TD d'Electrostatique et Magnétostatique

PHYS 304 – TD

Corrigés des quelques exercices variés des TD.

1 - Condensateurs : capacité linéique d'un câble coaxial

a) Choix de coordonnées : coordonnées cylindriques. Champ électrique entre les deux âmes : utiliser le théorème de Gauss. Surface de Gauss, un cylindre de longuer h et coaxial au câble.
$E(\rho).2\pi\rho h = \lambda h/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad E(\rho) = \lambda/2\pi\varepsilon_0\rho$

b)

$$V_2 - V_1 = \int_1^2 dV = -\int_1^2 \vec{E}.\vec{dl} = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda.d\rho}{2\pi\varepsilon_0\rho} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Conducteur extérieur à la masse $\Rightarrow V_2 = 0 \Rightarrow V_{\text{conducteur central}} = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} > 0$ si $\lambda > 0$.

c) $Q = VC \Rightarrow Q/l = VC/l$ c'est-à-dire charge linéique = d.d.p fois capacité linéique $\Rightarrow \lambda = V.\mathcal{C}$
$\mathcal{C} = \lambda/V = 2\pi\varepsilon_0/\ln(R_2/R_1) \approx 33\ pF/m$, capacité typique.

d) Claquage : ionisation du milieu isolant entre les deux âmes du condensateur jusqu'au point où il devient conducteur. (Conséquences du claquage : condensateur déchargé et isolant souvent abimé.)

$$\left.\begin{array}{r} E_{\max} = E(\rho = R_1) \Rightarrow E_{\text{claquage}} = \lambda/2\pi\varepsilon_0 R_1 \\ V_{\max} = \lambda\ln(R_2/R_1)/2\pi\varepsilon_0 \end{array}\right\} \text{on élimine } \lambda \quad \Rightarrow \quad R_1 E_{\text{claquage}} = V_{\max}/\ln(R_2/R_1)$$

$\Rightarrow R_2 = R_1 e^{V_{\max}/R_1 E_{\text{claquage}}}$. R_2 minimal si $dR_2/dR_1 = 0 \quad \Rightarrow R_2/R_1 = e \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} = 2\pi\varepsilon_0$.

2 - Magnétostatique : Bobines de Helmholtz

a) D'abord on calcule le champ d'une spire centrée à l'origine en un point M quelconque de son axe. Loi de Biot-Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\vec{dl}\wedge\vec{PM}}{PM^3}$$

où P est le point de l'espace où se trouve l'élément de spire de longueur $\vec{dl}$. Celui-ci est un vecteur tangent à la spire.

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} \ \ \text{(où } \vec{OM} \text{ est constant)} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{(a^2+OM^2)^{3/2}}\left[\oint \vec{dl}\wedge\vec{PO} + \left(\oint \vec{dl}\right)\wedge\vec{OM}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\frac{I.a^2\ \vec{n}}{a^3(1+(OM/a)^2)^{3/2}}$$

car $\oint \vec{dl} = 0$, $\oint \vec{dl}\wedge\vec{PO} = 2\pi\ \vec{n}$ ($\vec{dl}\|\vec{u}_\phi$; $\vec{PO} = -a\vec{u}_\rho$ et $(\vec{dl}\wedge\vec{PO})\|\vec{u}_z = \vec{n}$) et $\vec{n}$ est le vecteur normal à la spire dont le sens est déterminé par le sens dans lequel le courant parcourt la spire à l'aide de la règle du tire-bouchon.

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0\ I}{2a}\vec{n} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{B(M)}{B(O)} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \text{ avec } x = \frac{OM}{a}$$

$$y'(x) = -3x(1+x^2)^{-5/2}; \quad y''(x) = -3\frac{4x^2+1}{(1+x^2)^{7/2}} \Rightarrow y''(\pm 1/2) = 0$$

b)

$$y'(C) = y_1(C) + y_2(C) = 0; \quad y''(C) = 0 + 0 \text{ donc } y(x) \text{ varie très peu au voisinage de } C.$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0\ I}{2a}\vec{n} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{B(M)}{B(O)} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \text{ avec } x = \frac{OM}{a}$$

$$y(C) = 2y_1(1/2) = 2(1+1/4)^{-3/2} \approx 1,42 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_C = 1,42 \times \vec{B}_1(O)$$

Les bobines de Helmholtz sont utilisées assez souvent en laboratoire pour produire des champs magnétiques presque uniformes de façon peu couteuse.