

1 Principe fondamental de la dynamique

1.1 Référentiel

On appelle **référentiel** l'ensemble formé par un repère d'espace (avec une origine et un système d'axes) et un repère de temps. Il est ainsi possible de spécifier où et quand quelque chose se produit sur le système étudié.

1.2 Énoncé du principe fondamental

La mécanique est basée sur un principe, qu'on appelle aussi **relation fondamentale de la dynamique**, et que nous noterons RFD. Elle fait intervenir la notion de force, que nous n'avons pas encore définie, et qui est intimement liée au principe que nous allons énoncer.

Énoncé du principe fondamental de la dynamique

Dans certains référentiels, appelés **référentiels galiléens**, l'accélération des corps est déterminée par les forces qu'ils subissent, par la relation

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.1)$$

On peut aussi l'écrire en introduisant la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.2)$$

1.3 Principe de relativité galiléenne

D'après la relation 1.21, la RFD s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}'$

$$m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} \quad (2.3)$$

Elle a donc la même forme dans les deux référentiels quand $\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$, c'est à dire quand la vitesse $\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ est constante. Dit autrement, le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est galiléen que s'il se déduit du référentiel galiléen $\mathcal{R}$ par une translation rectiligne uniforme (à vitesse constante).

Le fait que les lois physiques soient les mêmes dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et appelé le principe de relativité galiléenne.

Inversement, la RFD n'est a priori pas valable dans les référentiels non galiléens. Vous verrez dans les cours suivants que l'on peut quand même s'appuyer dessus, en introduisant des forces d'inertie, qui décrivent l'effet de l'accélération du référentiel dans lequel on se trouve par rapport aux référentiels non galiléens.

1.4 Principe de l'action-réaction ou principe des actions réciproques

Pour passer de l'étude d'un système simple à celle d'un système constitué de plusieurs parties, nous aurons besoin d'utiliser un autre principe important, appelé principe de l'action-réaction ou principe des actions réciproques. Il s'énonce de la façon suivante :

Principe d'action-réaction

La force exercée par un système 1 sur un système 2 est exactement opposée à la force exercée par le système 2 sur le système 1.

Nous déduirons de ce principe que la quantité de mouvement d'un système composé est conservé si ce système n'est soumis à aucune force. Conceptuellement, il serait plus satisfaisant de montrer ce principe à partir de la conservation de la quantité de mouvement, qui est beaucoup plus fondamentale. D'ailleurs, il existe des situations dans laquelle la quantité de mouvement totale est conservée, mais où les actions réciproques ne sont pas égales. C'est notamment le cas quand une partie de la quantité de mouvement se retrouve sous une forme non mécanique, par exemple en présence d'un champ électromagnétique. Nous n'allons pas considérer ces subtilités dans ce cours.

1.5 Système composé de plusieurs sous-parties

Considérons un système constitué de deux particules ponctuelles, qui peuvent exercer une force l'une sur l'autre, et subir des forces externes. La RFD s'écrit pour chacune d'entre elles

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \sum_i \vec{F}_{i1}^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \sum_i \vec{F}_{i2}^{\text{ext}} \quad (2.4)$$

où on a séparé les forces agissant entre 1 et 2 des autres (notées $\vec{F}_{i1}^{\text{ext}}$ et $\vec{F}_{i2}^{\text{ext}}$). Quand on fait la somme de ces équations, les forces réciproques s'annulent l'une l'autre, selon le principe d'action-réaction. On obtient alors

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (2.5)$$

où $\vec{p}$ désigne la quantité de mouvement totale $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ et $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ représente toutes les forces extérieures subies par l'ensemble du système.

On peut remarquer que la quantité de mouvement totale est égale à celle du **centre de masse** G , parfois appelé improprement centre de gravité, défini par

$$M_{\text{tot}} \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OM}_i \quad (2.6)$$

En effet, en dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient

$$M_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad \text{soit} \quad \vec{p}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{p}_i \quad (2.7)$$

1.6 Conservation de la quantité de mouvement

On dit qu'un système est **isolé** quand il n'est soumis à aucune force extérieure. On dit qu'un système est **pseudo-isolé** quand la somme des forces extérieures auxquelles il est soumis est nulle, et quand ces forces ont le même point d'application.

Ces deux situations sont totalement équivalentes du point de vue de la dynamique, le mouvement qui en résulte est le même dans les deux cas, plus précisément

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad (2.8)$$

et donc la quantité de mouvement totale est conservée.

2 Énergie et moment cinétique

2.1 Théorème de l'énergie cinétique

En multipliant scalairement la RFD par la vitesse $\vec{v}$, on obtient

$$m\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (2.9)$$

où $\vec{F}$ désigne l'ensemble des forces qui s'appliquent sur le système. Or, on montre facilement que

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \quad (2.10)$$

et donc

$$\frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (2.11)$$

En intégrant par rapport au temps, entre deux instants t_A et t_B , auxquels la vitesse vaut respectivement v_A et v_B , on a

$$\left(\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \right) = \int_A^B \vec{v} \cdot \vec{F} dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.12)$$

La quantité dans le membre de droite est appelée le **travail** fourni par la force $\vec{F}$, on le note souvent $W_{A \rightarrow B}$. La quantité dans le membre de gauche s'écrit aussi plus simplement en introduisant l'**énergie cinétique** E_c définie par

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.13)$$

La relation précédente s'écrit alors

$$\Delta E_c \equiv E_c^B - E_c^A = W_{A \rightarrow B} \quad (2.14)$$

C'est le théorème de l'énergie cinétique, qui peut s'énoncer ainsi : *La variation d'énergie cinétique d'un système est égale à la somme des travaux des forces appliquées.*

Dans un sens, c'est ce théorème qui relie la définition abstraite du travail (une intégrale de la force sur le chemin parcouru) à la notion d'énergie. Si l'on suppose que l'énergie est une quantité qui se conserve, ce théorème indique que l'énergie cinétique gagnée ou perdue est échangée sous forme de travail.

2.2 Energie potentielle – énergie mécanique

Dans plusieurs situations, les forces peuvent s'écrire sous la forme

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$$

On dit alors que la force est **conservative**. C'est le cas par exemple de la force gravitationnelle, de la force électrostatique. Ce n'est pas le cas des forces de frottement. On peut montrer que dans ce cas, le travail prend une forme simple,

$$\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{\ell} = -d\Phi$$

et donc $W_{A \rightarrow B} = \Phi_A - \Phi_B$, soit

$$\Delta E_c = W_{A \rightarrow B} = -\Delta\Phi \quad (2.15)$$

La quantité Φ est appelée **énergie potentielle** et notée E_p . On a

$$\Delta(E_c + E_p) = 0 \quad (2.16)$$

La quantité $E_m \equiv E_c + E_p$ est appelée **énergie mécanique**. Elle est conservée au cours du mouvement lorsque le système n'est soumis qu'à des forces conservatives.

2.3 Moments de forces, moment cinétique

Dans la définition des systèmes pseudo-isolés que nous avons donnée plus haut, nous avons précisé que les forces devaient s'appliquer au même point. Si ce n'est pas le cas, le système peut se mettre à tourner sur lui-même (donner un exemple). Ceci s'étudie en introduisant la notion de couple de force. Pour cela, on multiplie vectoriellement la RFD par le vecteur position $\vec{r}$, ce qui donne

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{r} \wedge \vec{F}_i \quad (2.17)$$

Or, le premier terme peut s'écrire autrement en introduisant le **moment cinétique**

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (2.18)$$

et en remarquant que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.19)$$

Le premier terme du membre de droite est nul car $\vec{v}$ et $\vec{p}$ sont colinéaires, et finalement

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r} \wedge \vec{F}_i \quad (2.20)$$

Le second terme est appelée le **moment des forces**, on le note souvent $\vec{\mathcal{L}}$.

Vous étudierez plus en détail le moment cinétique dans d'autres cours, retenez simplement que c'est une mesure de la rotation du système. Pour qu'un système soit à l'équilibre, il faut donc que le moment des forces appliquées soit nul.