

Le phénomène d'oscillation est extrêmement important en physique, il intervient dans de nombreux phénomènes. Par exemple, il permet de comprendre les pendules, les horloges et les montres, pour mesurer le passage du temps. Il est aussi associé aux phénomènes de vibration et de résonance, qui jouent un grand rôle dans de nombreux dispositifs industriels. Il intervient en physique atomique et permet de comprendre les ondes. En fait, il est extrêmement général et permet de comprendre aussi bien l'évolution couplée d'une population de proies/prédateurs (lapins/renards) que certaines caractéristiques du trafic routier.

Dans un cours de physique, on étudie généralement les oscillateurs uniques, puis les oscillateurs couplés, puis la propagation des ondes dans un milieu continu. Nous allons ici aborder la première étape.

1 Ressort

Un ressort exerce une force proportionnelle à son allongement. On introduit la **constante de raideur** du ressort, souvent notée k , ainsi que la **longueur à vide** ℓ_0 , qui est la longueur du ressort lorsqu'on n'essaie pas de l'allonger ou le comprimer. Si on change la longueur du ressort, la force exercée par le ressort s'écrit

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$$

où $\vec{u}$ désigne un vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort. En compression, $\ell - \ell_0 < 0$ et la force est dirigée dans le sens de $\vec{u}$, et en extension, $\ell - \ell_0 > 0$ et la force est dirigée dans le sens contraire de $\vec{u}$.

2 Oscillateurs mécaniques libres

Certains systèmes peuvent se mettre à osciller quand on les déplace depuis une position d'équilibre. Ce sont des oscillateurs. Quand le système est perturbé à un instant donné puis relâché, livré à lui-même, on parle d'**oscillateur libre**. Quand il est soumis à une perturbation de façon continue, on parle d'**oscillateur forcé**.

2.1 Système masse-ressort sans frottement

Considérons une masse accrochée au bout d'un ressort horizontal, le tout étant posé au sol. La masse est soumise à trois forces, son poids $\vec{P}$, la réaction du support $\vec{R}$ (verticale) et la force $\vec{F}$ exercée par le ressort. La RFD indique que

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

soit en composantes

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation du mouvement selon x s'écrit donc

$$m\ddot{x} + k(x - x_0) = 0 \quad (4.1)$$

en choisissant l'origine des x en x_0 , cette équation se réécrit

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4.2)$$

On la réécrit sous la forme

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (4.3)$$

où $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ est appelé la **pulsation propre**. Le mouvement est alors décrit par

$$\boxed{x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t} \quad (4.4)$$

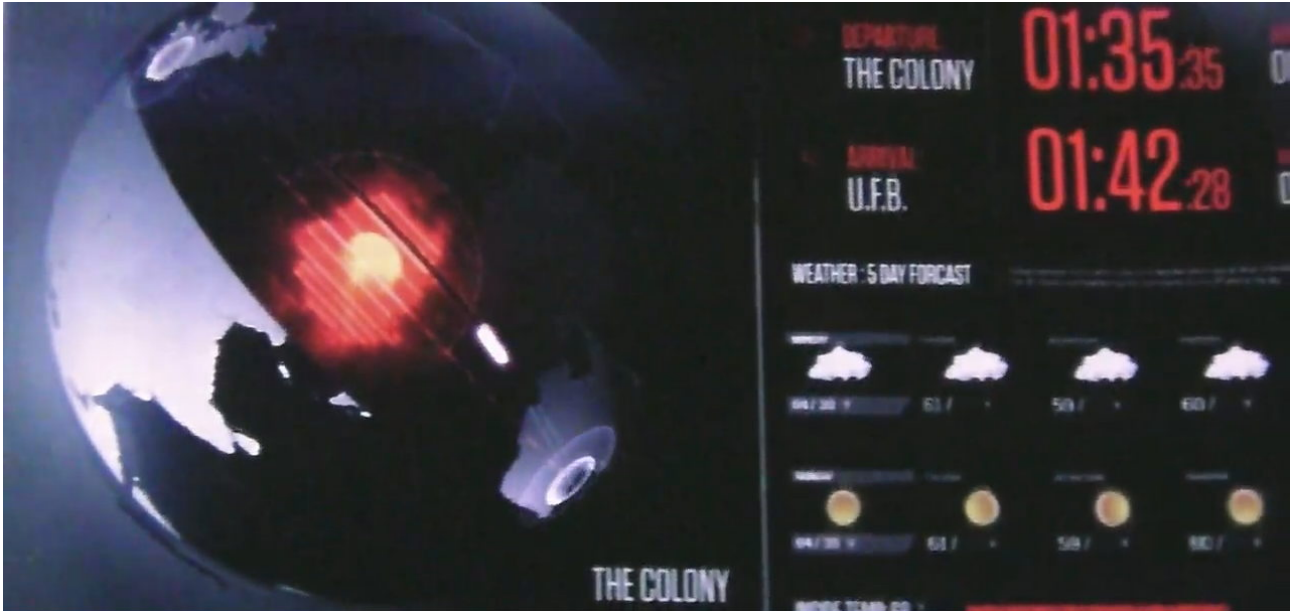
On détermine les constantes A et B en utilisant les conditions initiales. Par exemple, si $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0$, on a

$$0 = A \quad \text{et} \quad v_0 = \omega_0 B \quad (4.5)$$

On trouve donc que

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (4.6)$$

2.2 Chute libre à travers la Terre



D'après le théorème de Gauss, un corps de masse m en train de chuter dans un tunnel qui traverserait la Terre de part en part ressent une force gravitationnelle donnée par

$$F = \frac{GmM(r)}{r^2} \quad \text{où} \quad M(r) = \frac{4\pi\rho r^3}{3} \quad (4.7)$$

et donc l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi\rho G}{3} \times r \quad (4.8)$$

soit

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^3}} \quad (4.9)$$

Application numérique : $\omega \approx 1,23 \times 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui donne une période de $T = 2\pi/\omega = 5 \times 10^3 \text{ s}$. Le corps met une demi-période pour traverser la Terre, soit environ 40 minutes.

2.3 Système masse-ressort avec frottement fluide

Si on considère en plus une force de frottement fluide, l'équation du mouvement s'écrit, en choisissant l'origine des x en x_0 ,

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad (4.10)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau_a} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.11)$$

où l'on a défini le taux d'amortissement

$$\tau_a \equiv \frac{\alpha}{m}$$

2.4 Résolution de l'équation différentielle

Équation générale

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad \text{avec} \quad a = 1/\tau_a \quad \text{et} \quad b = \omega_0^2 \quad (4.12)$$

On cherche une solution de la forme

$$x = Ae^{\beta t} \quad (4.13)$$

ce qui donne

$$\beta^2 x + a\beta x + bx = 0 \quad \text{soit} \quad \beta^2 + a\beta + b = 0 \quad (4.14)$$

C'est une équation sur l'inconnue β . On calcule le discriminant

$$\Delta = a^2 - 4b \quad (4.15)$$

Il existe trois types de solutions, selon que $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$. On définit le **facteur de qualité** $Q \equiv \omega_0\tau$.

Régime apériodique (très amorti) Quand $\Delta > 0$ (frottements forts, $2\omega_0\tau < 1$ soit $Q < 1/2$), la solution s'écrit

$$\beta = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \quad \text{soit} \quad x = e^{-at/2} \left\{ Ae^{\sqrt{a^2 - 4b}t/2} + Be^{-\sqrt{a^2 - 4b}t/2} \right\} \quad (4.16)$$

On pose

$$\frac{1}{\tau} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = \sqrt{\frac{1}{4\tau_a^2} - \omega_0^2} = \frac{2}{\tau_a} \sqrt{1 - 2\omega_0^2\tau_a^2} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \quad (4.17)$$

ce qui permet de réécrire la solution générale sous la forme

$$\boxed{x = e^{-t/2\tau_a} \left\{ Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau} \right\}} \quad (4.18)$$

On détermine les constantes A et B en utilisant les conditions initiales. Par exemple, si $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0$, on a

$$0 = A + B \quad \text{et} \quad v_0 = \omega \times (A - B) - \frac{1}{2\tau_a}(A + B) \quad (4.19)$$

On trouve donc que

$$A = -B = -v_0\tau \quad \text{et donc} \quad x = \frac{v_0}{\omega} \times e^{-t/2\tau_a} \times \sinh\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (4.20)$$

où l'on a introduit le **sinus hyperbolique** défini par

$$\sinh \equiv e^x - e^{-x}$$

Régime pseudo-périodique (oscillant) Quand $\Delta < 0$ (frottements faibles, $2\omega_0\tau > 1$ soit $Q > 1/2$), la solution s'écrit

$$\alpha = -\frac{a}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} \quad \text{soit} \quad x = e^{-at/2} \left\{ A e^{i\sqrt{4b - a^2}t/2} + B e^{-i\sqrt{4b - a^2}t/2} \right\} \quad (4.21)$$

On peut réécrire cette expression en introduisant une pulsation

$$\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{soit} \quad x = e^{-at/2} \{ A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \} \quad (4.22)$$

La pulsation ω est appelée **pseudo-pulsation**. On a alors

$$\boxed{x = e^{-t/2\tau_a} \{ A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t) \}} \quad (4.23)$$

De nouveau, on détermine les constantes A' et B' en utilisant les conditions initiales. Par exemple, si $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0$, on a

$$0 = A' \quad \text{et} \quad v_0 = \omega \times B' - \frac{1}{2\tau_a} A' \quad (4.24)$$

On trouve donc que

$$A' = 0 \quad \text{et} \quad B' = \frac{v_0}{\omega} \quad (4.25)$$

soit

$$x = \frac{v_0}{\omega} \times e^{-t/2\tau_a} \times \sin \omega t \quad (4.26)$$

Régime critique Quand $\Delta = 0$ ($2\omega_0\tau = 1$ soit $Q = 1/2$), la racine de l'équation caractéristique est double

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad (4.27)$$

Dans ce cas, la solution s'écrit

$$\boxed{x = e^{-at/2} (At + B)} \quad (4.28)$$

De nouveau, on détermine les constantes A et B en utilisant les conditions initiales. Par exemple, si $x(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0$, on a

$$0 = B \quad \text{et} \quad v_0 = A - \frac{a}{2} B \quad (4.29)$$

On trouve donc que

$$x = v_0 t \times e^{-t/2\tau} \quad (4.30)$$

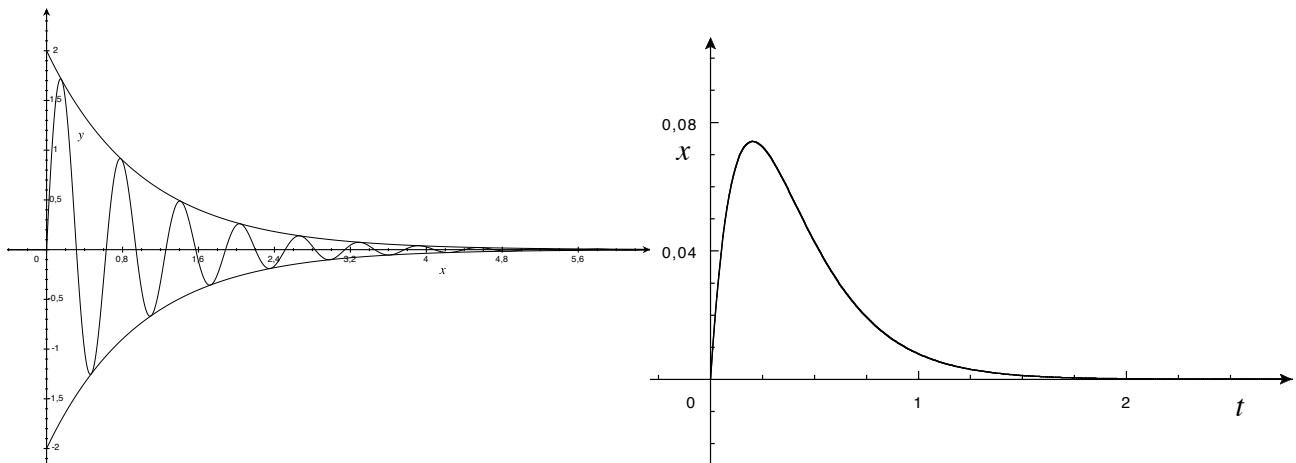


FIGURE 4.1: À gauche, régime oscillant ; à droite, régime fortement amorti.

2.5 Discussion

On voit le rôle de ω_0 et τ_a . Plus τ est faible, plus le système peut osciller longtemps. Ceci est souhaitable dans certaines applications (balancier d'horloge), mais pas dans d'autres (amortisseurs, instrument de mesure). Plus τ est important, plus le mouvement est contrarié, et plus les oscillations s'amortissent vite, et plus le déplacement maximal est faible. Là encore, c'est souhaitable dans certaines applications mais pas dans d'autres.

2.6 Pendule pesant

On a trouvé l'équation dans une section précédente, et pour les petites oscillations, l'approximation $\sin \theta \approx \theta$ conduit à l'équation des oscillateurs que nous venons d'étudier.

3 Oscillateurs mécaniques forcés – résonance

Considérons un oscillateur du type précédent, que l'on soumet à une excitation périodique. Il peut s'agir, par exemple, d'un ressort qui subit une force $F(t)$. On s'intéresse à une force sinusoïdale,

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \quad (4.31)$$

Attention, la pulsation Ω n'a rien à voir avec la pulsation propre ω_0 ni la pseudo-pulsation ω .

3.1 Système masse-ressort avec frottement fluide

L'équation du mouvement s'écrit

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \quad (4.32)$$

soit, en définissant $f \equiv F_0/m$, $\alpha/m \equiv 1/\tau$ et $\omega_0^2 = k/m$,

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = f \cos \Omega t \quad (4.33)$$

Cette équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, avec second membre, se résout en deux étapes :

- On cherche la solution générale de l'équation sans second membre : c'est ce qu'on a fait précédemment ;
- On cherche une solution particulière de l'équation complète, avec second membre.

La solution générale de l'équation complète est obtenue en sommant les deux solutions obtenues au cours de ces deux étapes.

3.2 Régime transitoire

La première étape donne une solution qui s'amortit au cours du temps et qui finit par s'atténuer complètement. C'est le **régime transitoire**. Nous allons maintenant nous intéresser au régime permanent.

3.3 Régime permanent – résolution de l'équation différentielle

On s'intéresse maintenant à la recherche d'une solution particulière de l'équation complète. On pourrait chercher des solutions de la forme

$$x = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \quad (4.34)$$

et déterminer les valeurs que doivent prendre A et B pour que x satisfasse l'équation du mouvement. Il est plus simple d'utiliser les nombres complexes. L'équation à résoudre est la partie réelle de l'équation complexe

$$\ddot{x} + \frac{x}{\tau} + \omega_0^2 x = f e^{i\Omega t} \quad (4.35)$$

On va plutôt résoudre celle-ci puis prendre la partie réelle à la fin. C'est parti. On cherche des solutions de la forme

$$x = x_0 e^{i\Omega t} \quad (4.36)$$

En remplaçant dans l'équation 4.35, et en utilisant le fait que

$$\dot{x} = i\Omega x \quad \text{et} \quad \ddot{x} = -\Omega^2 x,$$

on obtient

$$-\Omega^2 x_0 + i\frac{\Omega}{\tau} x_0 + \omega_0^2 x_0 = f \quad (4.37)$$

soit

$$x_0 = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega/\tau} \quad (4.38)$$

La solution complexe s'écrit donc

$$x(t) = \frac{f e^{i\Omega t}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\Omega/\tau} \quad (4.39)$$

La solution réelle est obtenue en prenant la partie réelle de cette équation. Pour l'obtenir, on multiplie la fraction par $(\omega_0^2 - \Omega^2) - i\Omega/\tau$ et on décompose l'exponentielle complexe en partie réelle et partie imaginaire,

$$x(t) = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) - i\Omega/\tau}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2/\tau^2} \times f \times (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) \quad (4.40)$$

soit

$$\mathcal{R}(x) = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + \Omega/\tau \sin \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2/\tau^2} \times f$$

ce qui se réécrit

$$\mathcal{R}(x) = \frac{f(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2/\tau^2} \cos \Omega t + \frac{\Omega f/\tau}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2/\tau^2} \sin \Omega t$$

On peut introduire $Q = \omega_0 \tau$,

$$\mathcal{R}(x) = \frac{f}{\omega_0^2} \times \frac{(1 - \Omega^2/\omega_0^2)}{(1 - \Omega^2/\omega_0^2)^2 + \Omega^2/Q^2\omega_0^2} \cos \Omega t + \frac{\Omega f}{Q\omega_0} \frac{1}{(1 - \Omega^2/\omega_0^2)^2 + \Omega^2/Q^2\omega_0^2} \sin \Omega t$$

La réponse est un mouvement sinusoïdal d'amplitude $|x_0|$, qui peut être déphasé par rapport à la force excitatrice.

3.4 Résonance

L'amplitude est donnée par

$$|x_0| = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2/\tau^2}} \quad (4.41)$$

On peut réécrire cette expression en introduisant $\zeta = \Omega/\omega_0$ et Q ,

$$|x_0| = \frac{f}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \zeta^2)^2 + \zeta^2/Q^2}} \quad (4.42)$$

La vitesse s'écrit

$$\dot{x} = i\Omega x_0 e^{i\Omega t} \equiv v_0 e^{i\Omega t} \quad (4.43)$$

où

$$|v_0| = \frac{f\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2/\tau^2}} \quad (4.44)$$

soit en introduisant ζ et Q

$$|v_0| = \frac{f\zeta}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \zeta^2)^2 + \zeta^2/Q^2}} \quad (4.45)$$

On peut calculer la condition sur Q pour que ces courbes passent par un maximum. Pour la courbe d'amplitude,

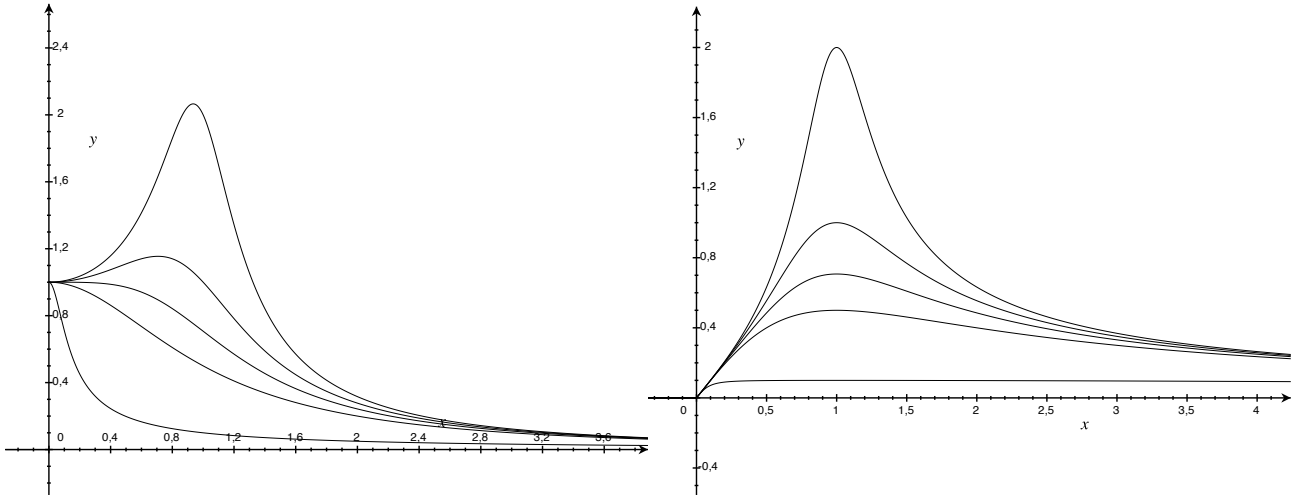


FIGURE 4.2: A gauche, résonance en amplitude ; à droite, résonance en vitesse.

il y a un maximum quand

$$\frac{d|x_0|}{d\zeta} = 0 \quad \text{soit} \quad -2\zeta(1 - \zeta^2) + \frac{2\zeta}{Q^2} = 0 \quad (4.46)$$

ce qui revient à

$$\zeta^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} = 0 \quad (4.47)$$

Ceci n'est possible que si $Q > 1/\sqrt{2}$. La résonance en amplitude a lieu pour une pulsation inférieure à la pulsation propre ω_0 .

Pour la vitesse, on montre qu'il y a toujours un maximum.

3.5 Déphasage

La réponse est déphasée par rapport à l'excitation. En effet, la partie réelle de

$$x = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega/\tau} \times e^{i\Omega t} \quad (4.48)$$

s'écrit

$$\mathcal{Re}(x) = |x_0| \cos(\Omega t + \phi) \quad (4.49)$$

avec

$$\tan(\phi) = \frac{\Omega/\tau}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad (4.50)$$

où ϕ est l'avance de la réponse par rapport à l'excitation (quand $\phi > 0$, la réponse a une phase nulle pour $t = -\phi/\Omega$, alors que l'excitation a une phase nulle pour $t = 0$, la réponse est donc bien en avance sur l'excitation).

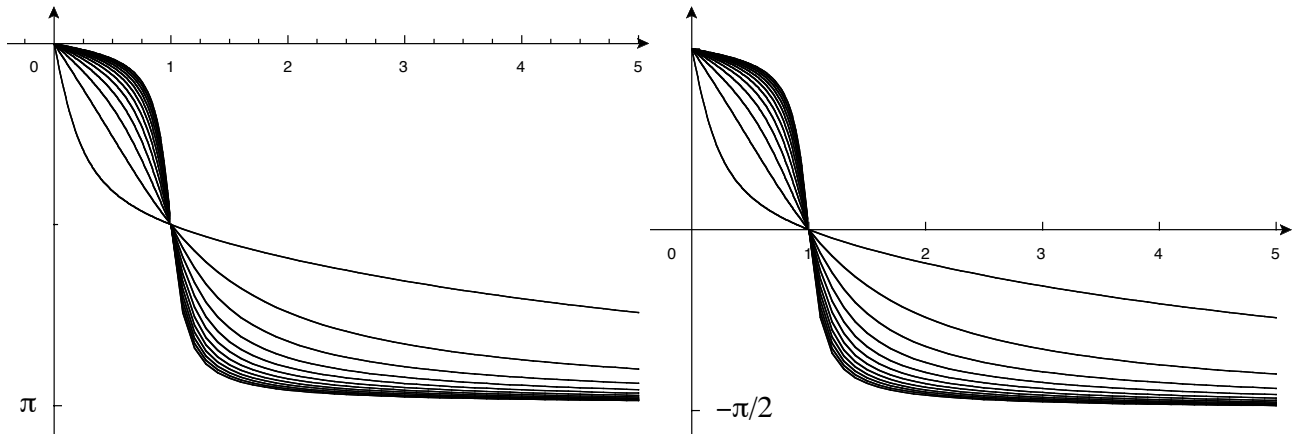


FIGURE 4.3: A gauche, résonance en amplitude ; à droite, résonance en vitesse.