonctionnement. On pratique une série de transformées de FOURIER rapides sur ce signal dont la fréquence est à chaque fois décalée d'une certaine fraction du pas de fréquence élémentaire $1/T$. La fraction du pas dépend du nombre de modèles que l'on souhaite obtenir. Pour trente modèles, par exemple, les fréquences sont décalées d'un dixième de pas. Ceci permet à l'ensemble des modèles de décrire trois pas de fréquence et donc d'avoir une bonne approximation du pic de signal que l'on cherche à ajuster.

La minimisation du χ^2 est réalisée dans ce cas en faisant varier l'amplitude potentielle du signal et les différents modèles. Si on définit :

- (x_i, y_i) un couple fréquence/amplitude mesuré
- f_j la fonction que l'on veut ajuster, qui correspond au modèle j
- σ_i correspond à l'écart quadratique moyen estimé
- h correspond à l'amplitude du modèle

*Un modèle correspond à la forme que prend le signal après avoir appliqué les corrections vues au paragraphe (6.6) le χ^2 peut alors être défini par l'équation suivante :

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - hf_j(x_i))^2}{\sigma_i^2} \tag{6.44}$$

Pour minimiser la fonction χ^2, elle est calculée pour différentes valeurs de h et de j. De plus, pour introduire le bruit dans l'estimation, on somme quadratiquement le modèle j, multiplié par h, avec la valeur moyenne du bruit. On peut considérer que σ_i ne dépend pas de i grâce à la découpe en sous-lots de données. On notera donc dans la suite σ au lieu de σ_i. La figure 6.6 montre les valeurs que prennent le χ^2 en fonction du modèle j et de la valeur de h, ceci pour le pic présent sur la figure 6.5.

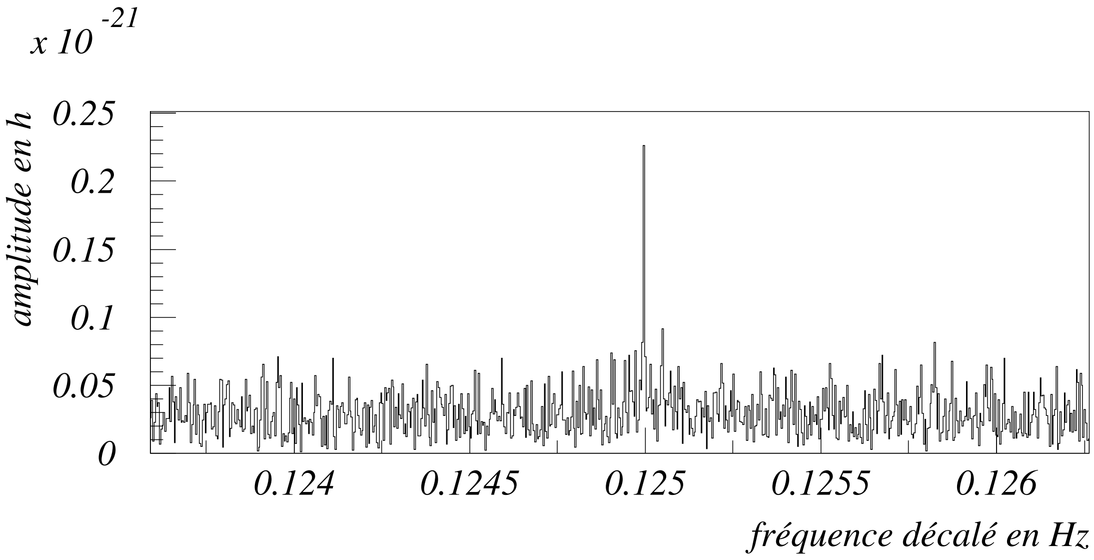


Figure 6.5: Valeurs de la transformée de FOURIER utilisées pour tester l'ajustement

En prenant le couple h/modèle minimisant le χ^2, la distance quadratique entre la forme modélisée et les données se trouve elle aussi minimisée. La figure 6.7 compare les données et l'ajustement calculé. L'accord de l'ajustement est relativement bon.

6.7.4 Détail de l'algorithme de recherche

La figure 6.8 résume l'algorithme utilisé pour l'analyse de sources connues. Le seuil étant déterminé en fonction de la distribution du bruit attendu et en fonction du nombre de pulsars que l'on recherche.

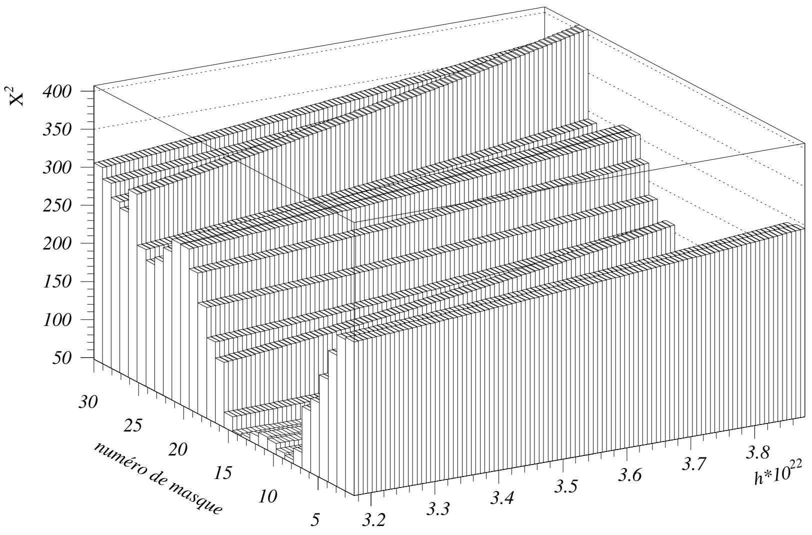


Figure 6.6: Valeurs du χ^2 en fonction de h et des différents modèles

6.8 Efficacité des différentes méthodes

Comme cela a été montré dans le paragraphe (5.4), le signal est distribué sur cinq fréquences : la principale et quatre bandes latérales. On a donc défini une profondeur de recherche, qui varie de zéro à deux, ce qui correspond à la mesure du pic principal pour une profondeur nulle et à la mesure du pic principal plus deux bandes latérales de chaque coté pour la profondeur deux. Ensuite on peut décider d'additionner la puissance des plus hautes valeurs de ces pics. On va donc pouvoir évaluer l'efficacité de la méthode d'ajustement et de la méthode simple. Elles sont appliquées à une partie des données qui est le résultat de décalages en fréquence du signal, comme cela est expliqué dans le paragraphe (6.3). On part du spectre en fréquence donné par la figure 6.9. Après décalage, un grossissement pour la zone de fréquence [5 Hz,16 Hz] est obtenu, bande de fréquences où on a placé 108 sources utilisées pour les calculs d'efficacité et de pureté des différentes méthodes.

Rappelons que les méthodes de recherche consistent à définir un nombre de candidats fortuits tolérés pour l'analyse. Le taux de fortuits est ce nombre normalisé au nombre de recherches effectuées. À partir de là peut être calculé le seuil de détection au-dessus duquel toute valeur sera considérée comme du signal.

On définit l'efficacité ϵ, par le nombre de vrais pulsars détectés divisé par le nombre de pulsars attendus. La pureté ρ, correspond à la proportion de pulsars réellement détectés sur le nombre de détections. Ces grandeurs sont étudiées à l'aide de SIESTA en fonction du taux d'événements fortuits tolérés.

La valeur élevée du signal peut modifier de manière non négligeable le résultat du

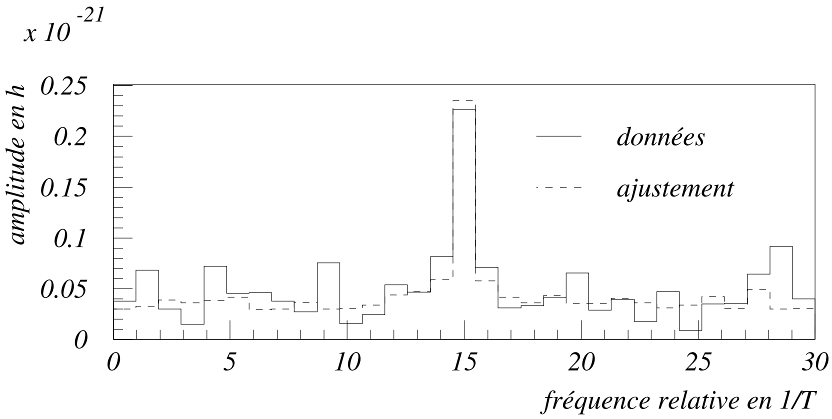


Figure 6.7: Comparaison des données avec l'ajustement réalisé dans le cas de la méthode de minimisation du χ^2

calcul local de la moyenne du bruit et son écart quadratique moyen. Pour y remédier, on rajoute un paramètre à la recherche. Ce paramètre correspond à la proportion de données (les plus petites valeurs) que l'on utilise pour calculer les valeurs de la moyenne et de l'écart-type.

Une fois calculé, l'écart-type permet de normaliser la mesure. Dans le cas du bruit, on aura une distribution selon la loi suivante :

$$p(r) = re^{-\frac{r^2}{2}} \tag{6.45}$$

Pour limiter les biais de la méthode de recherche et pour les mesurer, on introduit l'ajustement d'un paramètre β qui correspond à l'ajustement de la distribution $p(r) = \beta re^{-\beta\frac{r^2}{2}}$ pour une recherche sur la sortie du détecteur sans que l'on ait mis de pulsars dans la simulation.

Le seuil α pour déterminer la coupure pour un taux de fortuit τ se calcule alors par :

$$\int_\alpha^\infty p(r)dr = \tau \tag{6.46}$$

$$e^{-\beta\frac{\alpha^2}{2}} = \tau \tag{6.47}$$

$$\alpha = \sqrt{-\frac{2}{\beta}\ln\tau} \tag{6.48}$$

Dans le cas où on somme plusieurs pics, on additionne les puissances car c'est plus simple à comparer au bruit qui s'ajoute linéairement en puissance. La distribution de la somme de n pics en puissance du bruit est alors la suivante :

$$q(r) \;=\; \frac{r^{n-1}}{(n-1)!2^n}e^{-\frac{r}{2}} \tag{6.49}$$

qui, pour l'ajustement, devient :

$$q(r) \;=\; \frac{\beta^n r^{n-1}}{(n-1)!2^n}e^{-\beta\frac{r}{2}} \tag{6.50}$$

Le calcul de α se fait ici numériquement, avec :

$$\int_{\alpha}^{\infty} q(r)dr = e^{-\beta\alpha}\sum_{1}^{n-1}\frac{\left[\frac{\alpha\beta}{2}\right]^i - 1}{(n-1)!} = \tau \tag{6.51}$$

L'efficacité et la pureté dans la figure 6.10 montrent que la méthode simple est plus efficace que la méthode avec ajustement. Elles montrent aussi que la somme des amplitudes permet d'augmenter l'efficacité de l'analyse (*figure 6.11*) à haut rapport signal sur bruit. Ces figures ont été calculées pour trois amplitudes types de pulsars avec, respectivement, des facteurs 30, 10 et 3 en faveur du bruit après une seconde d'intégration, l'intégration finale étant de douze jours.

Du fait d'un mauvais ajustement du bruit, la méthode avec ajustement est moins performante que la méthode simple. Ce phénomène s'amplifie quand on essaye de retirer une partie des données pour améliorer le calcul de l'écart quadratique moyen, tandis que dans le cas de la méthode simple ce procédé améliore les choses. C'est ce que montre la figure 6.12.

Les deux méthodes peuvent aussi être comparées pour des rapports signal sur bruit moins favorables. La figure 6.13 compare la méthode avec ajustement et la méthode simple pour le rapport signal sur bruit de un dixième et la figure 6.14 pour un trentième.

La méthode simple reste la meilleure. Mais la comparaison de l'efficacité, pour les différents rapport signal sur bruit, pour la méthode d'ajustement présente un comportement anormal. En effet, l'efficacité est moins bonne pour un rapport signal sur bruit de $\frac{1}{3}$ que pour celui de $\frac{1}{10}$. Ceci peut s'expliquer par le fait que la méthode d'ajustement évalue très mal le bruit qui, dans le cas de hauts rapports signal sur bruit, est fortement modifié (*108 pulsars sont simulés sur une petite bande de fréquences*). Cette méthode n'est donc pas utilisable pour la recherche aveugle. La méthode simple sera donc utilisée. De plus, la méthode avec ajustement demande d'être examinée de nouveau. En effet, si l'on arrive à résoudre les problèmes numériques, la méthode du maximum de vraisemblance devrait produire de meilleure mesure du bruit et permettre de tirer profit à bas rapport signal sur bruit de la somme du signal sur ses cinq fréquences.

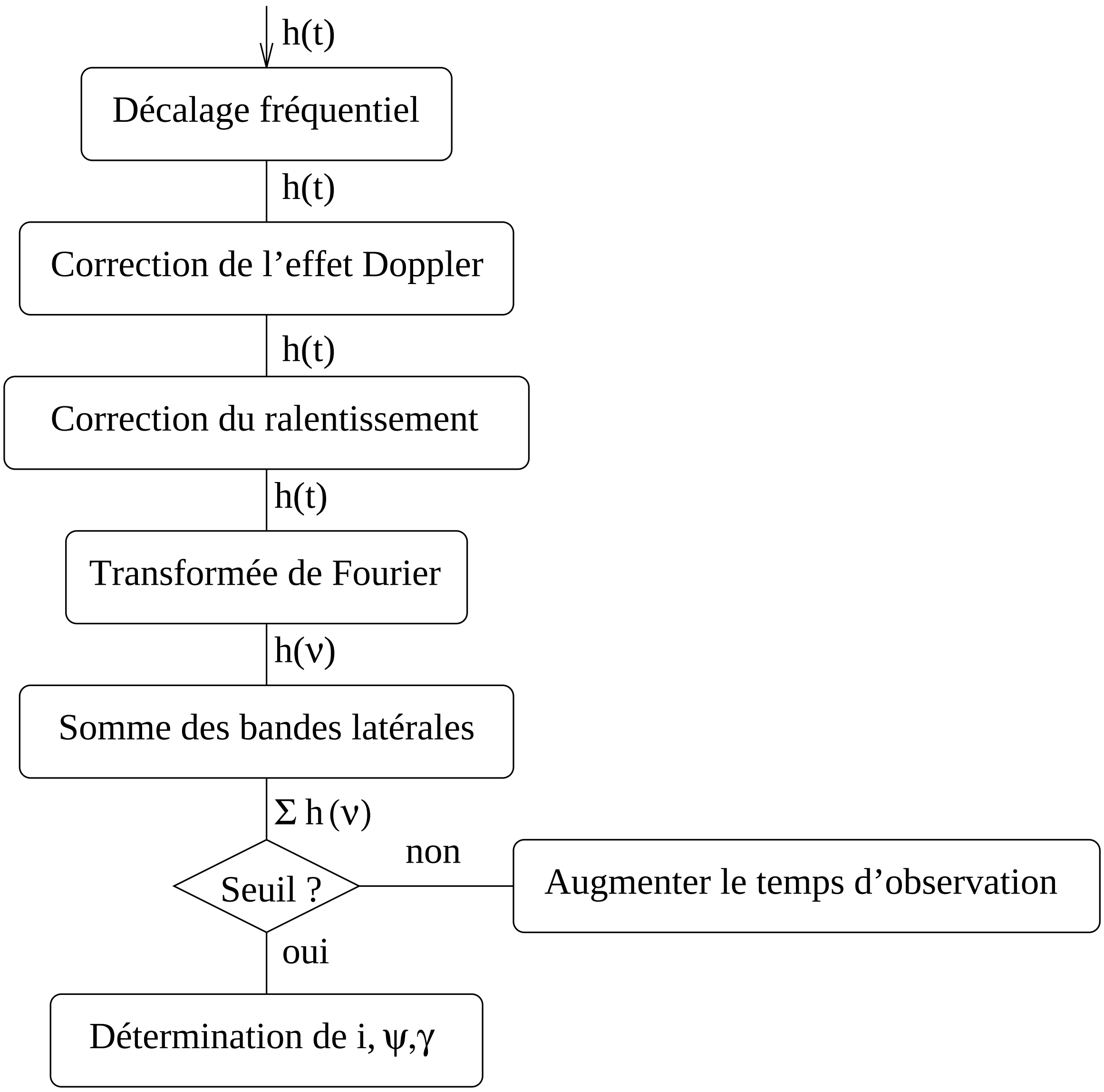


Figure 6.8: Algorithme pour la recherche de pulsars connus. Cet algorithme est exécuté pour chaque pulsar

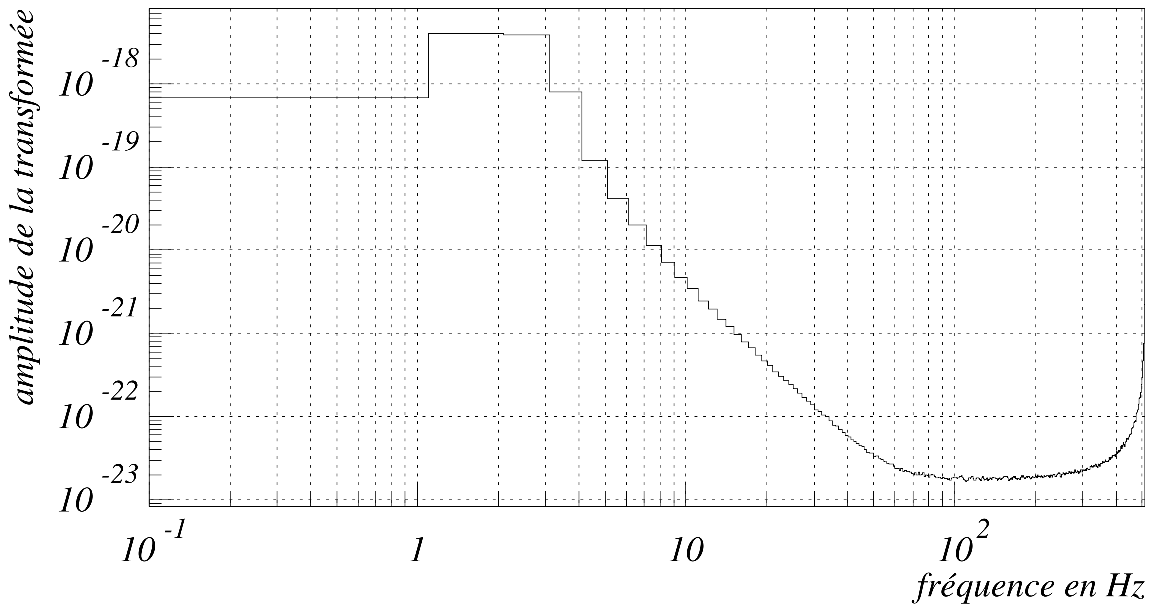


Figure 6.9: 256 moyennes de la transformée de FOURIER du signal

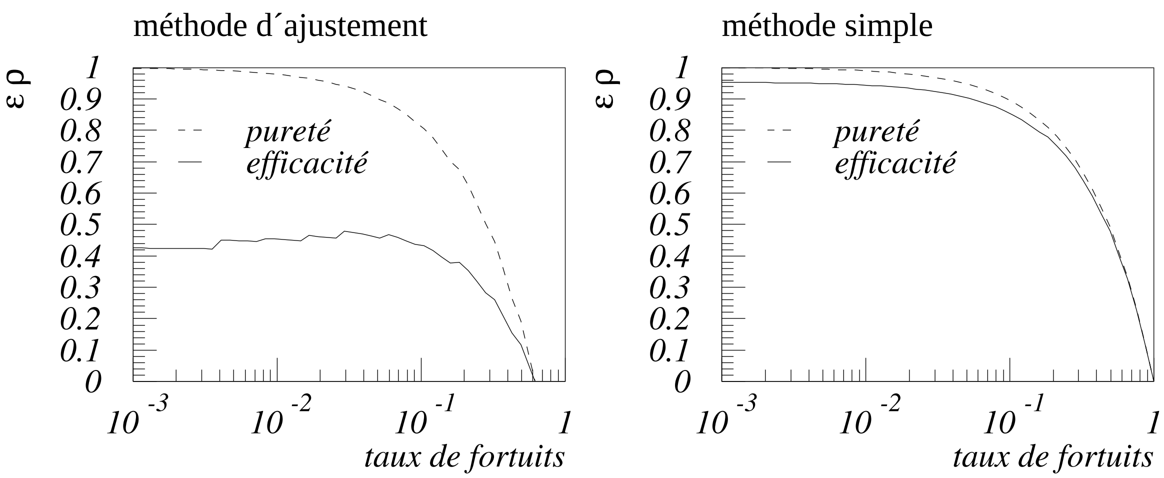


Figure 6.10: Comparaison de la méthode simple avec la méthode d'ajustement pour un rapport signal sur bruit $\frac{1}{3}$ sur une seconde d'intégration

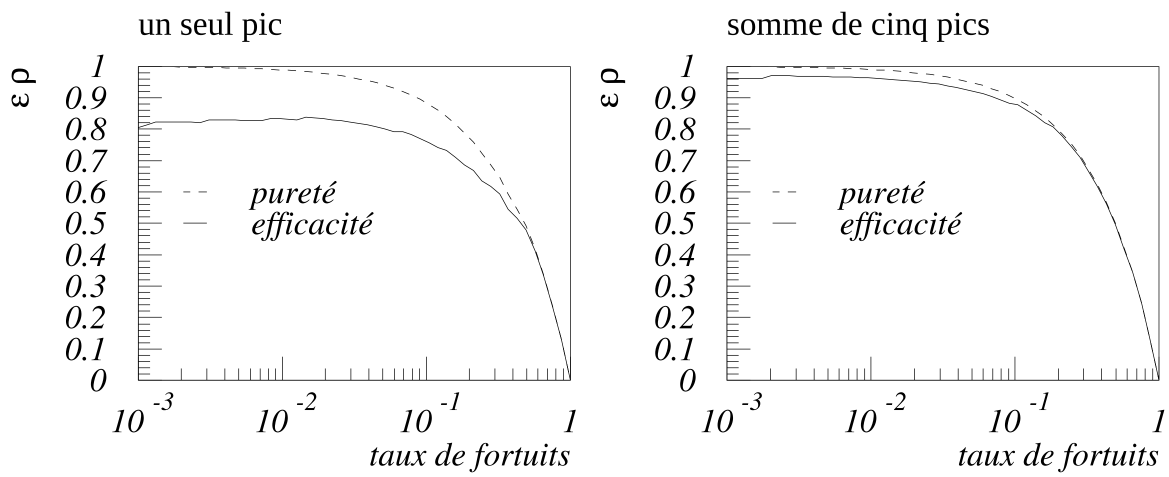


Figure 6.11: Comparaison entre la recherche avec un seul pic et celle avec cinq pics dans le cas de la méthode simple pour l'amplitude de départ maximum

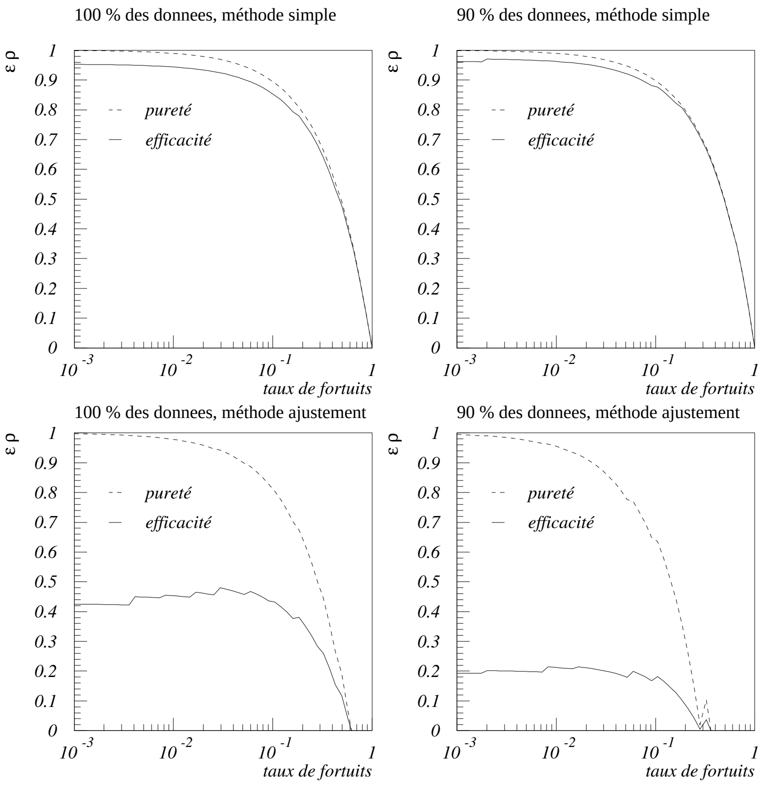


Figure 6.12: Comparaison entre la méthode d'ajustement et la méthode simple avec 90% et 100% des données pour le calcul de l'écart quadratique moyen

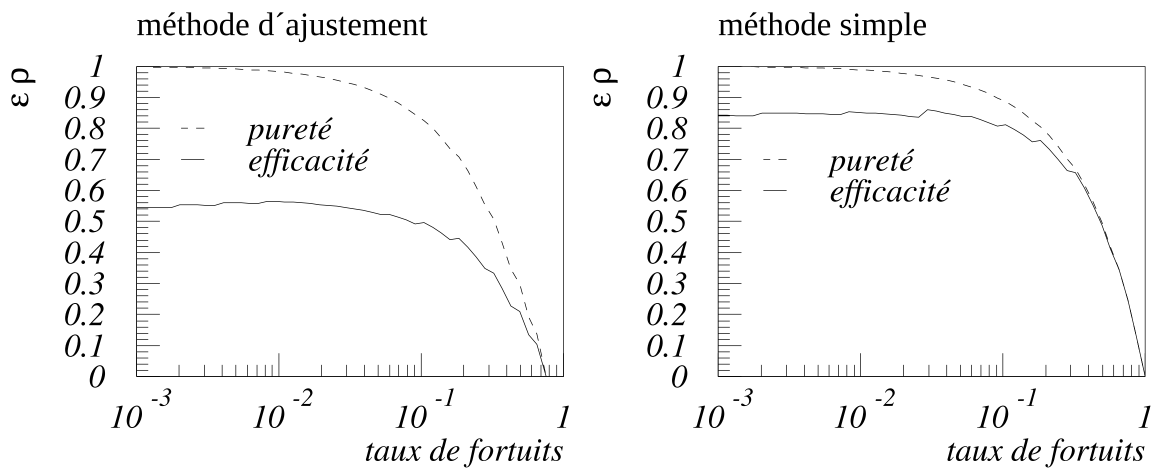


Figure 6.13: Comparaison de la méthode simple avec la méthode d'ajustement avec un rapport signal sur bruit $\frac{1}{10}$ sur une seconde d'intégration

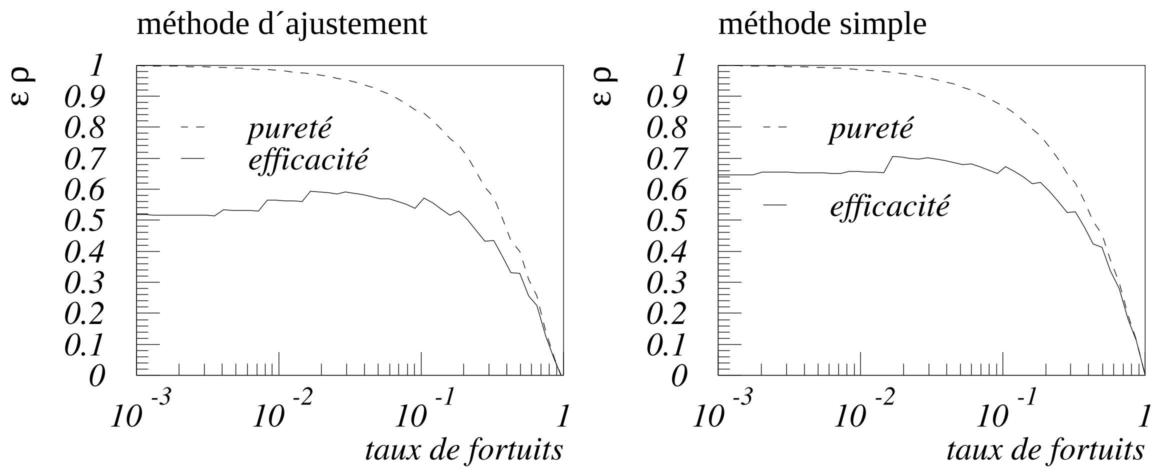


Figure 6.14: Comparaison de la méthode simple avec la méthode d'ajustement avec un rapport signal sur bruit $\frac{1}{30}$ sur une seconde d'intégration

Chapitre 7

Recherche d'étoiles à neutrons inconnues

LA PROPORTION DE PULSARS qui émettent dans notre direction est estimée à 10% de la population totale des pulsars. Les ondes gravitationnelles émises par une étoile à neutrons étant beaucoup moins directionnelles, on peut espérer que la quasi-totalité des étoiles à neutrons émettent des ondes gravitationnelles, probablement très faible, dans notre direction. C'est pourquoi une recherche en aveugle, c'est-à-dire en ne supposant pas connue la direction d'une hypothétique source, nous permettra peut être de trouver des sources non vues électromagnétiquement et pourtant plus proches de nous que les sources connues. Cette recherche présente plusieurs problèmes dont le principal est que la correction de l'effet DOPPLER n'est valable que pour une zone limitée dans le ciel. Le principe de base de la recherche de sources inconnues est de découper le ciel en petites cellules dont la taille est dictée par l'effet DOPPLER. Pour chacune de ces cellules nous rechercherons dans la bande de fréquences qui nous intéresse un candidat. Nous allons donc évaluer le nombre de cellules de recherche nécessaires. Un autre problème est que la fréquence des étoiles à neutrons dérive lentement au cours du temps. Nous allons dans ce chapitre présenter ces différents problèmes, puis proposer différents algorithmes de recherche en essayant d'évaluer leur efficacité. Ils seront de plus comparés aux méthodes proposées dans la littérature.

7.1 Effet du ralentissement des étoiles à neutrons

Bien qu'elles tournent avec une fréquence très stable, les étoiles à neutrons subissent un ralentissement qui est décrit au chapitre 1. Ce ralentissement provoque un changement de la fréquence de la source qui risque de nous faire perdre du signal d'une manière similaire à l'effet DOPPLER car on ne connaît pas le $\dot{P}$ d'une source inconnue.

On peut modéliser ce ralentissement en changeant la période P_0 de l'étoile à neutrons en $P(t) = P_0 + \dot{P}t$. La phase du signal passe de $\phi(t) = \frac{2\pi}{P_0}t$ à $\phi(t) = \int \frac{2\pi}{P_0+\dot{P}t}dt$. Comme cela est montré sur la figure 1.4, on peut supposer $\dot{P}t \ll P_0$ pour un temps d'intégration inférieur à un an. Dans ce cas, l'approximation suivante est valable :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int \frac{2\pi}{P_0}dt - \int \frac{2\pi\dot{P}}{P_0^2}tdt && (7.1) \\ &= \frac{2\pi}{P_0}t - \frac{\pi\dot{P}}{P_0^2}t^2 && (7.2) \end{aligned}$$

Les pertes viennent du deuxième terme. On peut voir que pour une variation moyenne $\dot{P} = 1,8 \times 10^{-14}$ et une période moyenne $P_0 = 0,7$ s, ce terme vaut 2π après seulement $7,4 \times 10^6$ s.

Les pertes de signal, si cet effet n'est pas corrigé, sont déterminées avec une méthode similaire [34] à celles utilisés au chapitre 5. On note $\hat{h}_e(P_0)$ la transformée de FOURIER pour la période P_0. On intègre un temps $T = 2nP_0$, le temps $t = 0$ étant au milieu de la période d'intégration pour que l'on obtienne une période moyenne de P_0 sur le temps d'intégration.

$$\begin{aligned} \hat{h}_e(P_0) &= \frac{2h_0}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\frac{2\pi}{P_0}t}\sin\left(\frac{2\pi}{P_0}t - \frac{\pi\dot{P}}{P_0^2}t^2\right) && (7.3) \\ &= \sum_{j=-n}^{n-1}\left[\int_{jP_0}^{(j+1)P_0} e^{i\frac{2\pi}{P_0}t}\sin\left(\frac{2\pi}{P_0}t\right)\cos\left(\frac{\pi\dot{P}}{P_0^2}t^2\right)dt\right. \\ &- \left.\int_{jP_0}^{(j+1)P_0} e^{i\frac{2\pi}{P_0}t}\cos\left(\frac{2\pi}{P_0}t\right)\sin\left(\frac{\pi\dot{P}}{P_0^2}t^2\right)dt\right] && (7.4) \end{aligned}$$

Comme $\dot{P}$ est très petit, le terme $\frac{\pi\dot{P}}{P_0^2}t^2$ varie très peu pendant une période P_0. Cela donne :

$$\begin{aligned} \hat{h}_e(P_0) &= \frac{2h_0}{T}\sum_{j=-n}^{n-1}\left[\cos\left(\frac{\pi\dot{P}}{P_0^2}(jP_0)^2\right)\int_{jP_0}^{(j+1)P_0} e^{i\frac{2\pi}{P_0}t}\sin\left(\frac{2\pi}{P_0}t\right)dt\right. \\ &- \left.\sin\left(\frac{\pi\dot{P}}{P_0^2}(jP_0)^2\right)\int_{jP_0}^{(j+1)P_0} e^{i\frac{2\pi}{P_0}t}\cos\left(\frac{2\pi}{P_0}t\right)dt\right] && (7.5) \\ &= \frac{2h_0}{T}\sum_{j=-n}^{n-1}\cos\left(\pi\dot{P}j^2\right)\frac{-P_0}{2i} - \sin\left(\pi\dot{P}j^2\right)\frac{P_0}{2} && (7.6) \\ &= \frac{-h_0}{2n}\sum_{j=-n}^{n-1}\sin\left(\pi\dot{P}j^2\right) - i\cos\left(\pi\dot{P}j^2\right) && (7.7) \end{aligned}$$

Ce qui, en comparant avec le cas idéal ($\dot{P} = 0$), donne le niveau de perte ϵ.

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{2n}\sqrt{\left[\sum_{j=-n}^{n-1} \cos\left(\pi \dot{P} j^2\right)\right]^2 + \left[\sum_{j=-n}^{n-1} \sin\left(\pi \dot{P} j^2\right)\right]^2} \tag{7.8}$$

Cette équation dépend du temps d'intégration et de $\dot{P}$. On peut la mettre sous une forme dépendant d'un seul paramètre $\alpha = \pi \dot{P} n^2 = \pi \dot{P} (\frac{T}{2P_0})^2$:

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{2n}\sqrt{\left[\sum_{j=-n}^{n-1} \cos\left(\alpha \frac{j^2}{n^2}\right)\right]^2 + \left[\sum_{j=-n}^{n-1} \sin\left(\alpha \frac{j^2}{n^2}\right)\right]^2} \tag{7.9}$$

Ce paramètre caractérise maintenant une étoile à neutrons pour un temps d'intégration donné. On peut approximer les pertes à petit α par $\epsilon = \frac{2}{45}\alpha^2$. La figure 7.1 montre le niveau de perte en fonction de α.

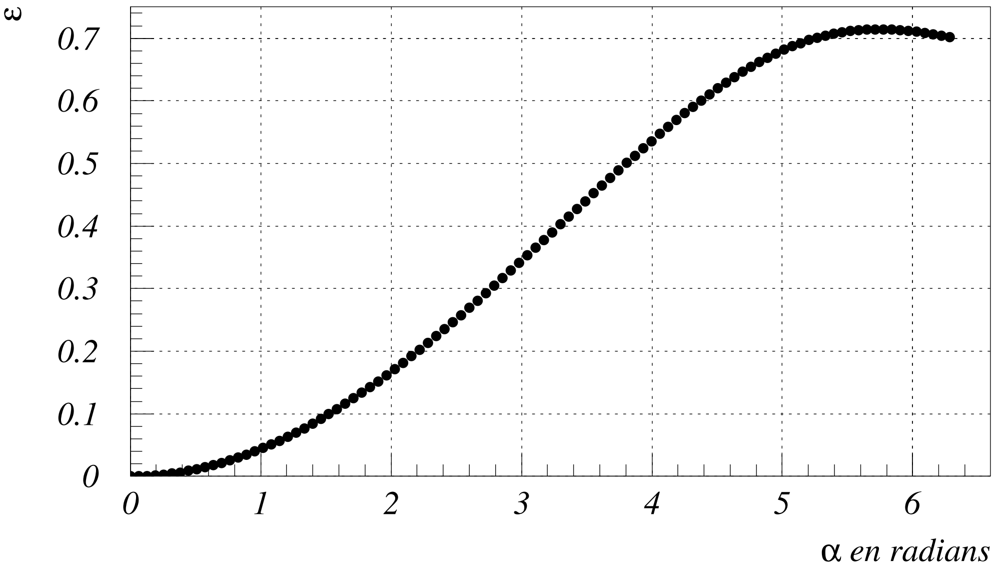


Figure 7.1: Erreur sur l'amplitude en fonction de α

Nous voyons que si on veut des pertes inférieures à 5%, il faut que l'on ait $\alpha < 1,07$ rad. Un temps caractéristique, pour chaque étoile à neutrons, peut être défini : le temps d'intégration à partir duquel intégrer provoque plus de 5% de perte sur l'amplitude du signal.

$$\pi \dot{P} \left(\frac{T_{car}}{2P_0}\right)^2 = 1,07 \tag{7.10}$$

$$T_{car} = 2P_0 \sqrt{\frac{1,07}{\pi \dot{P}}} \tag{7.11}$$

La figure 7.2 montre la distribution du temps caractéristique pour l'ensemble des pulsars connus. Nous pouvons remarquer qu'en dessous de dix jours d'intégration, le nombre de pulsars affectés est très faible. Ceci justifie que l'on ait négligé cet effet dans l'étude qui a été réalisée dans le paragraphe (6.7) pour un temps d'intégration de douze jours. Par contre, il faudra tenir compte de cet effet si l'intégration dure plus longtemps.

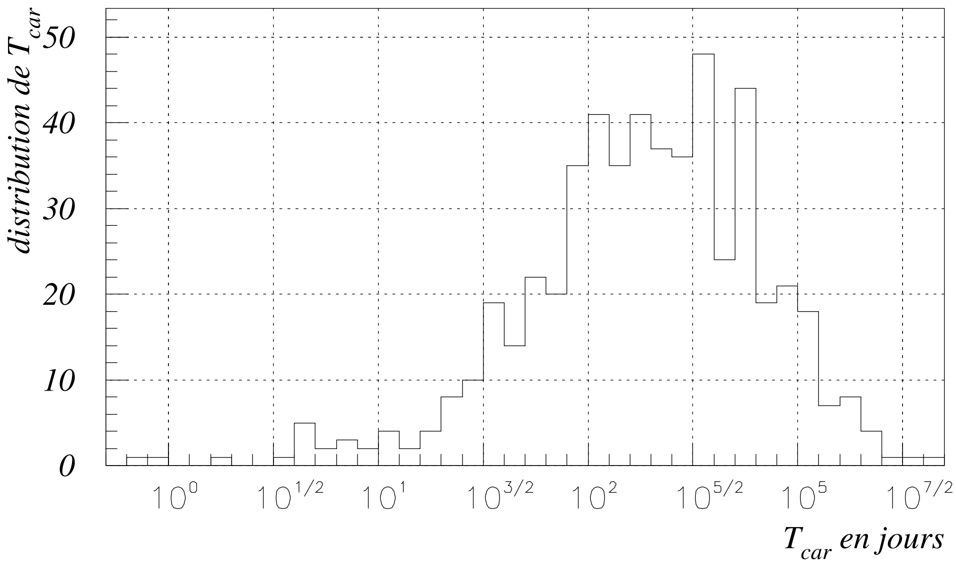


Figure 7.2: Distribution du temps d'intégration qui correspond à 5% de perte de signal à cause de la décroissance de la période

7.2 Nombre de directions de recherche

Le nombre de directions de recherche est le produit d'un facteur pour la correction de la position de la source et d'un autre pour corriger un effet dû au ralentissement potentiel de la source. Nous allons calculer les contributions de ces effets dans les paragraphes qui suivent.

7.2.1 Nombre de directions dû à la correction sur la position de la source

Comme cela a été montré dans le paragraphe (5.3), si on veut se limiter à un niveau de perte acceptable, il faut connaître avec précision la position de la source. Fixons un même niveau de perte pour toutes les sources : 5%. La forme des cellules déterminée grâce à ce niveau permet de calculer la densité de cellules par stéradian pour une direction. La figure 7.3 montre la densité de cellules en fonction de la position de la source en coordonnées galactiques, pour des étoiles à neutrons de fréquence 20 Hz, pour deux jours d'intégration à partir du premier janvier 1970, avec des pertes de 5% maximum.

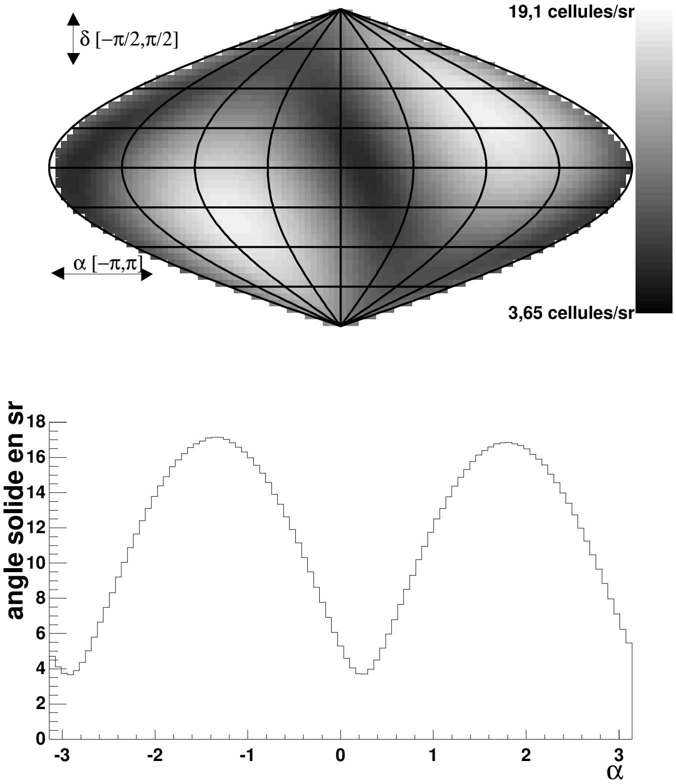


Figure 7.3: Densité de cellules en coordonnées galactiques, le premier janvier pour un temps d'intégration de deux jours et une fréquence de 20 Hz

La figure 7.4 représente la même grandeur, mais l'intégration commence quatre-vingt-dix jours plus tard. On peut remarquer que l'on obtient une même densité mais avec un décalage des zones de basse densité. Cela s'explique par le fait que la variation de vitesse n'est pas la même à quatre-vingt-dix jours d'intervalle.

On peut faire ce genre de graphique pour plusieurs temps d'intégration et plusieurs fréquences. Le résultat est présenté par la figure 7.5 qui montre le nombre de cellules en fonction du temps d'intégration pour deux fréquences limites. Rappelons que ce nombre croît comme le carré de la fréquence (*cf paragraphe (5.3.2)*). Cette figure illustre bien la difficulté d'une recherche aveugle avec un long temps d'intégration.

On peut remarquer sur la figure 7.5 différents régimes de sensibilité à l'effet Doppler. Le premier régime correspond aux durées pour lesquelles la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même est la plus importante pour l'effet Doppler. Le second

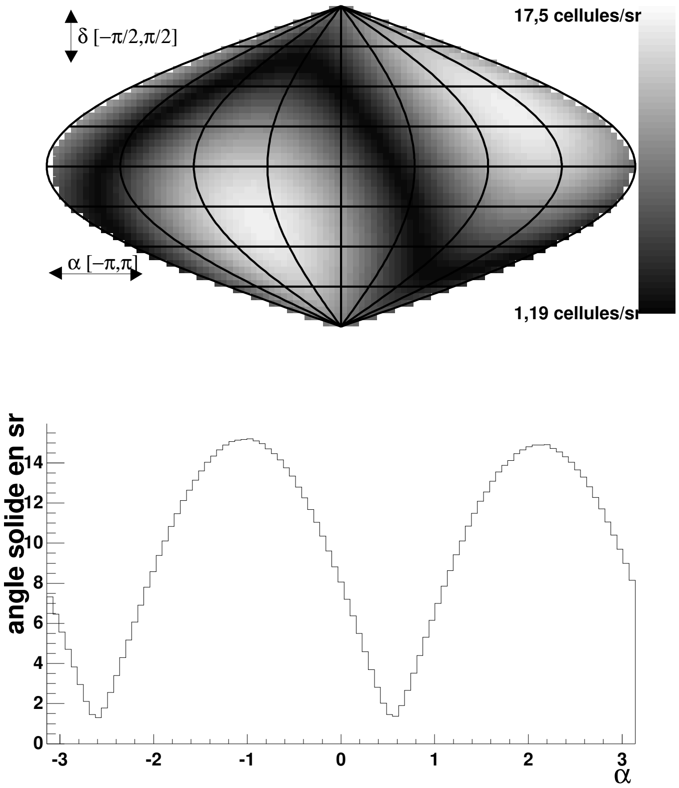


Figure 7.4: Densité de cellules en coordonnées galactiques, au début du printemps pour un temps d'intégration de deux jours et une fréquence de 20 Hz

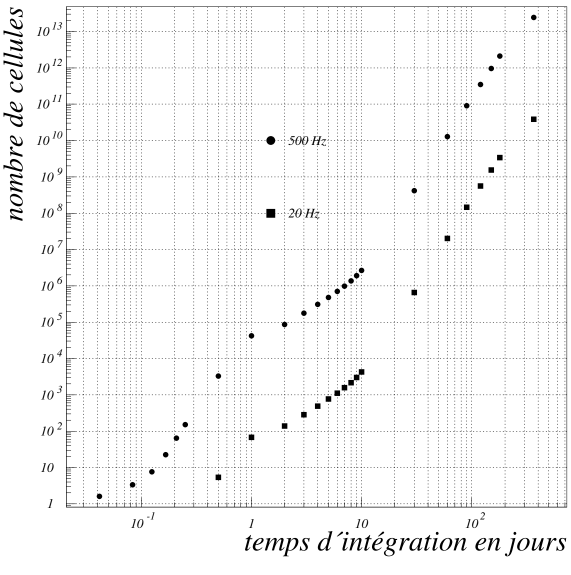


Figure 7.5: Nombre de cellules en fonction du temps d'intégration

entre un et dix jours correspond à une transition entre la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même et la vitesse de la Terre autour du Soleil. Si l'on avait étendu cette courbe à plusieurs années, on aurait alors été sensible à la vitesse de la Terre dans la Galaxie.

7.2.2 Nombre de directions de recherche dues à $\dot{P}$

L'équation (7.10) relie la valeur de $\dot{P}$ qui peut être tolérée pour une perte de 5% au temps d'intégration. La figure 7.2 montre que pour 98, 5% des pulsars, ce temps est supérieur à sept jours. Nous supposerons que ce temps est de sept jours dans le cas d'une recherche aveugle.

Pour tous temps supérieur à sept jours, il faudra corriger l'effet du ralentissement. La tolérance $\delta\dot{P}$ sur la correction de $\dot{P}$ est aussi définie par l'équation (7.10) et varie comme l'inverse du carré du temps d'intégration. Le nombre d'essais pour la correction de $\dot{P}$, et donc le nombre de recherches supplémentaires, varie comme le carré de T et vaut un pour sept jours d'intégration. La figure 7.6 présente ce nombre de recherches supplémentaires.

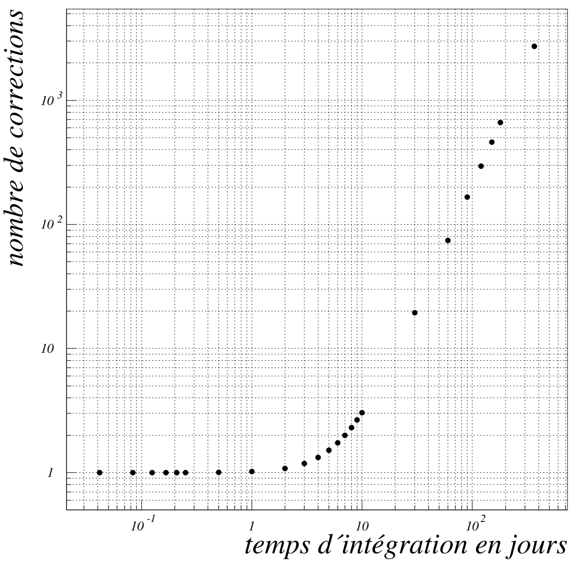


Figure 7.6: Nombre de corrections dues à $\dot{P}$ en fonction du temps d'intégration

7.2.3 Nombre total de direction de recherche

Pour obtenir le nombre total de recherches, il suffit de multiplier le nombre dû à l'effet DOPPLER et celui dû au ralentissement des étoiles à neutrons. La figure 7.7 présente le résultat de ce produit. Le nombre de recherche varie approximativement comme la puissance sixième du temps d'intégration. Ceci augmente encore la complexité de la recherche aveugle d'étoiles à neutrons.

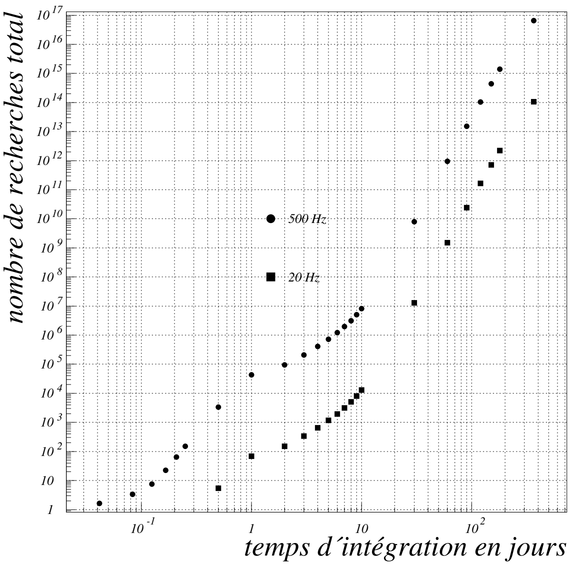


Figure 7.7: Nombre total de direction de recherche

7.3 Recherche d'un signal dans le spectre en fréquence

Le premier outil utilisé par la recherche aveugle est la recherche d'un signal dans la transformée de FOURIER du signal observé pour une direction. La méthode utilisée ici est une généralisation de celle décrite dans le paragraphe (6.7). Elle commence par un décalage en fréquence pour réduire les données. Puis celles-ci sont découpées en sous-lots de largeur de bande suffisamment étroite pour que leur bruit soit localement gaussien. Il suffit ensuite de fixer un critère probabiliste de discrimination du bruit.

Ceci va être détaillé dans les paragraphes suivants, et appliqué à une partie des données qui est le résultat du décalage en fréquence du signal, comme expliqué dans le paragraphe (6.3). On part du spectre en fréquence représenté par la figure 7.8, qui donne, après décalage, un grossissement pour la zone de fréquences $29,875$ Hz/$30,125$ Hz. Ce grossissement est montré sur la figure 7.9.

7.3.1 Découpe des données

Les données initiales sont formées de 65536 valeurs de transformées de FOURIER. On a divisé les données en 64 sous-lots de 1024 données. Le niveau de bruit varie

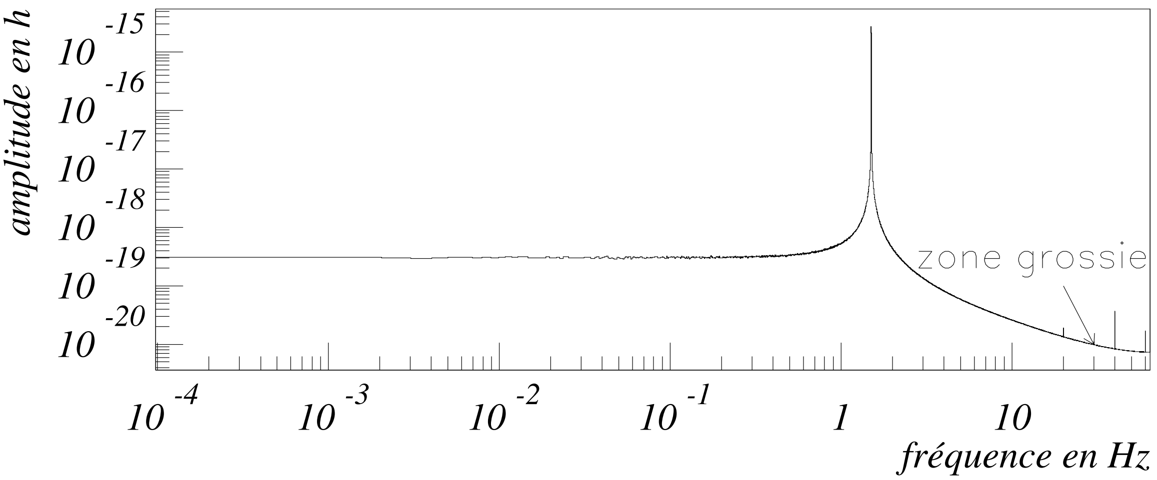


Figure 7.8: 256 moyennes de la transformée de FOURIER du signal

d'une fréquence à l'autre. Il est par contre localement gaussien. Les données sont donc découpées en sous-lots où elles auront un bruit localement gaussien. Ceci permet de discriminer localement le signal du bruit. La figure 7.10 montre l'estimateur de la moyenne du bruit sur les sous-lots de données. On peut la comparer à la figure 7.9, qui montre les données issues de la méthode de correction de l'effet DOPPLER.

Comme on peut le voir sur la figure 7.10, l'estimateur de la moyenne du bruit augmente avec la fréquence, ceci correspond au problème de repliement évoqué dans le paragraphe (6.3). Reste à savoir si le bruit est localement gaussien et donc d'avoir une mesure de la ressemblance du bruit avec une distribution donnée.

7.3.2 Vérification de la forme du bruit

Comme nous l'avons montré dans le paragraphe (6.7.1), la moyenne M et l'écart quadratique moyen σ' des données bruitées sont fonctions d'un même paramètre σ qui régit la distribution du bruit. Ceci permet de déterminer une relation qui les lie. Dans le cas d'une distribution de RAYLEIGH, le rapport σ'/M vaut $\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$. Cet exemple va être utilisé pour illustrer le tri des sous lots de données afin d'évaluer si leur bruit est gaussien. L'erreur tolérée sur ce rapport est fonction du nombre de points N sur lesquels il est évalué. Les fluctuations statistiques relatives s'élèvent à $1/\sqrt{N}$ sur M et σ'. Le rapport sera donc affecté d'une fluctuation statistique relative de $2/\sqrt{N}$. Une variation de $3/\sqrt{N}$ sera tolérée pour déclarer une lot valide pour l'analyse.

La figure 7.11 présente l'estimateur de l'écart quadratique moyen qui correspond au même lot de données que pour la figure 7.10.

La figure 7.12 donne le rapport de σ'/M estimé. On peut remarquer un sous lot de données qui ne passe pas le critère imposé.

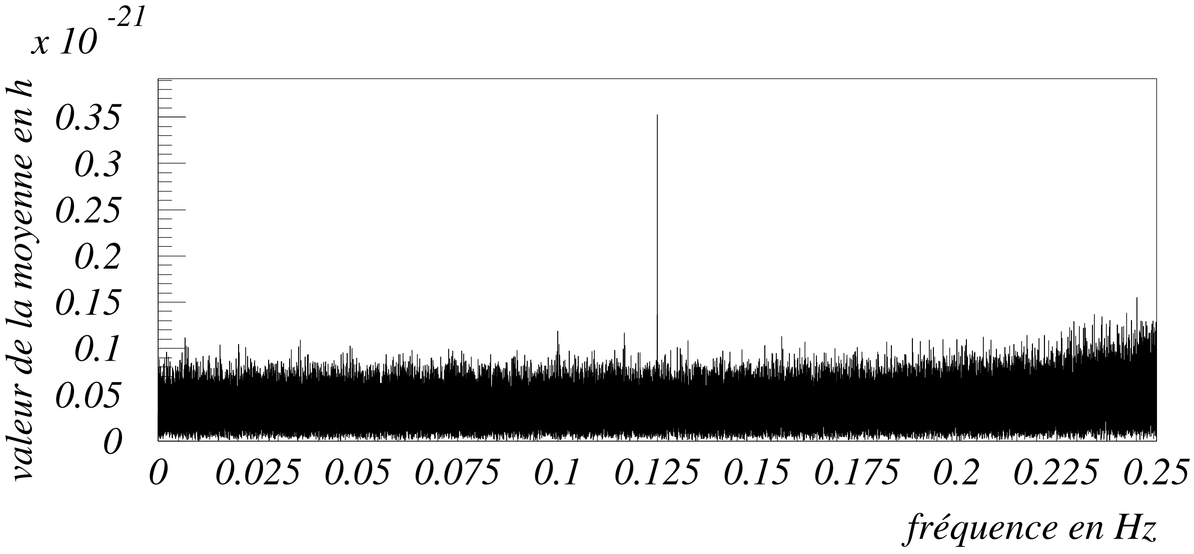


Figure 7.9: Résultat de la méthode de décalage de fréquence

Le fait qu'un lot de données soit mauvais peut avoir plusieurs causes, comme par exemple la présence d'une résonance de bruit. La figure 7.13 nous montre que le lot 31 semble être mauvais.

On peut voir sur cette figure qu'une seule valeur peut déséquilibrer la distribution du bruit gaussien. La figure 7.14 montre la distribution des valeurs de la figure 7.13. On peut remarquer deux valeurs qui sortent nettement de la distribution.

Une fois qu'un lot de données est déclaré valide, un signal potentiel au-dessus d'un seuil déterminé y est recherché comme nous allons l'expliquer dans le paragraphe suivant.

Recherche de pics

À tout lot de données, on peut associer un seuil de détection α. Ce seuil est déterminé en fonction du nombre d'événements fortuits que l'on tolère pour chaque analyse sur un sous-lot de données. Soit N_f le nombre d'événements fortuits autorisé. Connaissant la distribution du bruit, P, on peut calculer le nombre d'événements fortuits en fonction du seuil α. En effet, N_f est la probabilité cumulée d'avoir du bruit au dessus de α, normalisée par le nombre d'occurences de la variable aléatoire : N.

$$N_f = N \int_\alpha^\infty P(r)dr \tag{7.12}$$

$$= N \int_\alpha^\infty \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \tag{7.13}$$

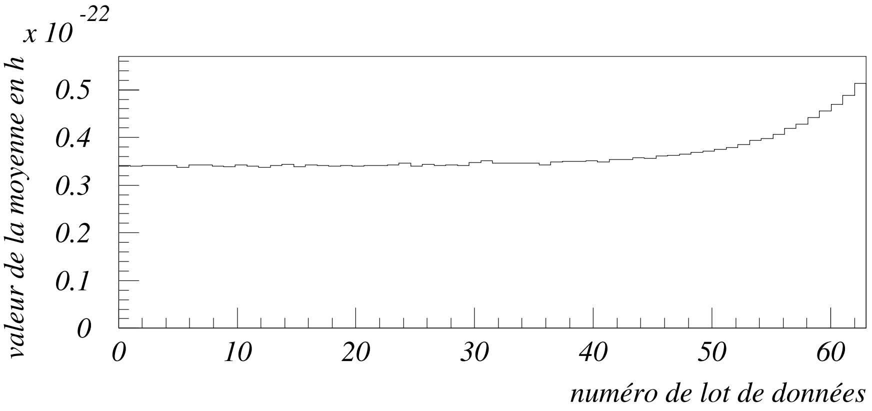


Figure 7.10: Moyenne du bruit pour chaque sous-lot de données

$$= N \left[-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right]_{\alpha}^{\infty} \tag{7.14}$$

$$= N e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \tag{7.15}$$

d'où

$$\alpha = \sqrt{2 \ln \frac{N}{N_f}} \tag{7.16}$$

Le nombre d'événements fortuits pour l'analyse globale sera égal au nombre de lots valides multiplié par N_f.

On appelle un pic toute valeur de la transformée de FOURIER qui dépasse le seuil α. On réalise ensuite un ajustement autour de la valeur du pic grâce à la méthode de minimisation de χ^2 vue au chapitre précédent. On peut ainsi déterminer la fréquence et l'amplitude du signal.

Comment s'assurer qu'un pic détecté est autre chose qu'une réalisation du bruit ? Les paragraphes suivant vont donner quelques idées de départ pour effectuer un tri entre le bruit et le signal d'une source périodique.

7.4 Différents algorithmes de recherche

Le nombre de recherches explose avec le temps d'intégration (*cf figure 7.5*). On est donc vite confronté à la limite du temps de calcul disponible. Il faut impérativement trouver des méthodes de recherche plus efficaces. La multiplication du nombre

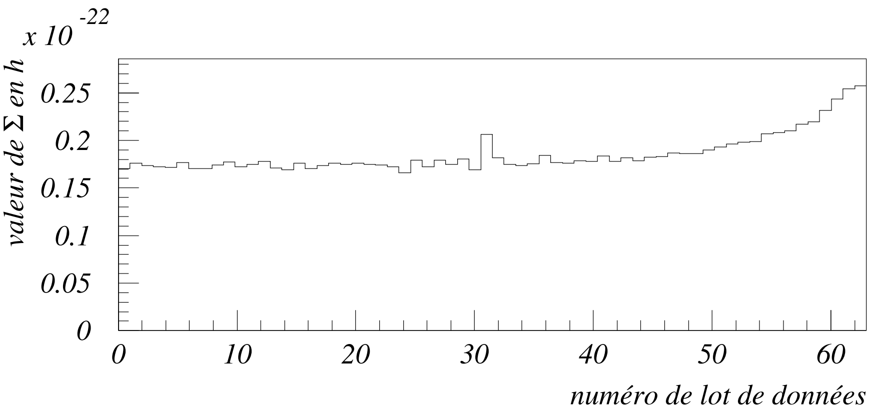


Figure 7.11: Écart type du bruit pour chaque sous lot de données

de recherches provoque aussi un très grand nombre de réalisations du bruit, ce qui favorise l'apparition de candidats fortuits. Deux processus existent, qui entrent en compétition : le temps d'intégration qui augmente favorise le rapport signal sur bruit mais il fait aussi augmenter le nombre de directions de recherche qui, lui, diminue le rapport signal sur bruit.

Les propositions d'algorithmes qui suivent essayent d'optimiser le temps d'intégration de façon à avoir un maximum de chances de détection. Le principe de base consiste à intégrer sur des temps plus courts et donc à obtenir plusieurs transformées de FOURIER de la même zone de fréquence. Ces transformées sont ensuite combinées pour récupérer le rapport signal sur bruit de deux manières différentes.

7.4.1 Variation du décalage fréquentiel

Comme cela a été discuté au chapitre 5, une correction partielle de l'effet DOPPLER provoque un changement de fréquence proportionnel à la vitesse moyenne du détecteur pendant le temps d'intégration. Si cette vitesse ne changeait pas au cours du temps, il n'y aurait pas de problème. Mais l'utilisation de transformées de FOURIER sur des temps consécutifs fait que le décalage dû à la vitesse moyenne n'est plus le même. La fréquence du signal change donc.

On peut calculer le décalage en fréquence que produit la vitesse moyenne relative entre la source et le détecteur. Ce décalage peut être exprimé en fonction du nombre de pas élémentaires en fréquence $1/T$. Cette valeur est représentée sur la figure 7.15. Elle est utilisée pour connaître le nombre de recherches supplémentaires que l'on va

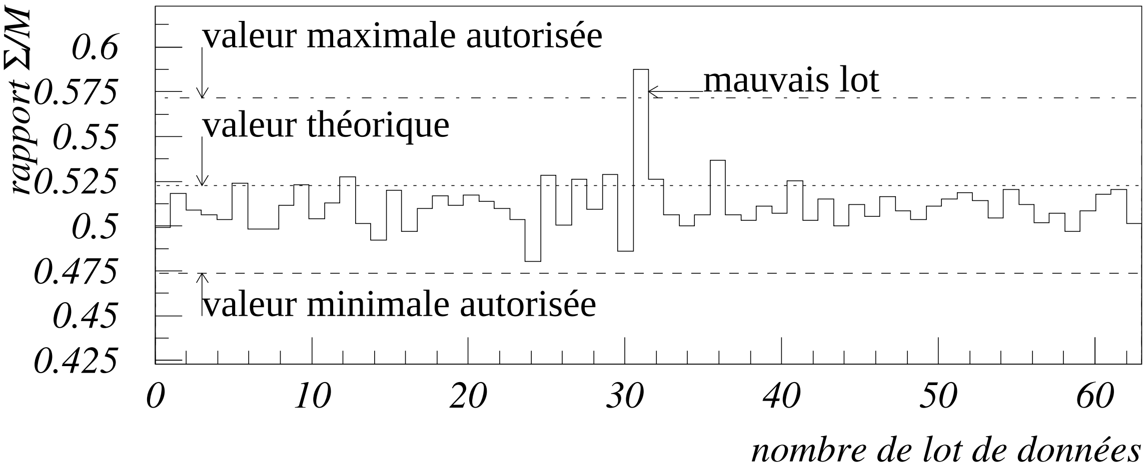


Figure 7.12: Rapport σ'/M estimé

devoir réaliser pour compenser le décalage DOPPLER moyen. Ce décalage, pour une étoile à neutrons quelconque, bien qu'important se produit peu dans le cas de pulsars connus car on a une erreur sur leur position largement inférieure à celle tolérée pour un jour d'intégration.

Pour minimiser le nombre de directions de recherche, on tolère un décalage fréquentiel moyen. Connaissant le niveau de perte maximum autorisé, on peut calculer quel sera ce décalage fréquentiel moyen ($\Delta\nu = \vec{V}_{moy} \cdot \delta\vec{k}/2\pi$) et sa variation. La figure 7.16 présente le décalage fréquentiel moyen en nombre de pas de fréquence (*l'inverse du temps d'intégration*) en fonction du temps d'intégration. Contrairement au nombre de directions de recherche, le décalage fréquentiel ne dépend pas de la fréquence. En effet, l'erreur angulaire tolérée varie comme l'inverse de la fréquence de la source, mais pour le décalage fréquentiel on multiplie cette erreur par la fréquence pour obtenir $\delta\vec{k}$. La normalisation en pas de fréquence est utile pour les algorithmes car on n'a accès qu'a des multiples de ce pas. La figure 7.17 montre la variation de ce décalage en fonction du temps d'intégration.

Les variations sont beaucoup moins importantes que le décalage lui-même. Le fait que le décalage maximum soit de trois pas élémentaires va être utilisé dans les deux algorithmes proposés.

7.4.2 Préambule aux algorithmes

Pour simplifier le développement des raisonnements, nous allons considérer que l'on utilise les données qui sur un an ont un niveau de bruit σ (*paramètre définissant la distribution de* RAYLEIGH *associée*). La normalisation de notre transformée de FOURIER mesure un signal constant. Le bruit pour une proportion p des données sera $\sigma/\sqrt{p}$.

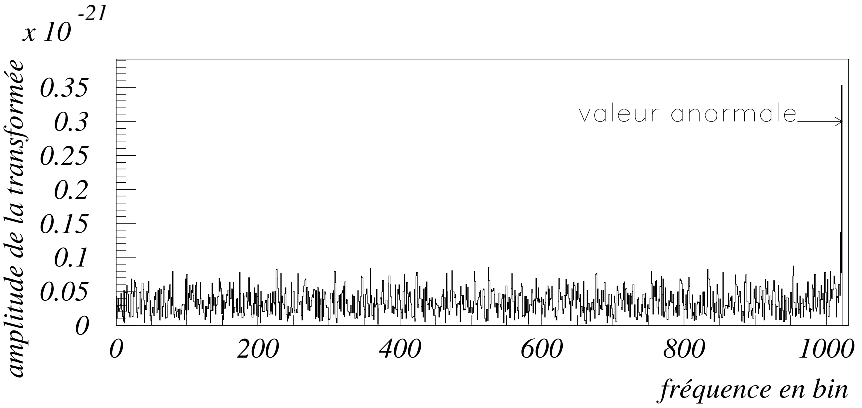


Figure 7.13: Visualisation du lot de données 31

7.4.3 Algorithme des moyennes

Le fondement de cet algorithme est de réaliser des moyennes en puissance de chacune des transformées de FOURIER obtenues avec un temps d'intégration plus faible, la bande de fréquences étant toujours la même. La distribution du bruit en puissance $Q(r)$ est :

$$Q(r) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{r}{2\sigma^2}} \tag{7.17}$$

pour un bruit $\sigma/\sqrt{p}$ résultat de $N = 1/p$ moyennes en puissance la distribution P est :

$$P(r) = \left[\frac{p}{2\sigma^2}\right]^N \frac{N^N r^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\frac{rpN}{2\sigma^2}} \tag{7.18}$$

$$= \left[\frac{1}{2\sigma^2}\right]^N \frac{r^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\frac{r}{2\sigma^2}} \tag{7.19}$$

Le fait de moyenner le signal ne change pas sa valeur. Par contre le signal S en moyenne se trouve sommé quadratiquement avec le bruit $2N\sigma^2 + S^2$. On peut déterminer un niveau de signal détectable en fonction du temps d'intégration pour un certain nombre d'événements fortuits. Pour cela, on se donne d'abord un nombre moyen d'événements fortuits tolérable par analyse, $N_f = 0,1$ par exemple. Grâce à la distribution de l'équation (7.19), on peut calculer le seuil au dessus duquel on sait qu'il n'y aura pas plus de $0,1$ événements fortuits. Si on note α ce seuil et N_{eve} le

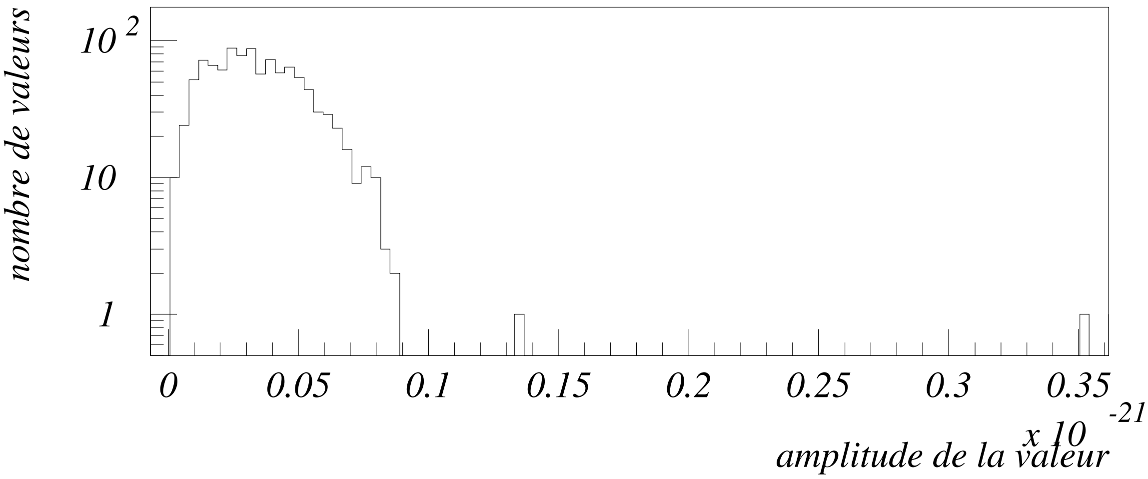


Figure 7.14: Distribution des valeurs de la visualisation

nombre de réalisations du bruit (*multiplié ici par les effets de décalage fréquentiel et de correction du ralentissement des étoiles à neutrons*), on a alors pour un nombre N de moyennes :

$$N_f = N_{eve} \int_\alpha^\infty \left[\frac{1}{2\sigma^2}\right]^N \frac{r^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\frac{r}{2\sigma^2}} dr \tag{7.20}$$

$$= N_{eve} e^{-\frac{\alpha}{2\sigma^2}} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right)^i \tag{7.21}$$

On résout cette équation numériquement et on compare le résultat au niveau moyen du signal $2N\sigma^2 + S^2$, ce qui donne un ordre de grandeur de l'efficacité de la méthode. La figure 7.18 montre le seuil $S/\sigma = \sqrt{\alpha/\sigma^2 - 2N}$ que l'on peut atteindre en fonction du nombre de moyennes pour une recherche entre 5 Hz et 20 Hz. Le choix de cette bande de fréquences est fixé d'une part par la courbe de sensibilité de VIRGO 2.4 pour la fréquence minimum, d'autre part par la distribution en fréquence 1.3 des pulsars pour la fréquence maximum. La distribution montre que la majorité des pulsars a une fréquence en dessous de 10 Hz, mais avec l'émission à la fréquence double, la limite passe à 20 Hz.

Le nombre de réalisations du bruit est égal au produit du nombre de cellules de recherche multiplié par le nombre de fréquences que l'on regarde, corrigé par le nombre de moyennes excédentaires dues au décalage fréquentiel moyen. Le niveau de recherche du signal ne fait qu'augmenter avec la moyenne à partir de trois moyennes. Il n'est donc *a priori* (*si on dispose d'une machine infiniment puissante*) pas intéressant de faire beaucoup de moyennes. La puissance de calcul disponible nous encourage par contre à utiliser une stratégie de recherche hiérarchique.

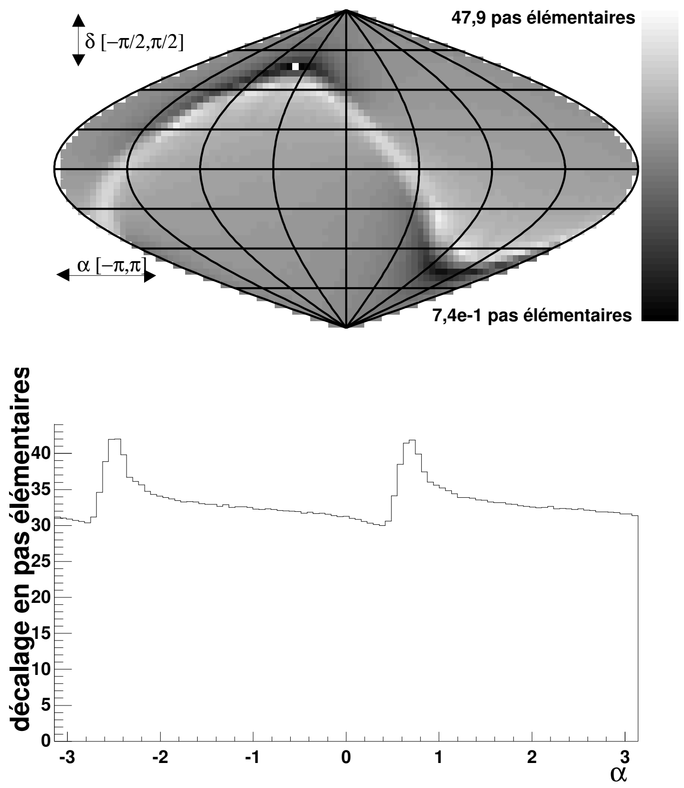


Figure 7.15: Décalage en pas élémentaire de fréquence sur un jour d'intégration pour une étoile à neutrons de fréquence 20 Hz suivant la direction en coordonnées galactiques

Recherche hiérarchique

Comme nous l'avons vu précédemment, l'optimum est de rechercher des sources pour un an d'intégration avec trois moyennes de cent vingt jours. Malheureusement, il faudrait pour cela une puissance de calcul très grande. On peut considérer que l'on va rechercher le signal pour des sous-lots de données moyennés entre eux et que des seuils plus faibles que ceux donnés par la figure 7.18 seront acceptés. On prend pour cela le seuil de détection de signal donné pour trois moyennes de cent vingt jours. On calcule ensuite où se trouve ce signal si on procède à des moyennes. On prend tous les candidats au dessus de ce seuil. On a alors du bruit sélectionné comme s'il s'agissait du signal. On procède ensuite à un nombre réduit de recherches pour ces seuls candidats, pour un temps d'intégration plus long afin de discriminer le bruit d'un vrai signal. La figure 7.19 montre le nombre de candidats alors attendu.

Le temps de calcul nous permet de choisir le nombre optimum de moyennes qu'il faut réaliser. En effet, si on augmente le nombre de moyennes on diminue le nombre initial de recherches mais on a en seconde main un nombre de candidats à examiner

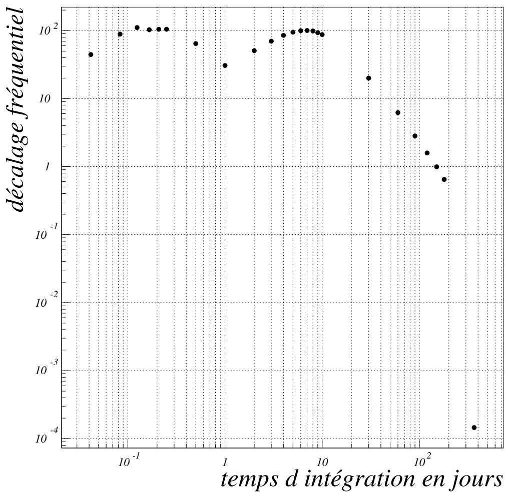


Figure 7.16: Décalage fréquentiel moyen en fonction du temps d'intégration

de nouveau pour un temps plus long dans un plus grand nombre de directions de recherche (*si on double le temps d'intégration, on multiplie le nombre de recherches par soixante quatre*). Cela nous donne le nombre de recherches supplémentaires, pour chaque moyenne, sur la figure 7.20. Il augmente beaucoup avec le nombre de moyennes.

Reste à évaluer le temps de calcul nécessaire à cette recherche. Pour cela, le temps de réalisation d'une recherche est calculé sur une station DEC ALPHA $250^{4/266}$. Il est évalué à $1,1$ s. La figure 7.21 montre le temps total calculé ainsi que le temps de calcul disponible. Le nombre de moyennes optimum est trente sept. Chacune de ces moyennes est réalisée avec dix jours de données. Pour réaliser ces calculs en dix jours, il faut quatorze machines ALPHA ($\approx 1,4$ *Gflops*), ce qui est raisonnable.

7.4.4 Algorithme de poursuite

Cet algorithme est inspiré du fonctionnement des chambres à fils. Comme dans le cas de l'algorithme qui moyenne les transformées de FOURIER, on part de n transformées de FOURIER qui sont considérées comme autant de plans de fils. Le signal a une propriété intéressante : il est continu d'une transformée à l'autre car, au décalage fréquentiel moyen près, il ne change pas de place. Par contre, le bruit lui n'a aucune raison de rester à un niveau constant d'une transformée à l'autre. Soit α le seuil de détection que l'on autorise pour obtenir $0,1$ événement fortuit par analyse. Ce seuil α dépend du nombre de réalisations du bruit, du nombre de transformées de FOURIER réalisées et du décalage fréquentiel résiduel. Le bruit de chaque transfor-

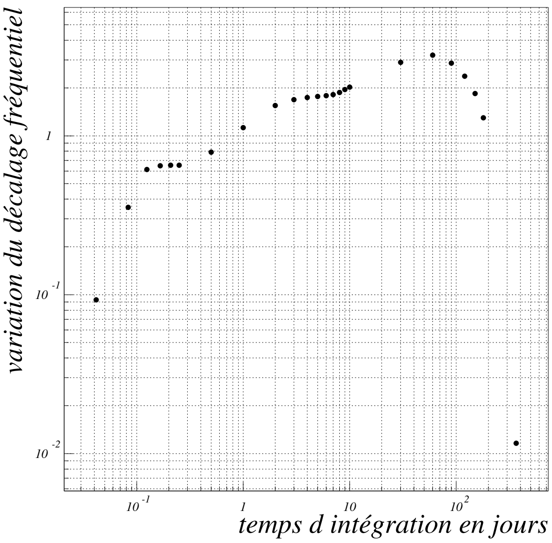


Figure 7.17: Variation du décalage fréquentiel moyen en fonction du temps d'intégration

mée a pour distribution en amplitude $\frac{r}{n\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2n\sigma^2}}$ pour le traitement à n transformées. $p_\alpha = \int_\alpha^\infty \frac{r^2}{n\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2n\sigma^2}}dr = e^{-\frac{\alpha^2}{2n\sigma^2}}$ est alors la probabilité qu'une valeur de la transformée de FOURIER soit supérieure ou égale à α. À cause du décalage fréquentiel moyen, on s'attend à ce que dans la transformée suivante, le pic soit dans un ensemble de valeurs données. Si le décalage en pas de fréquences est $\pm m$, alors la probabilité qu'un pic se trouve par hasard dans les valeurs qui sont accessibles au pic est $1-(1-p_\alpha)^{2m+1} \approx p_\alpha \times (2m+1)$. La probabilité que cela se reproduise sur la transformée suivante est la même, ce qui conduit à la probabilité $p_\alpha^n(2m+1)^{n-1}$ que du bruit se trouve dans les valeurs possibles pour n transformées. En connaissant le nombre de réalisations du bruit N_{eve}, on calcule α pour ne tolérer que $0,1$ événement fortuit par analyse :

$$N_{eve} * p_\alpha^n(2m+1)^{n-1} \quad = \quad 0,1 \tag{7.22}$$

D'où :

$$\alpha \quad = \quad \sigma\sqrt{2(n-1)\ln(2m+1) + \ln\left(\frac{N_{eve}}{0,1}\right)} \tag{7.23}$$

La moyenne du bruit pour une transformée parmi n est $\sqrt{\frac{n\pi}{2}}\sigma$. Si on additionne quadratiquement le signal et le bruit, on peut descendre jusqu'à des niveaux de signal

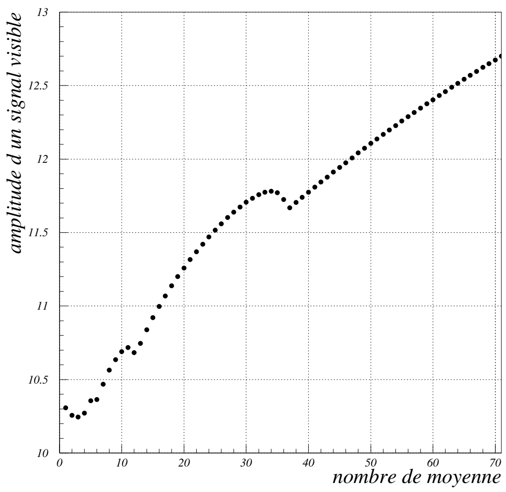


Figure 7.18: Seuil de détectabilité pour l'algorithme des moyennes

définis comme suit : $S/\sigma = \sqrt{\alpha^2/\sigma^2 - \frac{n\pi}{2}}$. La figure 7.22 montre le seuil de détection en fonction du nombre de transformées que l'on utilise. On peut remarquer que cette méthode est plus efficace pour six transformées sur soixante jours que la recherche sur un an simple. Elle semble surtout plus efficace que la méthode des moyennes mais reste irréalisable avec la puissance de calcul actuelle.

Recherche hiérarchique

Si on utilise le même procédé que précédemment, on peut se fixer un seuil de détection égal au seuil pour six moyennes et supporter un certain nombre de faux candidats. La figure 7.23 présente le nombre de recherches supplémentaires que l'on obtient. Cet algorithme est plus sensible que l'autre aux faux candidats. Reste à savoir s'il est compétitif du point de vue du temps de calcul.

La figure 7.24 montre le temps de calcul que nécessite cet algorithme. Le nombre optimal de plans est trente sept, et le nombre de stations ALPHA nécessaires est quatorze également.

7.4.5 Comparaison avec les algorithmes usuels

Un article récent [35] détermine la puissance de calcul nécessaire pour effectuer des recherches d'étoiles à neutrons dans les deux cas suivants. Le premier correspond aux étoiles à neutrons dont l'age (*mesuré via* $\dot{P}$) est supérieur à 10^3 ans et dont la fréquence est inférieure à 200 Hz. Le second correspond à un age supérieur à 40 ans et une fréquence inférieure à 1 kHz.

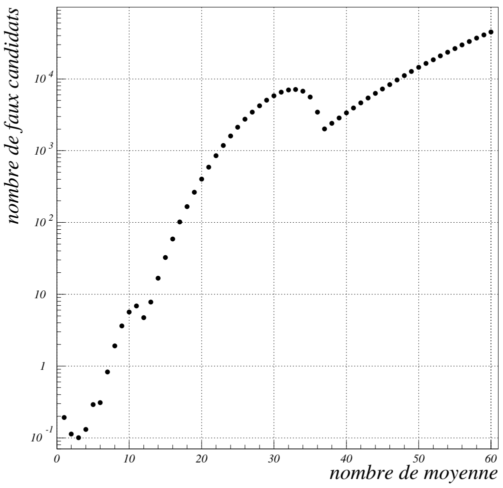


Figure 7.19: Nombre de faux candidats tolérés en fonction du nombre de moyennes effectuées

Les performances obtenues pour le premier cas sont :

- 10 TeraFlops de puissance nécessaire
- une année de données analysée

Les performances obtenues pour le second cas sont :

- 10000 TeraFlops de puissance nécessaire
- 45 jours de données analysés

En utilisant les algorithmes décrit précédemment, on obtient dans des conditions similaires :

- 1 TeraFlops de puissance nécessaire
- fréquence inférieure à 200 Hz
- une année de données analysée

et

- 118 TeraFlops de puissance nécessaire
- fréquence inférieure à 1 kHz

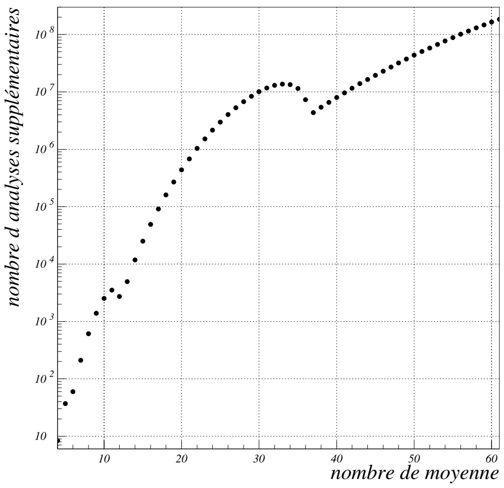


Figure 7.20: Nombre total de recherches supplémentaires en fonction du nombre de moyennes

- une année de données analysée

La recherche hiérarchique ainsi que le système de réduction du flot de données permet de gagner au moins un facteur dix sur la puissance de calcul et d'analyser plus longtemps dans le cadre des hautes fréquences. De plus, aucune hypothèse n'a été faite sur l'age des sources dans le cadre des algorithmes hiérarchiques.

L'article présente une idée qui pourrait permettre de gagner encore du temps de calcul dans le cadre des deux algorithmes présentés. Elle consiste à trouver des corrélations dans les corrections que l'on applique, par exemple peut-être que la phase additionnelle due à l'effet DOPPLER compense en partie le ralentissement de la source. En enlevant toutes les corrélations [35] montre qu'il gagne plusieurs ordres de grandeur sur le nombre de paramètres de recherche.

7.4.6 Choix d'un algorithme

Cette première étude des deux algorithmes (*moyenne et poursuite*) indique que leurs performances sont semblables et qu'il est nécessaire d'utiliser une approche hiérarchique pour optimiser le temps de calcul. Cependant, toutes les difficultés n'ont pas été étudiées. En particulier, le temps de moyennage n'a pas été pris en compte dans le temps de calcul ainsi que la combinatoire pour la recherche avec poursuite. Une étude approfondie mérite donc d'être poursuivie. L'optimisation des paramètres de corrections comme indiqué dans le paragraphe (7.4.5) semble aussi une voie à suivre pour réduire le temps de calcul.

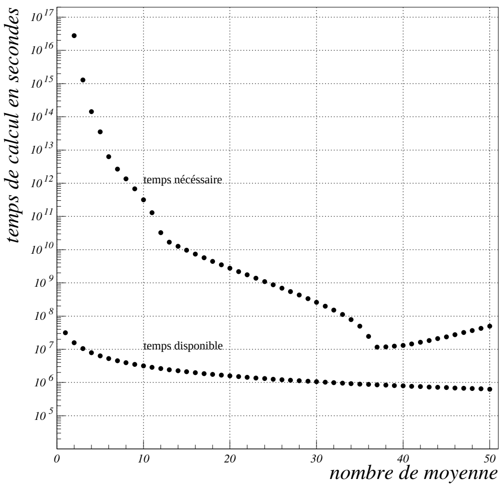


Figure 7.21: Temps de calcul nécessaire en fonction du nombre de moyennes

7.4.7 Détail d'un algorithme de recherche

On peut résumer les étapes précédentes par la figure 7.25. La taille des cellules est déterminer pour limiter les pertes à 5% à cause d'une mauvaise correction de l'effet DOPPLER et à 5% pour le ralentissement de la source. Une cellule est supposée allumée si une valeur dépasse le seuil de d étection déterminé par le taux de fortuits tolérés.

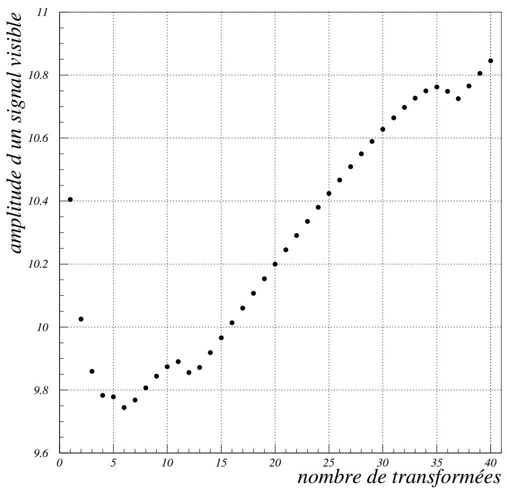


Figure 7.22: Signal détectable en fonction du nombre de transformées

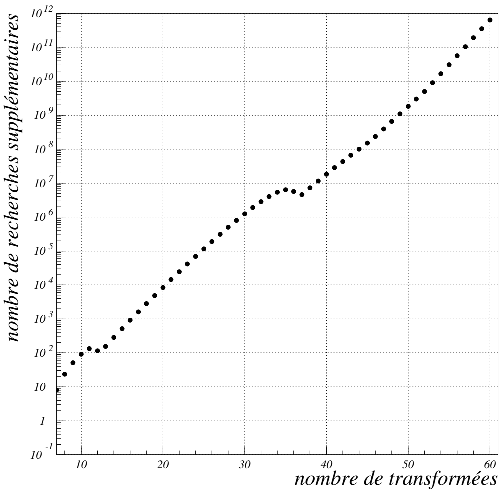


Figure 7.23: Nombre de recherches supplémentaires à effectuer en fonction du nombre de transformées de FOURIER

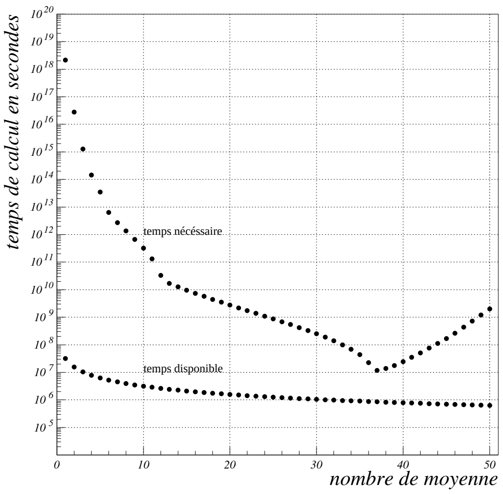


Figure 7.24: Temps de calcul en fonction du nombre de transformées

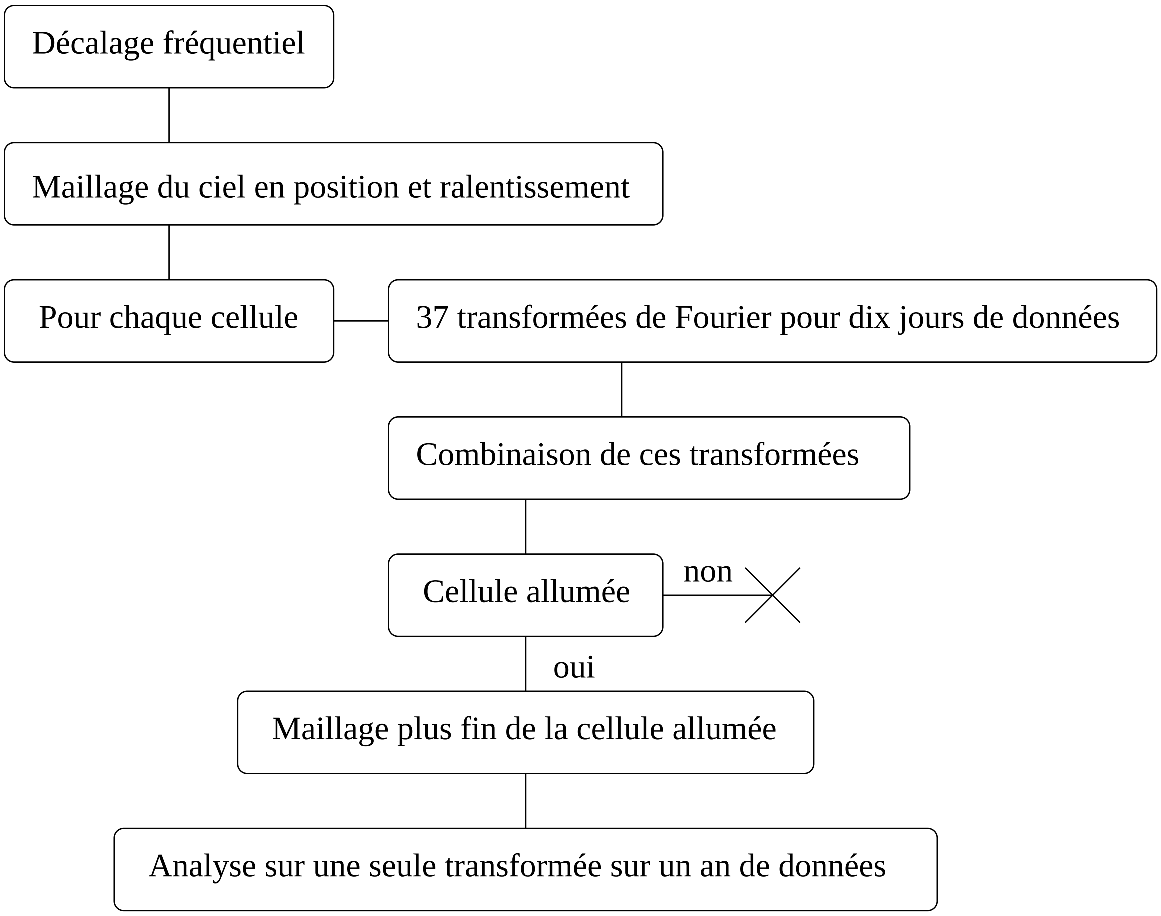


Figure 7.25: Algorithme pour la recherche aveugle de sources périodiques

Conclusion

CETTE THÈSE est axée sur la recherche d'ondes gravitationnelles émises par la rotation des étoiles à neutrons légèrements déformées. Ce type de source d'ondes gravitationnelles présente plusieurs caractéristiques importantes. Du point de vue émission les signaux sont de très faible amplitude (*altération relative des distance* $< 10^{-24}$) mais de fréquence d'émission très stable. Les étoiles à neutrons sont des objets très compact (*typiquement 1,4 masse solaire dans une sphère de 10 km de diamètre*) avec des densités de l'ordre de la matière nucléaire. Elles sont susceptibles d'émettre des ondes électromagnétiques qui se manifestent sous la forme d'un signal radio périodique, un pulsar. Environ 700 pulsars ont été observés, principalement dans le plan galactique. L'observation d'ondes gravitationnelles émises par des étoiles à neutrons permettra de mieux comprendre la structure de ce type d'étoile et le comportement de la matière très dense, en plus, bien sur, de l'étude des ondes gravitationnelles.

La recherche de sources périodiques autorise un très long temps d'intégration pour augmenter le très faible rapport signal sur bruit. Ces longues intégrations associées aux mouvements du détecteur créent un certain nombre de problèmes que nous avons décrits et évalués (*effet* DOPPLER, *modulation d'amplitude, ralentissement des pulsars*). Une méthode pour diminuer les pertes dues à l'effet DOPPLER et au ralentissement a été proposée.

L'importance du volume de données produit par le détecteur s'avère être le premier facteur limitant de l'analyse. Nous avons montré qu'une solution efficace consiste à travailler sur une bande de fréquences limitée.

Grâce à cela, les pulsars connus peuvent être suivis aussi longtemps que voulu. Nous avons mis en œuvre cette méthode pour la recherche de signaux provenant de pulsars connus. Dans ce cas, la fréquence et la position de ces sources sont très bien connues ce qui permet de corriger l'effet DOPPLER sans se soucier de l'erreur sur ces grandeurs. Nous avons montré que pour augmenter le rapport signal sur bruit il faut utiliser la somme quadratique des bandes latérales, dues à l'effet de modulation, par rapport à l'utilisation de la fréquence nominale seule.

Cette méthode peut de plus s'appliquer à la recherche aveugle d'étoiles à neutrons. Son efficacité, du point de vu temps de calcul, peut être améliorée en travaillant de manière hiérarchique, c'est-à-dire en sélectionnant des candidats en travaillant à faible résolution en fréquence pour être peu sensible à l'effet DOPPLER, puis en affinant la recherche.

Deux algorithmes de recherche hiérarchique ont été évalués : l'algorithme des moyennes et l'algorithme des poursuites. Le premier combine plusieurs transformées de FOURIER à bas rapport signal sur bruit en les moyennant pour ensuite effectuer une première sélection de candidats. Le second recherche une trace de signal (*comme dans le cas des chambres à fils*) parmi les transformées de FOURIER à bas rapport signal sur bruit. Le choix du meilleur algorithme entre l'algorithme des moyennes et l'algorithme des poursuites reste à faire car tous les détails de mise en œuvre n'ont pas été pris en compte. Ceci justifie l'étude approfondie, voire la réalisation complète de ceux-ci pour pouvoir les juger en action.

Cependant nos évaluations montrent que la recherche aveugle de sources périodiques pour une fréquence allant jusqu'à une vingtaine de hertz semble possible avec des moyens de calculs ordinaires. Pour étendre cette recherche aux sources de fréquence de l'ordre du kilohertz, il faudra soit augmenter très fortement les moyens de calcul, soit rechercher ces sources préférentiellement dans le plan galactique, car comme nous l'avons montré dans le chapitre 1, c'est la que se trouve une grande partie des pulsars (46% *de la population pour* 5% *de l'angle solide du ciel*).

L'extension de la bande d'analyse à des fréquences atteignant le kilohertz pour envisager la recherche d'étoiles à neutrons millisecondes reste le problème majeur de ce type d'analyse. La recherche de corrélations dans les diverses corrections appliquées pourrait diminuer leur nombre et permettre ainsi de réduire la puissance de calcul nécessaire pour mener ce type d'analyse. Le couplage de recherche dans des directions opposées par exemple permettrait de diminuer par un facteur deux le nombre d'exponentielles complexes à calculer, ce qui réduirait ainsi la puissance de calcul nécessaire.

Annexe A

Calcul de $\dot{h}^{2TT}_{\alpha\beta}$

Sachant que l'on peut écrire (*formule du quadrupôle (1.31)*) :

$$h^{TT}_{\alpha\beta} = \frac{2G}{c^4 r} P_{\alpha\beta\gamma\psi} \frac{d^2 Q^{\gamma\psi}}{dt^2}(t - r/c) \tag{A.1}$$

et que $\vec{k} = k\vec{n}$ ne change pas dans un repère héliocentrique où l'on peut ramener les mesures, on a :

$$\begin{aligned}
\dot{h}^{TT}_{\alpha\beta} &= \frac{2G}{c^4 r} P_{\alpha\beta\gamma\psi} \dddot{Q}^{\gamma\psi} \qquad\qquad (A.2)\\
&= \frac{2G}{c^4 r} [\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\psi} - n_\alpha n_\gamma \delta_{\beta\psi} - n_\beta n_\psi \delta_{\alpha\gamma} + n_\alpha n_\gamma n_\beta n_\psi \\
&- \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\psi} + \frac{1}{2} n_\alpha n_\beta \delta_{\gamma\psi} + \frac{1}{2} n_\gamma n_\psi \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\psi \Big] \dddot{Q}^{\gamma\psi} \\
&= \frac{2G}{c^4 r} \Big[\dddot{Q}_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\gamma \dddot{Q}^{\gamma}_{\beta} - n_\beta n_\psi \dddot{Q}^{\psi}_{\alpha} + n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\psi \dddot{Q}^{\gamma\psi} \\
&- \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \dddot{Q}^{\gamma}_{\gamma} + \frac{1}{2} n_\alpha n_\beta \dddot{Q}^{\gamma}_{\gamma} + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} n_\gamma n_\psi \dddot{Q}^{\gamma\psi} - \frac{1}{2} n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\psi \dddot{Q}^{\gamma\psi} \Big]
\end{aligned}$$

On pose et on a :

$$A_\alpha = \dddot{Q}^{\beta}_{\alpha} n_\beta \tag{A.3}$$

$$B = A_\alpha n^\alpha \tag{A.4}$$

$$n^\alpha n_\alpha = 1 \tag{A.5}$$

Ce qui donne :

$$\dot{h}^{TT}_{\alpha\beta} = \frac{2G}{c^4 r} \left[\dddot{Q}_{\alpha\beta} - n_\alpha A_\beta - n_\beta A_\alpha + \frac{1}{2} n_\alpha n_\beta B + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} B \right] \tag{A.6}$$

On contracte le tenseur $\dot{h}^{TT}_{\alpha\beta}$ avec le tenseur $\dot{h}^{TT\alpha\beta}$, ce qui revient ici à faire une somme sur les indices α et β de $\dot{h}^{2TT}_{\alpha\beta}$, car la montée d'indice grecs se fait à l'aide des symboles de Kronecker. On décompose le calcul en plusieurs sous-parties :

$$\begin{aligned}
\dot{h}^{TT}_{\alpha\beta}\dddot{Q}^{\alpha\beta} &= \frac{2G}{c^4 r}\left[\dddot{Q}^2_{\alpha\beta} - 2n_\alpha n_\gamma \dddot{Q}^\gamma_\beta \dddot{Q}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(n_\alpha n_\beta \dddot{Q}^{\alpha\beta}\right)^2\right] \\
\dot{h}^{TT}_{\alpha\beta}n^\alpha A^\beta &= \frac{2G}{c^4 r}\left[A_\beta A^\beta - n^\alpha n_\alpha A^\beta A_\beta - B^2 + \frac{1}{2}n^\alpha n_\alpha B^2 + \frac{1}{2}B^2\right] \\
&= 0 \\
\dot{h}^{TT}_{\alpha\beta}n^\beta A^\alpha &= \frac{2G}{c^4 r}\left[A_\alpha A^\alpha - B^2 - A^\alpha A_\alpha + \frac{1}{2}n^\beta n_\beta B^2 + \frac{1}{2}B^2\right] \\
&= 0 \\
\dot{h}^{TT}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta &= \frac{2G}{c^4 r}\left[B - n^\alpha n_\alpha B - n^\beta n_\beta B + \frac{1}{2}n^\alpha n_\alpha n^\beta n_\beta B + \frac{1}{2}n^\beta n_\beta B\right] \\
&= 0 \\
\dot{h}^{TT}_{\alpha\beta}\delta^{\alpha\beta} &= \frac{2G}{c^4 r}\left[\dddot{Q}^\alpha_\alpha - B - B + \frac{1}{2}B + \frac{3}{2}B\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat final :

$$\dot{h}^{2TT}_{\alpha\beta} = \frac{8G^2}{c^8 r^2}\left[\frac{1}{4}\left(\dddot{Q}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\right)^2 + \frac{1}{2}\dddot{Q}^2_{\alpha\beta} - \dddot{Q}_{\gamma\beta}\dddot{Q}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\gamma\right] \tag{A.7}$$

Annexe B

Calcul de la fonction de transfert du système de suspension

L'amplitude de la force, de l'ordre du nanonewton, appliquée au miroir, justifie un développement correctif au premier ordre pour connaître les effets de cette force sur la position du miroir ainsi que la simplification à une dimension.

Le miroir est suspendu à un pendule inversé, à une chaîne de cinq filtres et à une marionnette. On va calculer la fonction de transfert totale de ce système. La figure B.1 montre un schéma de ce système utilisé pour la modélisation du système d'atténuateurs ainsi que la définition des axes et longueurs utilisée par la suite.

L'amplitude de la force d'excitation est tellement faible que l'on considère les ϕ_i, α, β, γ et θ comme des infiniments petits du premier ordre. C'est à cet ordre que sont calculées les accélérations de chacunes des masses en présence. Les indices r, m, a, l, correspondent respectivement à la masse de référence, au miroir, à la marionnette et au pendule inversé. Les indices i correspondent, eux, aux cinq filtres. Au premier ordre, on a alors :

$$\vec{r}_l = -\gamma L\vec{y} - L\vec{x} \tag{B.1}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_L + \sum_{j=1}^{i} \Phi_j l_j \vec{y} + \sum_{j=1}^{i} l_j \vec{x} \tag{B.2}$$

$$\vec{r}_a = \vec{r}_5 + \alpha l_a \vec{y} + l_a \vec{x} \tag{B.3}$$

$$\vec{r}_r = \vec{r}_a + \beta l \vec{y} + l\vec{x} \tag{B.4}$$

$$\vec{r}_m = \vec{r}_a + \theta l \vec{y} + l\vec{x} \tag{B.5}$$

$$\vec{a}_l = -\ddot{\gamma} L\vec{y} \tag{B.6}$$

$$\vec{a}_i = \left[-\ddot{\gamma} L + \sum_{j=1}^{i} \ddot{\Phi}_j l_j\right] \vec{y} \tag{B.7}$$

$$\vec{a}_a = \left[-\ddot{\gamma} L + \sum_{j=1}^{5} \ddot{\Phi}_j l_j + \ddot{\alpha} l_a\right] \vec{y} \tag{B.8}$$

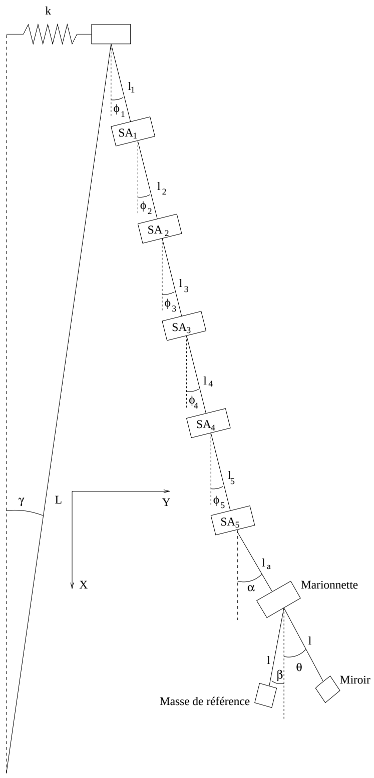


Figure B.1: Schéma de la chaîne de filtres reliée au double pendule et au pendule inversé

$$\vec{a}_r = \left[-\ddot{\gamma} L + \sum_{j=1}^{5} \ddot{\Phi}_j l_j + \ddot{\alpha} l_a + \ddot{\beta} l \right] \vec{y} \tag{B.9}$$

$$\vec{a}_m = \left[-\ddot{\gamma} L + \sum_{j=1}^{5} \ddot{\Phi}_j l_j + \ddot{\alpha} l_a + \ddot{\theta} l \right] \vec{y} \tag{B.10}$$

Procédons à un bilan des forces pour chaque masse. On note $\vec{P}$ le poids, $\vec{T}$ la tension qu'exerce chaque fil supposé infiniment rigide et $\vec{F} = -Fe^{-i\Omega t}\vec{y}$ la force excitant le miroir. La réaction du pendule inversé sur la masse en son sommet est notée $\vec{R}$. On modélise aussi l'amortissement des divers pendules. La force de freinage est une force de frottement de type visqueuse, proportionelle à l'opposé de la vitesse relative de la masse suspendue au pendule par rapport à son point d'attache. Les coefficients de frottement et masses sont respectivement f_l, f_i, f_a, f_r et f_m, m_l, m_i, m_a, m_R et m_m pour le pendule inversé, les filtres, la marionnette, la masse de référence et pour le miroir. La force de rappel du pendule inversé est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. Cela donne, en projetant sur les axes, la relation fondamentale de la dynamique au premier ordre :

Pour le sommet du pendule inversé :

$$\text{sur x} \quad -R + T_1 + m_l g = 0 \tag{B.11}$$
$$\text{sur y} \quad -\gamma R + \Phi_1 T_1 + \gamma L k + \dot{\gamma} L f_l = -m_l \ddot{\gamma} L \tag{B.12}$$

Pour les filtres un à quatre :

$$\text{sur x} \quad -T_i + m_i g + T_{i+1} = 0 \tag{B.13}$$
$$\text{sur y} \quad -\Phi_i T_i + \Phi_{i+1} T_{i+1} - \dot{\Phi}_i f_i = m_i \left[-\ddot{\gamma} L + \sum_{j=1}^{i} \ddot{\Phi}_j l_j \right] \tag{B.14}$$

Pour le filtre numéro cinq :

$$\text{sur x} \quad -T_5 + m_5 g + T_a = 0 \tag{B.15}$$
$$\text{sur y} \quad -\Phi_5 T_5 + \alpha T_a - \dot{\Phi}_5 f_5 = m_5 \left[-\ddot{\gamma} L + \sum_{i=1}^{5} \ddot{\Phi}_i l_i \right] \tag{B.16}$$

Pour la marionnette :

$$\text{sur x} \quad -T_a + m_a g + T_r + T_m = 0 \tag{B.17}$$
$$\text{sur y} \quad -\alpha T_a + \beta T_r + \theta T_m - \dot{\alpha} l_a f_a = m_a \left[-\ddot{\gamma} L + \sum_{i=1}^{5} \ddot{\Phi}_i l_i + \ddot{\alpha} l_a \right] \tag{B.18}$$

Pour la masse de référence :

$$\text{sur x} \quad -T_r + m_r g = 0 \tag{B.19}$$
$$\text{sur y} \quad -\beta T_r - \dot{\beta} l f_R = m_r \left[-\ddot{\gamma} L + \sum_{i=1}^{5} \ddot{\Phi}_i l_i + \ddot{\alpha} l_a + \ddot{\beta} l \right] \tag{B.20}$$

Pour le miroir :

$$\text{sur x} \quad -T_m + m_m g = 0 \tag{B.21}$$
$$\text{sur y} \quad -\theta T_m - F e^{i\Omega t} - \dot{\theta} l f_m = m_m \left[-\ddot{\gamma} L + \sum_{i=1}^{5} \ddot{\Phi}_i l_i + \ddot{\alpha} l_a + \ddot{\theta} l \right] \tag{B.22}$$

On obtient alors :

$$R = \left[m_l + m_m + m_r + m_a + \sum_{i=1}^{5} m_i \right] g \tag{B.23}$$
$$T_i = \left[m_m + m_r + m_a + \sum_{j=1}^{i} m_j \right] g \tag{B.24}$$
$$T_a = \left[m_m + m_r + m_a \right] g \tag{B.25}$$
$$T_m = m_m g \tag{B.26}$$
$$T_r = m_r g \tag{B.27}$$

En recherchant les solutions qui répondent à la pulsation d'excitation, Ω, et en posant $\alpha = Ae^{-i\Omega t}$, $\beta = Be^{-i\Omega t}$, $\theta = Oe^{-i\Omega t}$, $\gamma = Ge^{-i\Omega t}$ et $\phi_i = F_i e^{-i\Omega t}$, on transforme les relations précédentes en le système suivant :

$$
\begin{aligned}
&-G(R + m_l\Omega^2 L - Lk - i\Omega L f_l) + F_1 T_1 = 0\\
&-m_1 G\Omega^2 L - F_1(T_1 + i\Omega l_1 f_1 - m_1\Omega^2 l_1) + F_2 T_2 = 0\\
&m_2\Omega^2(-GL + F_1 l_1) - F_2(T_2 + i\Omega l_2 f_2 - m_2\Omega^2 l_2) + F_3 T_3 = 0\\
&m_3\Omega^2(-GL + F_1 l_1 + F_2 l_2) - F_3(T_3 + i\Omega l_3 f_3 - m_3\Omega^2 f_3 l_3) + F_4 T_4 = 0\\
&m_4\Omega^2(-GL + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3) - F_4(T_4 + i\Omega l_4 f_4 - m_4\Omega^2 f_4 l_4) + F_5 T_5 = 0\\
&m_5\Omega^2(-GL + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + F_4 l_4) - F_5(T_5 + i\Omega l_5 f_5 - m_5\Omega^2 l_5) + AT_a = 0\\
&m_a\Omega^2(-GL + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + F_4 l_4 + F_5 l_5) - A(T_a + i\Omega l_a f_a\\
&-m_a\Omega^2 l_a) + BT_r + OT_m = 0\\
&m_r\Omega^2(-GL + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + F_4 l_4 + F_5 l_5 + Al_a) - B(T_r + i\Omega l f_r\\
&-m_r\Omega^2 l) = 0\\
&m_m\Omega^2(-GL + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + F_4 l_4 + F_5 l_5 + Al_a) - O(T_m + i\Omega l f_m\\
&-m_m\Omega^2 l) = F
\end{aligned}
$$

Ce système est mis sous forme matricielle et inversé analytiquement avec le logiciel MAPLE. Un petit programme en C++ permet alors d'obtenir, pour un ensemble quelconque de paramètres, la réponse de chacun des angles indépendamment.

Les paramètres suivants sont utilisés pour modéliser la suspension :

objet	masse	longueur	facteur de qualité
pendule inversé	450 kg	7,57 m	10^3
filtre 1	135,2 kg	1,93 m	10^3
filtre 2	131,7 kg	1,41 m	10^3
filtre 3	128 kg	1,41 m	10^3
filtre 4	115 kg	1,41 m	10^3
filtre 5	88 kg	1,41 m	10^3
marionnette	80 kg	1,13 m	10^5
masse de référence	43 kg	0,7 m	10^5
miroir	21,17 kg	0,7 m	10^5

et $\nu = 0,1$ Hz la fréquence de résonance du pendule inversé.

Le coefficient de frottement est relié au facteur de qualité par la relation $f = \frac{m}{Q}\sqrt{\frac{g}{l}}$ et le coefficient de raideur du ressort $k = \left(4\pi^2\nu^2 + \frac{g}{l}\right)m$. La figure B.2 nous montre les réponses des différents angles à une excitation d'un newton. La réponse finale de la position du miroir est la somme de chacun de ces angles pondérée par la longueur de leur pendule.

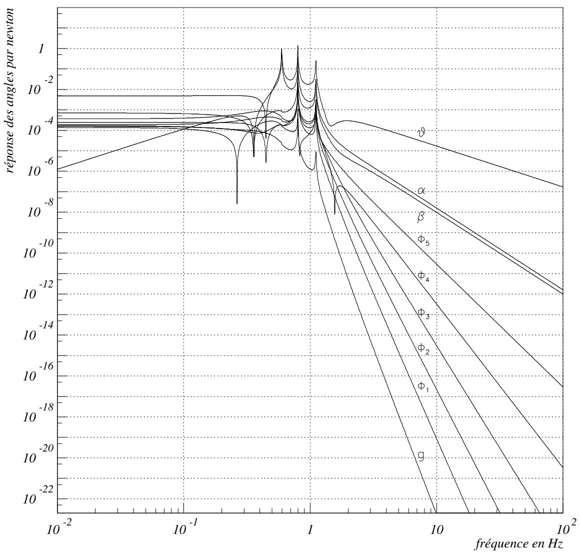


Figure B.2: Fonction de transfert des neuf angles, sous l'excitation d'une force de 1 N

Annexe C

Développement des coefficients de l'effet de modulation

On a :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\Omega t)\left(R_{xx}^2 + R_{yy}^2 - R_{xy}^2 - R_{yx}^2\right)h_+ \right. \\ &\left. +2\sin(\Omega t)\left(R_{xx}R_{xy} - R_{yy}R_{yx}\right)h_\times \right] \end{aligned}$$

Pour mettre ce qui précède sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2}h_+\cos(\Omega t)\left[a + b\cos\eta(t) + c\sin\eta(t) + d\cos 2\eta(t) \right. \\ &\left. +e\sin 2\eta(t)\right] \\ &+ \frac{1}{2}h_\times\sin(\Omega t)\left[a' + b'\cos\eta(t) + c'\sin\eta(t) + d'\cos 2\eta(t) \right. \\ &\left. +e'\sin 2\eta(t)\right] \end{aligned}$$

il faut développer R_{xx}^2, R_{yy}^2, R_{xy}^2, R_{yx}^2, $R_{xx}R_{xy}$ et $R_{yy}R_{yx}$. Ces coefficients sont définis au chapitre 4 et s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_{xx} &= R_{xx1}\cos\eta(t) + R_{xx2}\sin\eta(t) + R_{xx3} \\ R_{xy} &= R_{xy1}\cos\eta(t) + R_{xy2}\sin\eta(t) + R_{xy3} \\ R_{yx} &= R_{yx1}\cos\eta(t) + R_{yx2}\sin\eta(t) + R_{yx3} \\ R_{yy} &= R_{yy1}\cos\eta(t) + R_{yy2}\sin\eta(t) + R_{yy3} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} R_{xx}^2 &= R_{xx3}^2 + \frac{R_{xx1}^2 + R_{xx2}^2}{2} \\ &+ 2\cos\eta(t)R_{xx3}R_{xx1} + 2\sin\eta(t)R_{xx3}R_{xx2} \\ &+ \cos 2\eta(t)\frac{R_{xx1}^2 - R_{xx2}^2}{2} + \sin 2\eta(t)R_{xx1}R_{xx2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{xy}^2 &= R_{xy3}^2 + \frac{R_{xy1}^2 + R_{xy2}^2}{2} \\
&+ 2\cos\eta(t) R_{xy3} R_{xy1} + 2\sin\eta(t) R_{xy3} R_{xy2} \\
&+ \cos 2\eta(t) \frac{R_{xy1}^2 - R_{xy2}^2}{2} + \sin 2\eta(t) R_{xy1} R_{xy2} \\
R_{yx}^2 &= R_{yx3}^2 + \frac{R_{yx1}^2 + R_{yx2}^2}{2} \\
&+ 2\cos\eta(t) R_{yx3} R_{yx1} + 2\sin\eta(t) R_{yx3} R_{yx2} \\
&+ \cos 2\eta(t) \frac{R_{yx1}^2 - R_{yx2}^2}{2} + \sin 2\eta(t) R_{yx1} R_{yx2} \\
R_{yy}^2 &= R_{yy3}^2 + \frac{R_{yy1}^2 + R_{yy2}^2}{2} \\
&+ 2\cos\eta(t) R_{yy3} R_{yy1} + 2\sin\eta(t) R_{yy3} R_{yy2} \\
&+ \cos 2\eta(t) \frac{R_{yy1}^2 - R_{yy2}^2}{2} + \sin 2\eta(t) R_{yy1} R_{yy2} \\
R_{xx} R_{xy} &= R_{xx3} R_{xy3} + \frac{R_{xx1} R_{xy1} + R_{xx2} R_{xy2}}{2} \\
&+ \cos\eta(t) \left(R_{xx1} R_{xy3} + R_{xx3} R_{xy1}\right) + \sin\eta(t) \left(R_{xx2} R_{xy3} + R_{xx3} R_{xy2}\right) \\
&+ \cos 2\eta(t) \frac{R_{xx1} R_{xy1} - R_{xx2} R_{xy2}}{2} + \sin 2\eta(t) \frac{R_{xx1} R_{xy2} + R_{xx2} R_{xy1}}{2} \\
R_{yy} R_{yx} &= R_{yy3} R_{yx3} + \frac{R_{yy1} R_{yx1} + R_{yy2} R_{yx2}}{2} \\
&+ \cos\eta(t) \left(R_{yy1} R_{yx3} + R_{yy3} R_{yx1}\right) + \sin\eta(t) \left(R_{yy2} R_{yx3} + R_{yy3} R_{yx2}\right) \\
&+ \cos 2\eta(t) \frac{R_{yy1} R_{yx1} - R_{yy2} R_{yx2}}{2} + \sin 2\eta(t) \frac{R_{yy1} R_{yx2} + R_{yy2} R_{yx1}}{2}
\end{aligned}$$

d'où les coefficients a, b, c, d, e, a', b', c', d' et e' :

$$\begin{aligned}
a &= R_{xx3}^2 + \frac{R_{xx1}^2 + R_{xx2}^2}{2} + R_{yy3}^2 + \frac{R_{yy1}^2 + R_{yy2}^2}{2} - R_{xy3}^2 - \frac{R_{xy1}^2 + R_{xy2}^2}{2} - R_{yx3}^2 - \frac{R_{yx1}^2 + R_{yx2}^2}{2} \\
b &= 2\left(R_{xx3} R_{xx1} + R_{yy3} R_{yy1} - R_{xy3} R_{xy1} - R_{yx3} R_{yx1}\right) \\
c &= 2\left(R_{xx3} R_{xx2} + R_{yy3} R_{yy2} - R_{xy3} R_{xy2} - R_{yx3} R_{yx2}\right) \\
d &= \frac{R_{xx1}^2 + R_{yy1}^2 + R_{xy2}^2 + R_{yx2}^2 - R_{xx2}^2 - R_{yy2}^2 - R_{xy1}^2 - R_{yx1}^2}{2} \\
e &= R_{xx1} R_{xx2} + R_{yy1} R_{yy2} - R_{xy1} R_{xy2} - R_{yx1} R_{yx2} \\
a' &= 2 R_{xx3} R_{xy3} + R_{xx1} R_{xy1} + R_{xx2} R_{xy2} - 2 R_{yy3} R_{yx3} - R_{yy1} R_{yx1} - R_{yy2} R_{yx2} \\
b' &= 2\left(R_{xx1} R_{xy3} + R_{xx3} R_{xy1} - R_{yy1} R_{yx3} - R_{yy3} R_{yx1}\right) \\
c' &= 2\left(R_{xx2} R_{xy3} + R_{xx3} R_{xy2} - R_{yy2} R_{yx3} - R_{yy3} R_{yx2}\right) \\
d' &= R_{xx1} R_{xy1} - R_{xx2} R_{xy2} - R_{yy1} R_{yx1} + R_{yy2} R_{yx2} \\
e' &= R_{xx1} R_{xy2} + R_{xx2} R_{xy1} - R_{yy1} R_{yx2} - R_{yy2} R_{yx1}
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] R. A. Hulse et J. H. Taylor. «Discovery of a pulsar in a binary system». *Astrophysical journal*, , (1975). 195(L51-53).

[2] Nathalie Deruelle. «*Relativité Générale*», (1993). Cours DEA Physique théorique Paris.

[3] Michelson et Morley. *Am.J.Sci*, **34**, (1887).

[4] R. V. Pound et G. A. Rebka. «Apparent Weight of Photons». *Phys. Rev. Lett.*, **4**:337–341, (1960).

[5] R. L. Mössbauer. *Z. Physik*, **151**:124, (1958).

[6] Landau. *Physique théorique*, volume II. MIR, (1966).

[7] S. Bonazzola et E. Gourgoulhon. «Gravitational waves from pulsars: emission by the magnetic-field-induced distortion». *Astron. Astrophys.*, **312**:675–690, (1996).

[8] S. Bonazzola et A. Giazotto. «*On gravitational waves emitted by an ensemble of rotating neutron stars*». DARC Meudon and INFN Pisa, (1996). Virgo Note 96 014.

[9] J. H. Taylor, R. N. Manchester, A. G. Lyne et F. Camilo. «*Catalog of 706 Pulsars*», (1995). Non publié.

[10] A. G. Lyne et F. Graham-Smith. *Pulsar astronomy.* Cambridge Astrophysics Series, (1990).

[11] J. Shaham. «Les plus vieux pulsars de l'Univers». *Pour la science*, , avril 1987.

[12] N. Strautmann. *General Relativity and relativistic astrophysics.* Springer Verlag, (1984).

[13] Napoli group. «*Earth-based Gravitational Wave Detection from Pulsars*», 1 mars 1997. NTS96-0011.

[14] «*Virgo Final Design Report*».

[15] G. Cagnoli *et al.* «*Virgo Note 1390 054*». INFN Perugia, août 1996.

[16] H. B. Callen et T. A. Welson. «Irreversibility and generalized noise». *Phys Rev*, **83**:34–40, (1951).

[17] François Bondu. «*Étude du bruit thermique et stabilisation en fréquence du laser du détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles VIRGO*». Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, (1996).

[18] J. Y. Vinet *et al.* «*Scattered light noise in gravitational wave interferometric detectors : a statistical approach*», 14 février 1997. VIR-NOT-DIR-1310-078.

[19] R. E. Vogt *et al.* «*A Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO)*», (1989). Proposal to the National Science Foundation.

[20] K. Danzmann *et al.* «*Geo600 Proposal for a 600 m Laser Interferometric Gravitational Wave Antenna*», juin 1994.

[21] *Status of TAMA*, 19-23 mars 1996. Presented at International Conference on Gravitational Waves: Sources and Detectors, Pisa, Italy.

[22] P. Bender *et al.* «*Laser Interferometric Space Antenna for the detection and observation of gravitational waves*», décembre 1995. Pre-Phase A Report.

[23] B. Schutz. *A First course in General Relativity.* Cambridge University Press, (1985). page 222.

[24] *The Gravitational wave experiment of the Rome group: Status report for the resonant antennas Explorer and Nautilus*, (1990). In *Canberra 1990, Proceedings, Gravitational astronomy*.

[25] N. Solomonson, W. O. Hamilton et W. Johnson. «Construction and performance of a low noise inductive transducer for the Louisiana State University gravitational wave detector». *Rev. Sci. Instrum.*, **65(1)**:174, (1994).

[26] «GRAIL: A Proposal for a gravitational radiation antenna in the Netherlands». .

[27] W. W. Johnson et S. M. Merkowitz. «Truncated Icosahedral Gravitational Wave Antenna». *Physical Review Letters*, **70**:2367, (1993).

[28] B. Caron *et al.* «A Simulation program for the VIRGO experiment». *Nucl. Instrum. Meth.*, **A360**:375–378, (1995). Presented at 6th Pisa Meeting on Advanced Detector: Frontier Detectors for Frontier Physics, La Biodola, Elba, Italy.

[29] X. Grave et B. Mours. «*Doppler effect and Periodic signal search*», 30 décembre 1995. NTS95-40.

[30] G. Francou, L. Bergeal, J. Chapront et B. Morando. «Nouvelles éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes». *Astron. Astrophys.*, **128**:124–139, (1983).

[31] S. V. Dhurandhar, K. Jotania et S. R. Valluri. *Astron. Astrophys.*, **306**:317, (1997). Effet Doppler diurne.

[32] X. Grave et B. Mours. «*Pulsar amplitude modulation due to earth rotation*», 12 juin 1996. NTS96-36.

[33] M. Bellanger. Traitement numérique du signal. Masson, (1990).

[34] X. Grave et B. Mours. «*Pulsar signal losses due to their spinning down*», 6 mars 1996. NTS96-15.

[35] P. R. Brady, T. Creighton, C. Cutler et B. F. Schutz. «Searching for periodic sources with Ligo». *General Relativity and Quantum Cosmology*, , 24 février 1997. not submited hep/ph9702050.

Liste des figures