Notes de cours de PHYS 101

Richard Taillet, 4 septembre 2012

Table des matières

1

Introduction

Le cours de PHYS 111 présente une introduction à la mécanique, avec une ambition un peu plus générale. Tout au long de ce cours, nous présenterons les différentes étapes d'un raisonnement en physique, la façon d'analyser un problème, de le formaliser sous une forme mathématique, de résoudre le problème mathématique, puis de traduire la solution mathématique dans un language physique, pour la comprendre pleinement. Dans cette chaîne, la physique proprement dite se mêle souvent à des considérations purement mathématiques, et nous essaierons de différencier clairement ces difficultés. Du côté de la physique, il faudra connaître quelques lois générales (la relation fondamentale de la dynamique, l'expression de quelques forces). Du côté des mathématiques, il faudra connaître le programme de collège et lycée ainsi que quelques notions plus avancées (résoudre des équations ou des systèmes d'équations algébriques, dériver ou intégrer des fonctions simples, résoudre des équations différentielles du premier ou du second ordre, à coefficients constants). Nous ferons les rappels qui s'imposent au fur et à mesure que les notions feront leur apparition.

Cette partie du cours, intitulée « mécanique », s'intéresse aux forces. Nous allons revenir sur cette notion en détail, mais nous en avons tous une vision intuitive, la force c'est ce qui nous tient au sol ou ce qui retient la Terre autour du Soleil (la force gravitationnelle), c'est ce qui pousse sur la paroi d'un ballon de baudruche ou sur le bord d'un barrage (forces de pression), c'est ce qui attire les petits bouts de papier sur le stylo préalablement frotté dans les cheveux (force électrostatique), c'est ce qui repousse ou attire des aimants (force magnétique), etc. Les forces peuvent modifier le mouvement des corps, et une partie importante du cours sera consacrée à cette question.

1 Généralités – unités

1.1 Cinématique et dynamique

On distingue habituellement deux pans de la mécanique :

- la **cinématique** dont le but est de décrire le mouvement des corps, en définissant la position, la vitesse de translation ou de rotation, l'accélération, etc...
- la **dynamique** dont le but est d'expliquer le mouvement des corps, en reliant l'accélération aux forces subies.

Durant ce cours, nous aurons besoin de décrire le mouvement des objets. Le mouvement étant une variation de la position dans le temps. il faut donc savoir définir la position des objets.

1.2 Coordonnées

Petit jeu, placez deux objets différents, une pomme et un stylo, en deux endroits différents de la pièce. Repérez bien la position de ces deux objets, bandez les yeux à un cobaye et faites-le tourner sur lui-même pour perdre son sens de l'orientation, puis posez-lui la main sur le premier objet, pour qu'il sache où il se trouve. Le jeu commence : essayer de faire toucher le second objet au cobaye en ne lui donnant que des instructions verbales. Vous vous apercevrez qu'il vous faudra toujours donner trois indications numériques au minimum (avancer de 3 pas, monter la main de 25 cm, etc.) pour que le cobaye trouve l'objet. On dit que notre espace a trois dimensions (ce qui n'a rien à voir avec la notion de dimension du paragraphe qui suit !).

Vous verrez aussi que vous serez obligé de spécifier des nombres, l'un d'entre eux au moins faisant référence à une longueur connue. Vous direz par exemple « une longueur de bras » ou « cinquante centimètres ». Ces nombres sont appelés des coordonnées.

Il existe différents ensembles de nombres permettant de repérer un même objets, on dira qu'on peut utiliser plusieurs **systèmes de coordonnées** (par exemple, dans le plan vous connaissez les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires).

1.3 Dimension physique

Les grandeurs physiques servent à représenter des quantités de différents types, par exemple des longueurs, des intervalles de temps, des températures, etc... On affecte à chaque grandeur une dimension qui indique de quel type il s'agit. Par exemple, toutes les distances, les tailles ont la dimension d'une longueur. Cette dimension est notée $\mathbf{L}$. De même, on note $\mathbf{T}$ les temps, $\mathbf{M}$ les masses. On peut combiner plusieurs dimensions, par exemple la dimension d'une vitesse s'écrit $\mathbf{LT}^{-1}$, ce que l'on écrit formellement

$$[v] = \mathbf{LT}^{-1}$$

où les crochets signifient « la dimension de ». Les dimensions de toutes les quantités physiques peuvent s'exprimer à partir d'un petit nombre d'entre elles, que l'on qualifie de dimensions fondamentales. En mécanique, toutes les dimensions d'expriment en combinant masse, longueur et temps.

1.4 Unités de mesure

La plupart des grandeurs physiques sont affectées d'unités, c'est-à-dire qu'elles se réfèrent à une grandeur du même type supposée connue. En ce qui concerne les longueurs, il y a de nombreuses unités en vigueur, citons par exemple

- le mètre et ses multiples et sous-multiples (centimètre, kilomètre, etc.) ;
- le pouce (2,54 cm), le pied (30,48 cm), la verge anglaise ou yard (0,9144 m), le mile, unités anglo-saxonnes ;
- différentes unités maritimes comme le mile nautique ;
- l'année-lumière, le parsec et l'unité astronomique, utilisées en astronomie ;
- le fermi, le micron, l'ångström, unités microscopiques ;
- le pica et le point, unités typographiques ;
- la lieue, la perche, la toise, anciennes unités françaises ;
- plus pour s'amuser un peu : `http://www.convert-me.com/en/convert/length`.

Le passage d'une unité à l'autre est appelé une **conversion**, il existe des tables permettant de convertir n'importe quelle unité en n'importe quelle autre. Vous l'avez peut-être déjà expérimenté si vous avez voyagé aux États-Unis, où les distances sont indiquées en miles sur les routes, et non en kilomètres.

Insistons sur le fait que la notion d'unité est différent de celle de dimension physique. Deux quantités physiques peuvent avoir la même dimension mais ne pas être exprimées dans la même unité. Par contre, on ne peut exprimer des quantités dans la même unité que si elles sont de même dimension.

Par convention, on a défini des unités simples, appelées **unités de base**, pour certains types de grandeurs physiques. Le système international d'unités, noté SI et adopté par la Conférence Générale des Poids et Mesures en 1960, définit comme dimension fondamentales et comme unités de base :
- des longueurs (exprimées en mètres) ;
- des temps (seconde) ;
- des masses (kilogramme) ;
- des courants électriques (ampère) ;
- des températures (kelvin) ;
- des quantités de matière (moles) ;
- l'intensité lumineuse (candela).

Il existe d'autres types de grandeurs physiques, qui s'expriment dans d'autres unités, appelées **unités dérivées** et construites à partir de ces unités de bases. Par exemple, une vitesse est le rapport d'une distance par le temps mis pour la parcourir, elle s'exprime en m/s, qu'on note aussi $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ ou $\mathrm{m\ s}^{-1}$.

1.5 Le système international d'unités

Voir la brochure disponible sur le portail. Chercher sur internet ce que signifient les sigles BIPM et CODATA.

Il existe plusieurs systèmes d'unités différents, pour des raisons historiques, mais aussi pour des raisons de commodité (lesa strophysiciens et les physiciens des particules ont besoin d'unités différentes, par exemple). Ce n'est généralement pas un problème, à condition de savoir exactement quelles unités sont utilisées quand on transmet une valeur numérique. Il est extrêmement important à veiller à systématiquement indiquer l'unité de toute grandeur numérique ! Ne pas le faire peut coûter cher (chercher Mars Climate Orbiter sur internet, mission martienne perdue en septembre 1999 à cause d'une erreur d'unité, des valeurs attendues en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$ ont été transmises en livre-force lbf, une unité anglo-saxonne).

Parmi ces systèmes d'unités, le Système International est le plus développé, et doit être utilisé dans la mesure du possible : de nombreuses équipes dans le monde travaillent pour fournir des définitions pratiques des unités et des manières de les réaliser. La définition d'une unité est aussi une question technologique. Par exemple, le mètre étant défini comme la longueur parcourue par la lumière en 1/299 792 458 s, cette définition n'a de sens que si l'on parvient à mesurer la vitesse de la lumière avec précision.

1.6 Analyse dimensionnelle

Les équations de la physique relient entre elles des grandeurs de types différents, mais seulement dans des combinaisons de même dimension physique. Si vous trouvez qu'une longueur est égale à un temps, vous vous êtes trompé quelque part ! On peut mettre à profit cette propriété pour deviner des résultats physiques sans calcul.

Par exemple, la période d'oscillation d'un pendule peut a priori dépendre de sa masse m, de sa longueur ℓ, et de la force d'attraction gravitationnelle, plus précisément de l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. En résolvant le problème, on va trouver une formule donnant la période T en fonction de m, ℓ et g. Il faut donc trouver une combinaison $m^\alpha \ell^\beta g^\delta$ de ces trois grandeurs qui ait la dimension d'un temps. On doit donc avoir

$$\mathsf{M}^\alpha \mathsf{L}^\beta \mathsf{L}^\delta \mathsf{T}^{-2\delta} = \mathsf{T} \tag{1.1}$$

On doit donc avoir $\alpha = 0$, $\delta = -1/2$ et $\beta = 1/2$. La période d'oscillation s'exprimera donc en fonction de $\sqrt{\ell/g}$. On voit déjà que la masse ne peut pas intervenir !

1.7 Un exemple pratique

En 1945, la première bombe nucléaire (Trinity) explose au Nouveau Mexique. Une série de photographies, comportant une échelle de taille et des indications de temps, sont publiées en 1950 dans le magazine Life. Le physicien britannique G.I. Taylor se sert de ces photos pour estimer l'énergie libérée par l'explosion, qui est alors une donnée ultrasecrète et classifiée ! Pour cela, il suppose qu'il existe une relation entre le rayon R de l'explosion, le temps t, l'énergie E et la densité ρ de l'air, de la forme

$$R \propto E^{\alpha} \rho^{\beta} t^{\gamma} \tag{1.2}$$

ce qui du point de vue des dimensions s'écrit

$$\mathsf{L} = (\mathsf{ML}^2\mathsf{T}^{-2})^{\alpha} (\mathsf{ML}^{-3})^{\beta} (\mathsf{L})^{\gamma} \tag{1.3}$$

ce qui se résoud en $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$ et $\gamma = 2/5$ si bien que

$$R \propto \left(\frac{Et^2}{\rho} \right)^{1/5} \quad \text{soit} \quad R^5 \propto \frac{Et^2}{\rho} \tag{1.4}$$

La courbe représentant R^5 en fonction de t^2/ρ est donc une droite, dont la pente donne E. Ou la courbe représentant $\log R$ en fonction de $\log t$ est aussi une droite, dont l'ordonnée à l'origine vaut $\log(E/\rho)$. Taylor put ainsi estimer l'énergie de la bombe à environ 25 kilotonnes de TNT.

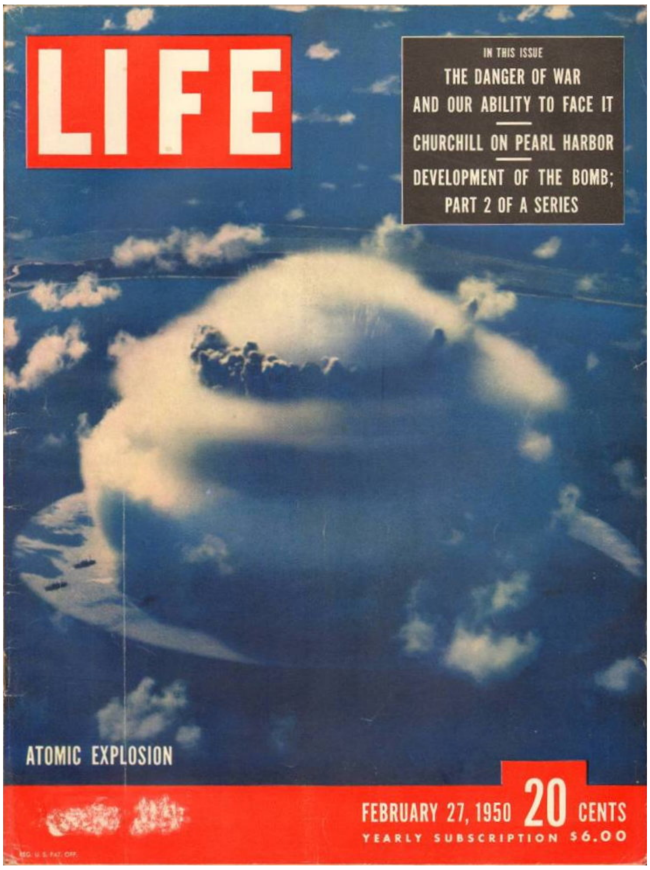

Figure 1.1: La couverture du magazine Life, daté du 27 février 1950.

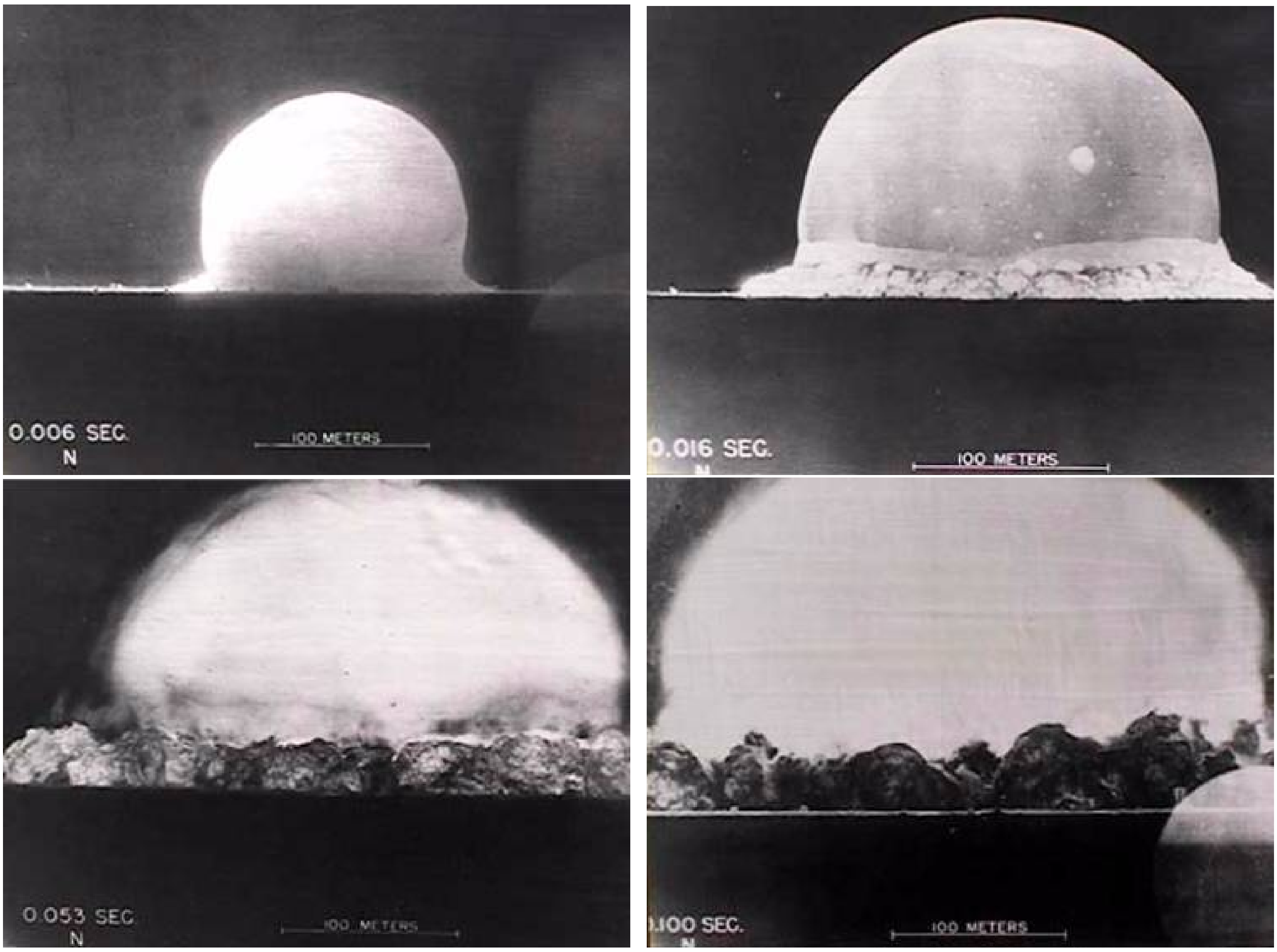

FIGURE 1.2: Les photographies publiées.

1.8 Scalaires et vecteurs

Les quantités physiques sont aussi caractérisées par une autre propriété. Certaines d'entre elles sont décrites par des **vecteurs**, par exemple les forces, la position (voir plus loin), le champ électrique, le champ magnétique. Celles qui ne sont décrites que par un nombre sont qualifiées de **scalaires**, par exemple la distance parcourue, le temps écoulé, la température, la densité.

Une équation physique ne peut relier entre elles que des quantités du même type : un scalaire ne peut pas être égal à un vecteur !

1.9 Coordonnées, vecteurs

Le moyen le plus simple pour décrire la position d'un point M est d'introduire un **repère**, défini par un point de référence O appelé l'**origine**, et le vecteur $\vec{OM}$ qui sera noté $\vec{r}$, on l'appelle le **vecteur position**. Il dépend du temps si le point M est en mouvement par rapport à l'origine.

Les coordonnées du vecteur $\vec{r}$ dépendent du système de coordonnées choisi. Par exemple, en coordonnées cartésiennes on dresse trois axes orthogonaux Ox, Oy et Oz, et la position de M est donnée par la projection de M sur chacun des axes. En appelant $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ les vecteurs unitaires sur ces axes, on a

$$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z \tag{1.5}$$

On peut aussi, en coordonnées cylindriques, définir un axe Oz et se donner la projection de M sur cet axe, la distance de M à l'axe et un angle indiquant la position de M autour de l'axe.

On introduit un vecteur $\vec{u}_r$ radial et un vecteur $\vec{u}_\theta$ orthoradial, et l'on a

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r \tag{1.6}$$

Attention, dans ce cas le vecteur $\vec{u}_r$ dépend du point M considéré !

Il existe beaucoup d'autres systèmes de coordonnées, nous n'utiliserons que ces deux-là pour commencer.

1.10 Résumé

Une grandeur physique est caractérisée par :
- une dimension ;
- une unité ;
- un caractère scalaire ou vectoriel.

2 Cinématique

2.1 Vitesse

Quand on parle de « vitesse » dans la vie de tous les jours, on pense à ceci : « j'ai parcouru 100 km en 1 heure, ma vitesse est donc de 100 km/h ». Il s'agit là de vitesse moyenne, si vous avez regardé le compteur de la voiture, vous avez remarque que vous avez parfois roulé plus vite, parfois plus lentement : la vitesse instantanée a varié au cours du temps. Si on prend la peine de noter la distance parcourue ℓ en fonction du temps, on obtient une fonction $\ell(t)$. On appelle « vitesse instantanée » la dérivée de cette fonction :

$$v \equiv \frac{d\ell}{dt}$$

Elle correspond, en gros, à la vitesse moyenne sur un intervalle de temps infiniment petit.

La définition précédente a un défaut : elle ne dit rien de la direction dans laquelle on se déplace, elle décrit seulement la distance parcourue le long du chemin. On fait appel à une définition plus générale, et plus utile en mécanique. La vitesse est une quantité vectorielle définie comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps

$$\vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}} \tag{1.7}$$

où l'on a introduit une notation utile, le point désignant la dérivée par rapport au temps. On peut facilement écrire les coordonnées de $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes,

$$\vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z\big) = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z \tag{1.8}$$

ce que l'on écrit aussi

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{xyz} \tag{1.9}$$

Complément : vitesse en coordonnées cylindriques

Attention, l'expression en coordonnées cylindriques recèle un piège, car le vecteur $\vec{u}_r$ dépend de la position, et donc du temps si l'objet est en mouvement.

$$\vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z\right) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r + \dot{z}\,\vec{u}_z \tag{1.10}$$

On peut montrer, par exemple en écrivant les coordonnées du vecteur $\vec{u}_r$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, que

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \tag{1.11}$$

En effet, dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, le vecteur $\vec{u}_r$ s'écrit

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

et sa dérivée par rapport au temps a donc pour coordonnées

$$\dot{\vec{u}}_r = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\,\sin\theta \\ \dot{\theta}\,\cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

En utilisant cette propriété, on a donc

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z \tag{1.12}$$

soit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{r\theta z} \tag{1.13}$$

2.2 accélération

L'accélération est une quantité vectorielle définie comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z\right) = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\,\vec{u}_z \tag{1.14}$$

ce que l'on écrit aussi

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{xyz} \tag{1.15}$$

où le double point indique une dérivée seconde par rapport au temps.

Complément : accélération en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques,

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\right) \tag{1.16}$$

On peut montrer, par exemple en écrivant les coordonnées du vecteur $\vec{u}_\theta$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, que

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r \tag{1.17}$$

ce qui, en utilisant aussi la propriété $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$, conduit à

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\,\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\,\vec{u}_\theta \tag{1.18}$$

2.3 composition des vitesses

Quand on étudie des objets en mouvement, il est souvent utile de changer de point de vue, en suivant l'objet dans son mouvement par exemple, ou au contraire en se plaçant dans un référentiel que l'on considère comme « fixe », et dans lequel l'objet est en mouvement.

Maths

Nous n'allons considérer ici que le cas le plus simple, celui d'un changement référentiel par translation. Il s'agit de changer l'origine du repère. Le repère initial $\mathcal{R}$ a une origine O, et le nouveau repère $\mathcal{R}'$ a une origine O'. On a donc

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} \quad \text{soit} \quad \vec{r}\,' = \overrightarrow{O'O} + \vec{r} \tag{1.19}$$

Ce qui se traduit pour la vitesse

$$\vec{v}' = \vec{v} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'O}}{\mathrm{d}t} \quad \text{soit} \quad \vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \tag{1.20}$$

et pour l'accélération

$$\vec{a}' = \vec{a} + \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'O}}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{soit} \quad \vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_{O/\mathcal{R}'} \tag{1.21}$$

Application « bête » : vous vous déplacez à la vitesse $v_1 = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ dans le sens de la marche, dans un train qui avance à la vitesse $v_2 = 30$ km/h. Calculez votre vitesse par rapport au sol.

Application moins bête : vous vous déplacez toujours à la même vitesse, dans le même train, mais cette fois dans le sens de la largeur du vagon (perpendiculairement à la direction du train). Calculer votre vitesse par rapport au sol.

Remarque 1 : ces relations d'addition des vitesses seront profondément remises en cause par la relativité restreinte. Si on se déplace à 90 % de la vitesse de la lumière ($c \approx 300\,000\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$), dans un train qui va lui-même à 90 % de la vitesse de la lumière, on ne se déplace pas à 180 % de la vitesse de la lumière par rapport au sol ! Pour le fun, la formule correcte s'écrit

$$v' = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

Reprendre la question de l'application « bête » en utilisant la formule relativiste et comparer le résultat numérique au résultat obtenu précédemment.

Remarque 2 : Si le second référentiel est en translation uniforme par rapport au premier ($\vec{v}_{O/\mathcal{R}'}$ est constante), alors l'accélération est la même dans les deux référentiel. Ce point est important pour ce qui suit, car l'accélération sera identifiée aux forces subies par le système.