

Miroirs sphériques – Dioptries sphériques

Nous allons maintenant aborder des systèmes optiques un peu plus complexes, couramment utilisés pour produire des images. Nous allons commencer par étudier un miroir sphérique de façon rigoureuse, sans faire d'approximation, mais assez rapidement nous serons amenés à restreindre les rayons incidents à ceux possédant certaines caractéristiques. Nous définirons alors les conditions de Gauss et nous nous placerons dans le cadre de l'optique paraxiale (nous définirons ces termes plus loin).

1 Miroirs sphériques

1.1 Introduction : focaliser la lumière

Nous avons mentionné plus haut que dans les dispositifs focalisants, un ensemble de miroirs plans peut être remplacé par un miroir courbe. La forme optimale pour focaliser des rayons parallèles en un point est la parabole (c'est la forme des antennes qui permettent de capter les signaux TV émis par les satellites).

Toutefois, il est beaucoup plus simple en pratique, et moins onéreux, de fabriquer des **miroirs sphériques**, qui permettent finalement d'arriver au même résultat, comme nous allons le voir dans ce chapitre.

Un miroir sphérique est une surface réfléchissante constituée d'une portion de sphère. On en rencontre deux types, les **miroirs concaves** pour lesquels la réflexion a lieu sur l'intérieur de la sphère, et les **miroirs convexes** pour lesquels la réflexion a lieu sur l'extérieur de la sphère. Ces miroirs présentent un intérêt particulier, car la sphère est une surface relativement facile à usiner avec précision.

1.2 Miroir concaves – faisceau parallèle

On considère un miroir sphérique de centre C et de rayon R , et on considère pour commencer un ensemble de rayons incidents parallèles. La figure suivante indique la marche d'un de ces rayons. Par symétrie, tous les rayons incidents correspondant à la même distance h (ils sont répartis sur un cylindre) sont réfléchis vers le même point A sur l'axe. Calculons la position de ce point A . La normale au miroir est confondue avec le rayon¹, c'est une propriété des sphères. D'après la loi de la réflexion, les angles \widehat{CMA} et \widehat{ACM} sont égaux, si bien que

¹On veut ici parler du rayon de la sphère. Pour éviter toute confusion entre la notion de rayon lumineux et celle de rayon de la sphère, nous utiliserons plutôt le terme « normale » dans le second cas.



FIG. 2.1: Un exemple de réflexion sur un miroir sphérique.

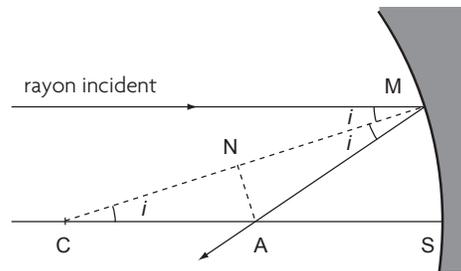


FIG. 2.2: Marche d'un rayon incident, avant et après réflexion sur un miroir sphérique convexe.

le triangle CAM est isocèle en A . Dans le triangle CAB , on voit immédiatement que

$$CA = \frac{R}{2 \cos i}$$

La position du point A dépend donc des rayons considérés, de l'angle i , ou de façon équivalente de la hauteur h . Le système ne fait pas converger l'ensemble de rayons parallèles vers un point bien défini. Il n'est pas stigmatique. Cependant, lorsque l'on considère des rayons lumineux proches de l'axe optique, l'angle i est faible et on a $\cos i \approx 1$ soit

$$CA \approx \frac{R}{2}$$

De manière plus précise, on peut utiliser les développements limités et écrire, lorsque i est petit,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

On obtient alors, à l'ordre 2 en i ,

$$CA \approx \frac{R}{2(1 - i^2/2)} = \frac{R}{2} (1 - i^2/2)^{-1} \approx \frac{R}{2} + \frac{Ri^2}{4}$$

Lorsque l'on considère des rayons lumineux proches de l'axe optique, l'angle i est faible et les rayons parallèles convergent tous vers un unique point F' , qui constitue par définition le **foyer image**

$$CF' = \frac{R}{2}$$

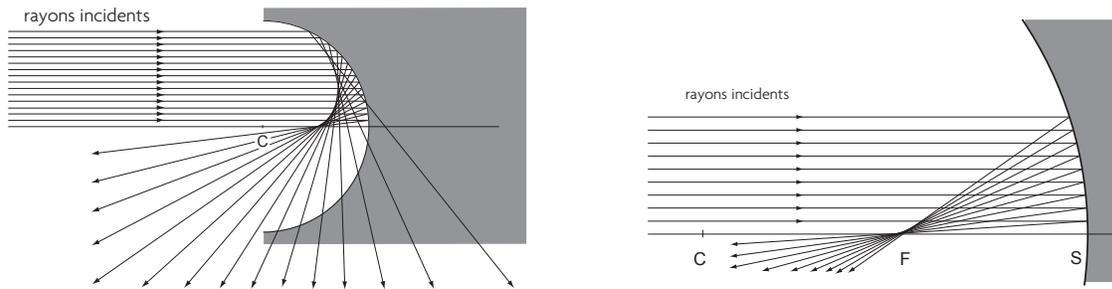


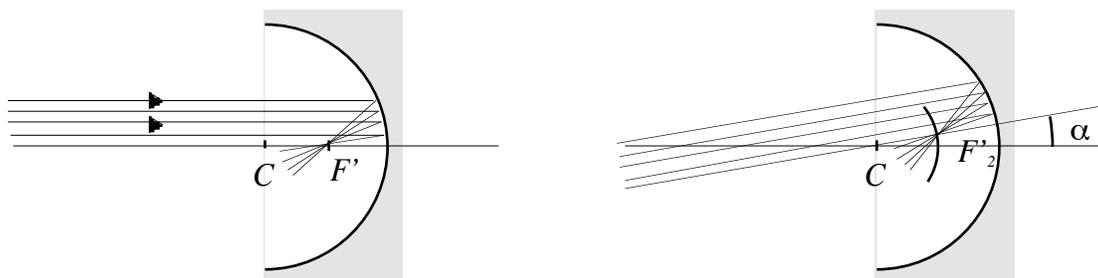
FIG. 2.3: marche des rayons réfléchis et leurs prolongements (à droite, zoom sur les rayons d'inclinaison relativement faible). **Mettre une photo de caustique vue dans une tasse de café ou une alliance dorée + même figure pour le miroir convexe.**

On peut donc utiliser un miroir sphérique pour concentrer la lumière d'un faisceau parallèle en un point, pourvu qu'on ne l'utilise qu'au voisinage de l'axe optique. On peut pour cela utiliser des **diaphragmes**, qui permettent de bloquer les rayons indésirables.

De la même façon, en utilisant la loi du retour inverse, on trouve que les rayons issus du point F' sont réfléchis en un faisceau parallèle par le miroir. Cette propriété définit le **foyer objet**, qu'on note généralement F . Dans le cas du miroir sphérique convexe, le foyer objet et le foyer image sont confondus, $F = F'$.

1.3 Miroir concave – faisceau parallèle incliné

Considérons maintenant un faisceau constitué de rayons venant de deux directions différentes (on étendra facilement les résultats à un cas encore plus général). On rajoute pour cela aux rayons précédents d'autres rayons, inclinés d'un angle α . En traçant un nouvel axe, incliné d'un angle α par rapport au premier et passant par C , on se retrouve exactement dans la situation précédente, et l'on sait que ces rayons inclinés vont converger en un point F'_2 situé au milieu du rayon correspondant, pourvu qu'ils soient assez proches de l'axe.



Les coordonnées de ce point F'_2 s'écrivent, dans un repère d'origine C ,

$$x = \frac{R}{2} \times \cos \alpha \quad \text{et} \quad y = \frac{R}{2} \times \sin \alpha$$

Lorsque les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique, l'angle α est petit et on peut remplacer les fonctions trigonométriques par leur développement limité au premier ordre en α , c'est-à-dire

$$x \approx \frac{R}{2} \quad \text{et} \quad y \approx \frac{R}{2} \times \alpha$$

Les rayons vont donc converger sur le plan d'équation $x = R/2$. Ce plan, perpendiculaire à l'axe optique et passant par le foyer image, est appelé **plan focal image**. On définit de même le **plan focal objet**. Ces deux plans sont confondus dans le cas du miroir sphérique. La taille de l'image dans le plan focal est donnée par :

$$A'B' = f'\alpha = \frac{R\alpha}{2} \quad (2.1)$$

Par exemple, la planète Jupiter ($\alpha \approx 3 \times 10^{-4}$ rad) vue à travers le miroir du télescope Hubble ($R \sim 60$ m) donne dans le plan focal une image de 9 mm de haut.

1.4 Miroir convexes

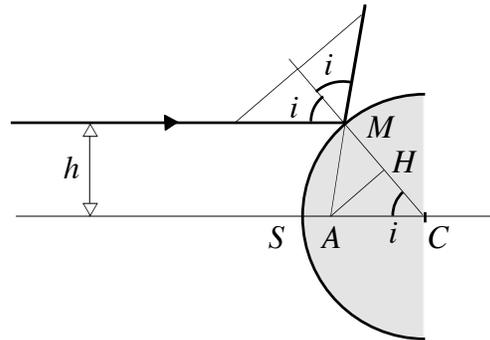


FIG. 2.4: Notations utilisées dans le cas du miroir convexe.

On peut reprendre l'ensemble de ce qui précède, dans le cas d'un miroir convexe. En se basant sur la figure précédente, on trouve de nouveau que

$$CA = \frac{R}{2 \cos i}$$

La distance CA est la même, mais le point A se trouve maintenant à gauche de C , alors qu'il était à droite de A dans le cas du miroir concave.

Grâce aux distances algébriques, on peut différencier entre les deux types de miroir d'après le signe de \overline{CS} . Un miroir est concave si $\overline{CS} > 0$ et convexe si $\overline{CS} < 0$.

On peut synthétiser les deux résultats précédents sous une forme unique

$$\overline{CA} = \frac{\overline{CS}}{2 \cos i}$$

On a donc dans les deux cas, pour la position du foyer image,

$$\overline{CF'} = \frac{\overline{CS}}{2}$$

Dans le cas du miroir convexe, l'image formée par des rayons incidents parallèle est virtuelle, et située derrière le miroir.

1.5 Les conditions de Gauss et l'optique paraxiale

Les deux conditions que nous avons invoquées, rayons proches d'un même axe et peu inclinés par rapport à cet axe sont appelées **conditions de Gauss**, et cet axe est appelé **axe optique**. Les rayons vérifiant les conditions de Gauss sont appelés **rayons paraxiaux**.

Une grande partie – sinon la totalité – de l’optique géométrique que vous étudierez cette année se place dans le cadre de ces conditions. On peut trouver agaçant de commencer un cours en se faisant des simplifications drastiques, et douter que l’on obtiendra ainsi quoi que ce soit d’utile. Si tel est le cas, c’est une grosse erreur ! L’optique paraxiale est adaptée à un grand nombre de situations pratiques, et permet de comprendre le fonctionnement et les propriétés de la plupart des instruments d’optique.

De plus, nous connaissons exactement les termes que nous avons négligés, ils sont d’ordre 2 en i et en α . Il est toujours possible de les prendre en compte pour calculer les déviations qu’ils donnent par rapport au cas paraxial.

Dans le cadre de cette approximation, on peut aussi considérer que l’ensemble du miroir est contenu dans un plan contenant le sommet. On représente alors les miroirs comme des plans aux bords arrondis, indiquant si le miroir est convexe ou concave. Ce n’est qu’une notation, et il ne faut pas appliquer les lois de la réflexion sur un miroir plan, mais les règles de construction géométriques énoncées plus haut.

Dans ce qui suit, on va s’appuyer sur une propriété très importante des systèmes optiques :

Dans les conditions de Gauss, les systèmes optiques possédant la symétrie de révolution sont approximativement stigmatiques.

C’est le cas notamment des miroirs sphériques considérés dans ce chapitre.

1.6 Objet à distance finie – construction géométrique des rayons

En utilisant la propriété de stigmatisme approché, on peut construire les rayons de façon purement géométrique. On peut se contenter pour cela d’utiliser deux des trois propriétés suivantes :

- Les rayons passant par le centre du miroir ne sont pas déviés ;
- Les rayons arrivant parallèles à l’axe optique convergent vers le foyer image ;
- les rayons issus du foyer objet repartent parallèles à l’axe optique.

Pour tout point objet, on construit deux de ces rayons et on en déduit la position de l’image. On en déduit

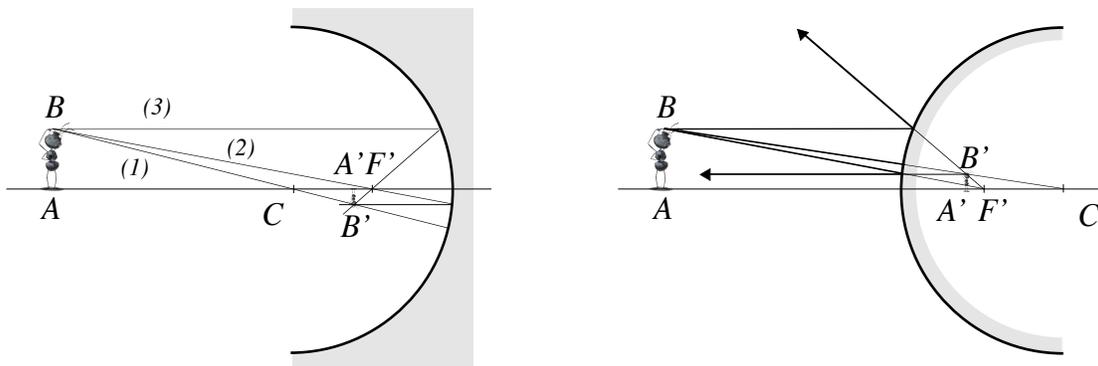


FIG. 2.5: Construction géométrique des rayons dans le cas d’un miroir concave et d’un miroir convexe.

la plupart des propriétés qui suivent. Dans les cas représentés ici, l’image est réelle et inversée pour le miroir concave, mais virtuelle et droite pour le miroir convexe. Ce n’est pas toujours le cas.

Pour le miroir concave, on peut distinguer deux cas. Quand l’objet est situé avant le foyer, son image est réelle, l’objet et l’image étant situés de part et d’autre du centre. Quand l’objet est situé après le foyer, son image est virtuelle et située derrière le miroir.

Pour le miroir convexe, on distingue aussi deux cas. Quand l’objet est situé avant le foyer, son image est réelle, l’objet et l’image étant situés de part et d’autre du centre. Quand l’objet est situé après le foyer, son

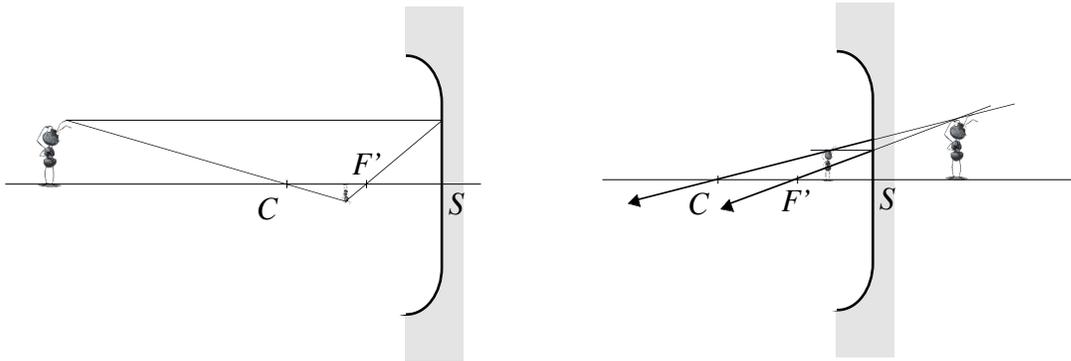


FIG. 2.6: Si l'objet est avant le foyer (figure de gauche), l'image est réelle et inversée. Si l'objet est entre le foyer et le sommet, l'image est virtuelle, droite, et située derrière l'image.

image est virtuelle et située derrière le miroir.

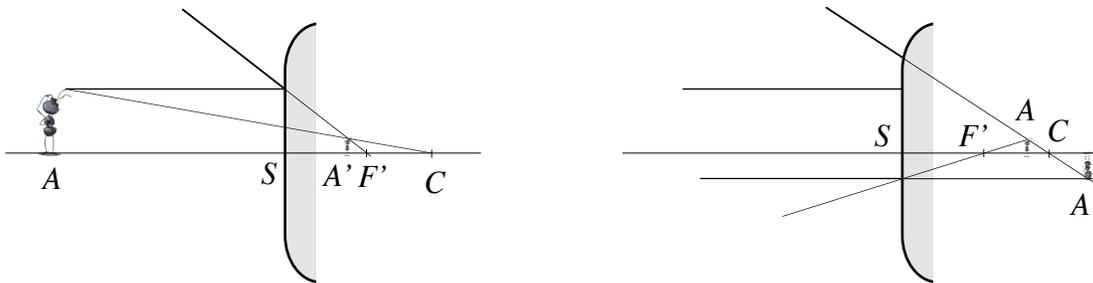


FIG. 2.7: Si l'objet A est avant le sommet (figure de gauche), l'image A' est virtuelle et située entre le sommet et le foyer. Si l'objet est virtuel et situé entre le sommet et le foyer, (toujours figure de gauche, où cette fois c'est A' qui joue le rôle d'objet), l'image A est réelle, et située avant le sommet. Si l'objet est virtuel et derrière le foyer (figure de droite) sommet, l'image est aussi virtuelle, inversée, et située derrière le foyer.

A ce stade, il est fortement recommandé de se munir d'une cuillère.

1.7 Expérience simple

► Rep. 6 Se regarder dans une cuillère à soupe, du côté concave et du côté convexe, et commenter.

1.8 Relation de conjugaison avec origine au sommet

Considérons un ensemble de rayons lumineux issus d'un point A situé sur l'axe optique, à une distance finie. On se place directement dans les conditions de Gauss. On a alors

$$h = SA \tan(\theta - i) = SA' \tan(\theta + i) = SC \tan \theta \quad (2.2)$$

Dans les conditions de Gauss, on peut assimiler les tangentes à leurs arguments, et

$$h = SA \times (\theta - i) = SA' \times (\theta + i) = SC \times \theta \quad (2.3)$$

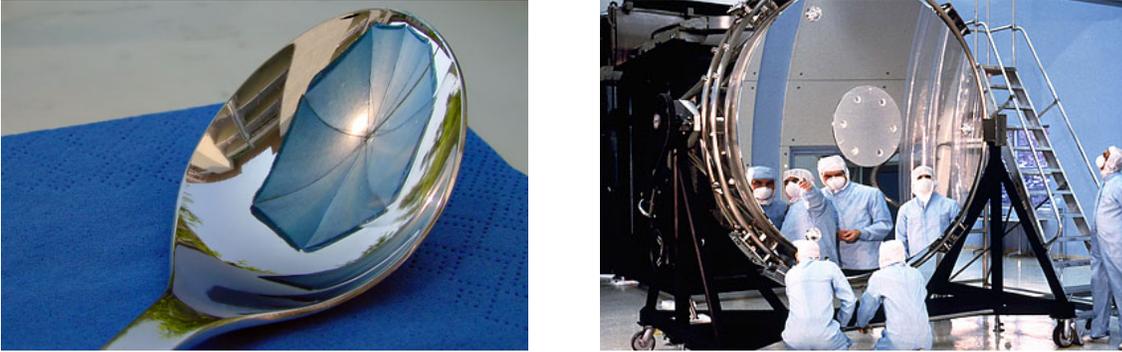


FIG. 2.8: A gauche, une cuillère permet de former une image d'un objet lointain. A droite, une grosse cuillère, le miroir du télescope spatial Hubble.

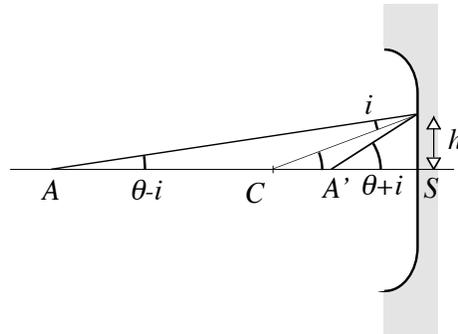


FIG. 2.9: notations utilisées dans le calcul de la relation de conjugaison

En éliminant i des deux premières équations, on arrive à

$$\theta - \frac{h}{SA} = -\theta + \frac{h}{SA'} \quad (2.4)$$

ce qui s'écrit finalement, en utilisant la dernière équation de 2.3 sous la forme $\theta = h/SC$,

$$\frac{h}{SA} + \frac{h}{SA'} = \frac{2h}{SC} \quad (2.5)$$

On s'aperçoit, et il s'agit là d'une étape *cruciale* dans le calcul, que l'on peut simplifier par h . Cette remarque d'ordre mathématique exprime en fait la condition de stigmatisme : la variable qui décrit le rayon que l'on a considéré disparaît du calcul, si bien que tous les rayons issus de A vont converger vers le même point A' (dans les conditions de Gauss). On a donc

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC} \quad (2.6)$$

Dans le cas que nous avons considéré, les points A , A' et C sont tous les trois situés à gauche de S , si bien que $SA = -\overline{SA}$, $SA' = -\overline{SA'}$ et $SC = -\overline{SC}$. On obtient la **relation de conjugaison avec origine au sommet**

$$\boxed{\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC} = \frac{1}{f'}} \quad (2.7)$$

Si l'on avait considéré une situation géométriquement différente, dans laquelle le point A est à droite de S , un calcul similaire montre que l'on obtient la même relation de conjugaison. Celle-ci est donc valable de façon générale.

Remarques :

- pour $A = C$, on a $A' = C$, le centre du miroir est sa propre image (il y a d'ailleurs stigmatisme rigoureux dans ce cas) ;
- cette relation est invariante par échange de A et A' . Si A' est l'image de A , alors A est l'image de A' .
- Si l'objet A est renvoyé à l'infini, $1/\overline{SA} \rightarrow 0$ et $\overline{SA'} = \overline{SC}/2 = \overline{SF'}$ si bien que l'image est située au foyer. On retrouve donc bien les résultats précédents (le contraire aurait été inquiétant).
- La formule de conjugaison permet de calculer la position de l'image en fonction de celle de l'objet.

Application bête : considérons un objet situé à 30 cm avant le sommet d'un miroir de 10 cm de rayon de courbure. On a donc $\overline{SA} = -30$ cm. Calculons la position de l'image pour chaque type de miroir. Pour un miroir concave, on a $\overline{SC} = -10$ cm et donc, en appliquant la formule de conjugaison,

$$\frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA}} = -\frac{2}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{30 \text{ cm}} = -\frac{1}{6 \text{ cm}} \quad (2.8)$$

on a donc $\overline{SA'} = -6$ cm, l'image se trouve à 6 cm devant le sommet. Pour un miroir convexe, on a $\overline{SC} = +10$ cm et un calcul similaire donne $\overline{SA'} = (30/7)$ cm $\approx 4,29$ cm, l'image est située à environ 4,29 cm en arrière du sommet.

La figure ?? représente la position de l'image en fonction de celle de l'objet.

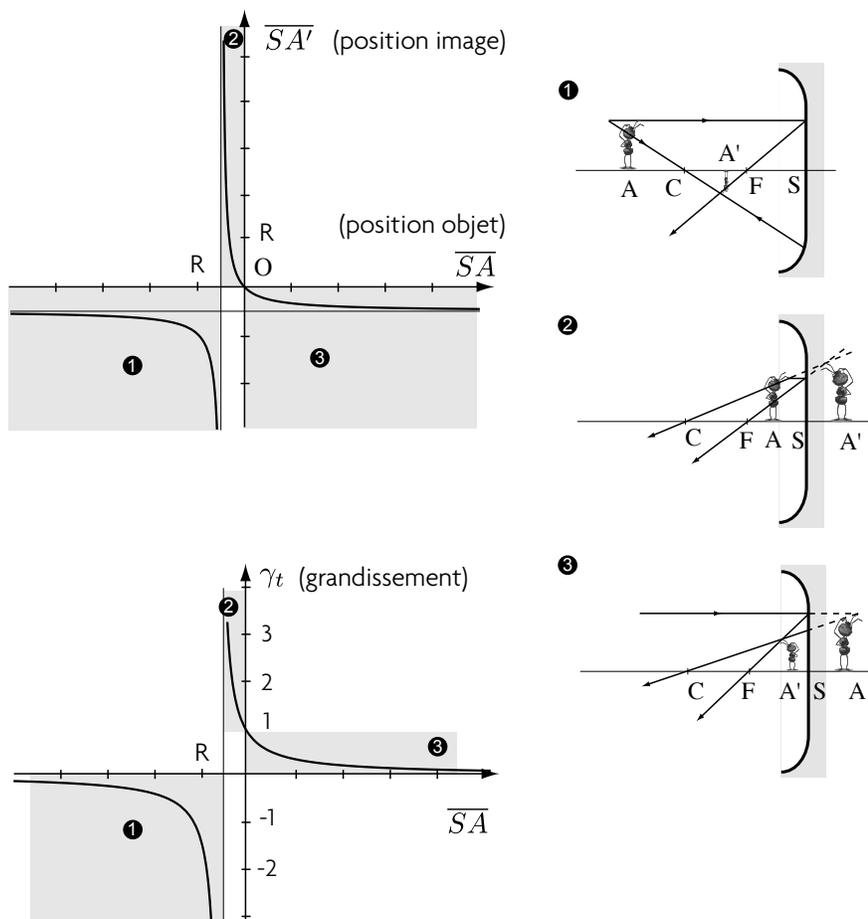


FIG. 2.10: Relations de conjugaison d'un miroir concave avec origine au sommet.

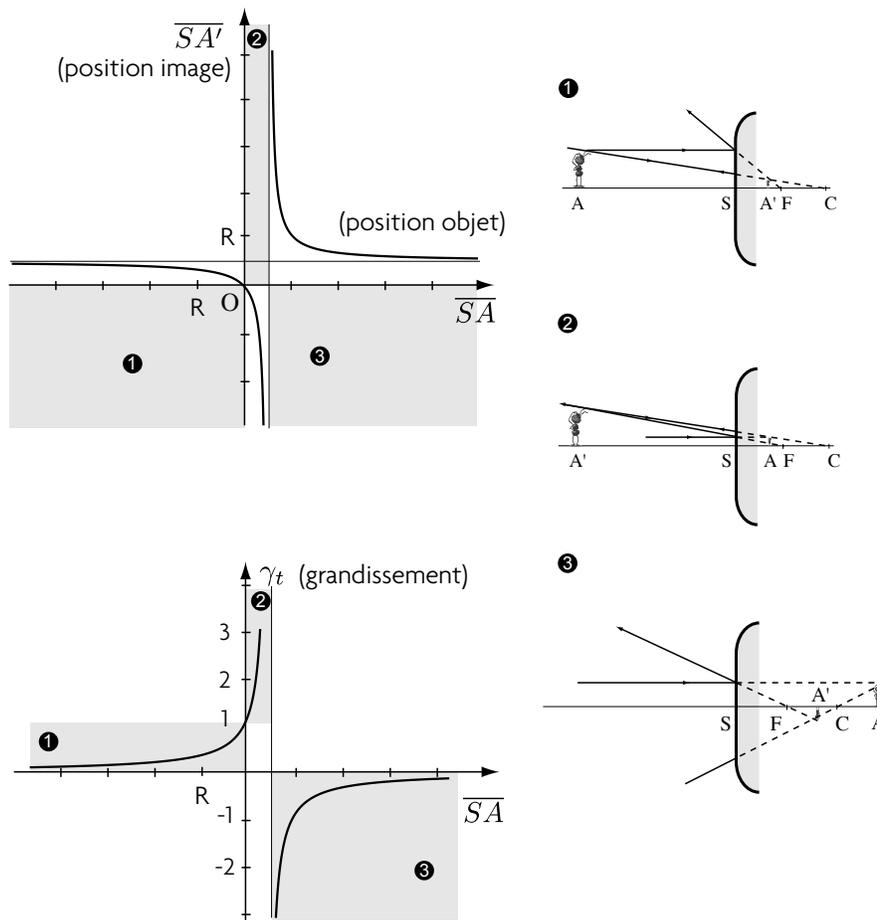


FIG. 2.11: Relations de conjugaison d'un miroir convexe avec origine au sommet.

1.9 Relation de conjugaison avec origine au centre

Il existe une relation analogue, dans laquelle la position des points est repérée par rapport au centre C au lieu du sommet S . On pourrait la démontrer en remplaçant dans la précédente \overline{CA} par $\overline{CS} + \overline{SA}$.

On peut aussi démontrer la relation précédente en retardant le plus possible le moment de se placer dans les conditions de Gauss, en se basant sur des propriétés géométriques. On utilise pour cela la relation fondamentale des triangles

$$\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB} \quad (2.9)$$

où les quantités \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} représentent les angles ayant pour sommet le point correspondant. Nous allons utiliser cette relation pour retrouver la formule de conjugaison. La principale difficulté vient du fait que la relation 2.9 fait intervenir des distances, alors que la formule finale fait intervenir des distances algébriques. Le passage de l'un à l'autre n'est pas compliqué, mais il fait intervenir plusieurs cas, selon que le miroir est convexe ou concave, et selon que le point A est à droite ou à gauche du centre C . Nous allons nous concentrer sur un seul cas, celui d'un miroir convexe ($\overline{CS} > 0$) et du point A situé avant C ($\overline{CA} < 0$).

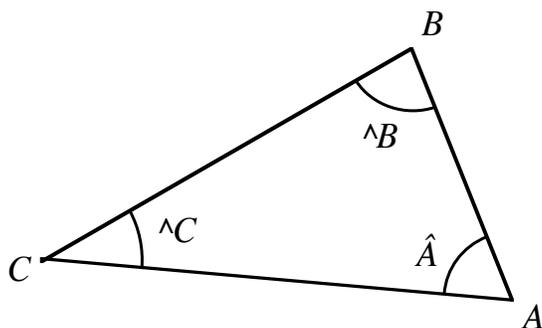


FIG. 2.12: Définition des notations \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} intervenant dans la relation fondamentale des triangles.

Dans la figure 2.9, les relations 2.9 appliquées au triangle ACM indiquent que

$$\frac{\sin(\theta - i)}{R} = \frac{\sin(i)}{CA}$$

Or, nous considérons la situation où $CA = -\overline{CA}$ et $R = \overline{CS}$, si bien que

$$\frac{\sin(\theta - i)}{\overline{CS}} = -\frac{\sin(i)}{\overline{CA}} \quad (2.10)$$

De même, dans le triangle CMA' , on a

$$\frac{\sin(\theta + i)}{R} = \frac{\sin(i)}{CA'} \quad \text{soit} \quad \frac{\sin(\theta + i)}{\overline{CS}} = \frac{\sin(i)}{\overline{CA'}} \quad (2.11)$$

puisque cette fois le point A' se trouve nécessairement à droite de C , si bien que $\overline{CA'} = CA'$. En développant les sinus selon

$$\sin(\theta + i) = \sin \theta \cos i + \cos \theta \sin i \quad (2.12)$$

les équations 2.10 et 2.11 se réécrivent, après simplification par $\sin i$,

$$\frac{\sin \theta \cotan i}{\overline{CS}} - \frac{\cos \theta}{\overline{CS}} = -\frac{1}{\overline{CA}} \quad \text{et} \quad \frac{\sin \theta \cotan i}{\overline{CS}} + \frac{\cos \theta}{\overline{CS}} = \frac{1}{\overline{CA'}}$$

En soustrayant ces deux équations, on arrive finalement à

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2 \cos \theta}{\overline{CS}}$$

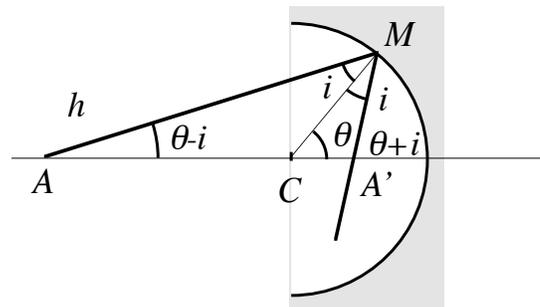
Dans les conditions de Gauss, on peut considérer que $\cos \theta \approx 1$, ce qui donne la **relation de conjugaison avec origine au centre**

$$\boxed{\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}}$$

On peut reprendre la même démarche dans le cas où le point A est situé à droite de C , et dans le cas du miroir convexe. On retrouve alors la même relation de conjugaison.

Retour sur l'application bête : On reprend le même cas que dans le paragraphe précédent, l'objet est situé à 30 cm devant le sommet d'un miroir de 10 cm de rayon de courbure. Pour un miroir concave, $\overline{CS} = 10$ cm et l'objet est à $\overline{CA} = \overline{CS} + \overline{SA} = -20$ cm. En appliquant la formule de conjugaison,

$$\frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{20 \text{ cm}} = \frac{1}{4 \text{ cm}} \quad (2.13)$$



on a donc $\overline{CA'} = 4$ cm, l'image se trouve à 4 cm derrière le centre. Pour un miroir convexe, un calcul similaire donne pour $\overline{CS} = -10$ cm et $\overline{CA} = \overline{CS} + \overline{SA} = -40$ cm la valeur $\overline{CA'} = -(40/7)$ cm $\approx -5,71$ cm, l'image est située à environ 5,71 cm en avant du centre. Ces deux résultats correspondent bien à ceux que l'on avait obtenus avec la formule de conjugaison avec origine au sommet.

1.10 Relations de conjugaison avec origine au foyer

Des manipulations géométriques dans les triangles dessinés dans la figure 2.5 conduisent à d'autres relations utiles. On a

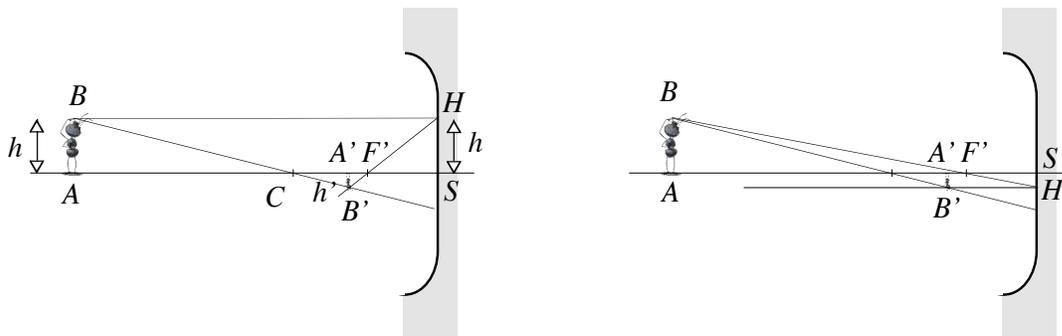


FIG. 2.13: Relation de conjugaison avec origine au foyer.

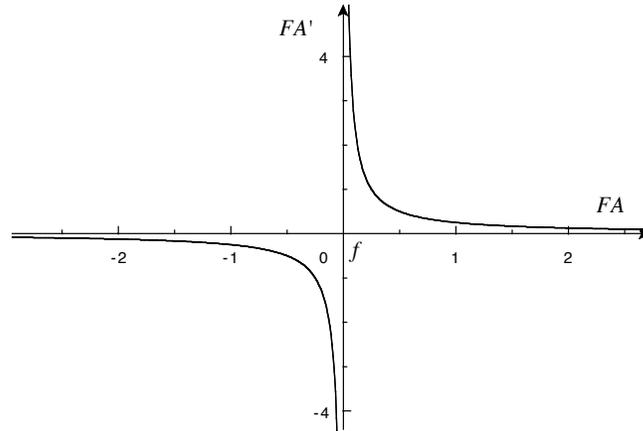
$$\frac{A'B'}{SH} = \frac{h'}{h} = \frac{FA'}{FS} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{SH'} = \frac{h}{h'} = \frac{FA'}{FS} \quad (2.14)$$

Ce qui donne la **relation de conjugaison avec origine au foyer**

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = f^2 \quad (2.15)$$

On l'appelle aussi **formule de Newton**. On remarque que \overline{FA} et $\overline{FA'}$ sont nécessairement de même signe, ce qui signifie que l'objet et l'image sont toujours du même côté de F (tous les deux à droite ou tous les deux à gauche).

Retour sur l'application bête : On reprend le même cas que dans le paragraphe précédent, l'objet est situé à 30 cm devant le sommet d'un miroir de 10 cm de rayon de courbure. On a donc $|f| = 5$ cm. Pour le miroir

FIG. 2.14: Relation entre \overline{FA} et $\overline{FA'}$.

concave, on a $\overline{FA} = \overline{FS} + \overline{SA} = -25$ cm. En appliquant la formule de conjugaison,

$$\overline{FA'} = \frac{f^2}{\overline{FA}} = \frac{(5 \text{ cm})^2}{-25 \text{ cm}} = -1 \text{ cm} \quad (2.16)$$

l'image se trouve à 1 cm devant le foyer. Pour un miroir convexe, un calcul similaire donne pour $\overline{FA} = \overline{FS} + \overline{SA} = -35$ cm la valeur $\overline{FA'} = -(5/7)$ cm $\approx -0,71$ cm, l'image est située à environ 0,71 cm en avant du foyer. Ces deux résultats correspondent bien à ceux que l'on avait obtenus avec la formule de conjugaison avec origine au sommet puis celle avec origine au centre.

1.11 Grandissement transversal

Le grandissement transversal est défini comme le rapport entre la taille de l'image et celle de l'objet. D'après les figures, on a

$$\gamma_t \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \quad (2.17)$$

ce qui, en utilisant les formules de conjugaison, donne

$$\gamma_t = \frac{1}{2\overline{CA}/\overline{CS} - 1} = \frac{1}{2\overline{SA}/\overline{CS} + 1} \quad (2.18)$$

Le grandissement est représenté en fonction de \overline{SA} sur les figures 2.10 et 2.11 pour les deux types de miroirs sphériques.

1.12 Autres relations

D'autre part, on a $\alpha \approx SH/SA$ et $\alpha' \approx SH/SA'$, si bien que $\alpha SA = \alpha' SA'$. En utilisant la relation de conjugaison,

Invariant de Lagrange-Helmholtz

$$\alpha \overline{AB} = -\alpha' \overline{A'B'} \quad (2.19)$$

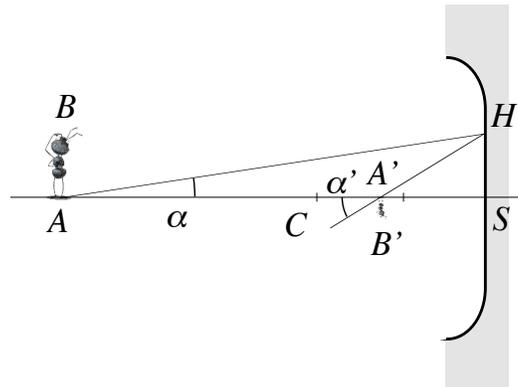


FIG. 2.15: Invariant de Lagrange-Helmholtz.

2 Dioptrés sphériques

Nous allons reprendre rapidement l'étude précédente dans le cas de la réfraction par un dioptré sphérique, séparant deux milieux d'indices différents. Nous n'allons pas y passer trop de temps, en nous concentrant sur les aspects qui seront les plus utiles dans la suite, quand nous étudierons les lentilles constituées de l'association de deux dioptrés réfractants.

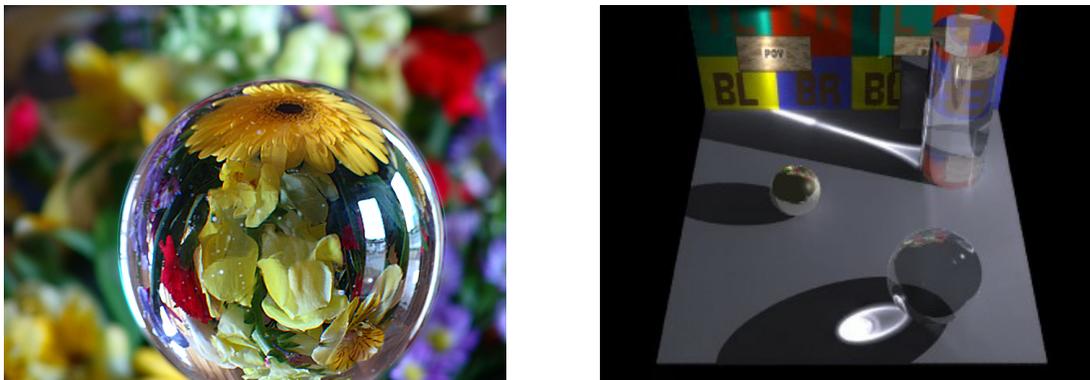


FIG. 2.16: A gauche, image d'une composition florale vue à travers une boule de verre (<http://www.wilsonhurst.com/blog/2006/02/refraction.php>). A droite, image de synthèse (POV-Ray).

2.1 Stigmatisme approché

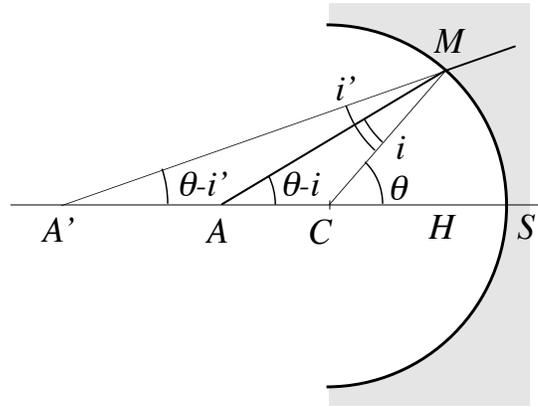
2.2 Formule de conjugaison avec origine au sommet

Dans la figure précédente, on a

$$HM = HA \tan(\theta - i) = HA' \tan(\theta - i') = HC \tan \theta \quad (2.20)$$



FIG. 2.17: marche des rayons réfractés et leurs prolongements, dans les différents cas de concavité et pour $n_1 > n_2$ et $n_2 > n_1$.



Dans les conditions de Gauss, le point H est confondu avec le point S et les angles sont petits. On a donc, en notant $h \equiv SM$ comme dans le cas des miroirs,

$$h = SA(\theta - i) = SA'(\theta - i') = SC\theta \quad (2.21)$$

ou encore

$$i = \theta - \frac{h}{SA} = \frac{h}{SC} - \frac{h}{SA} \quad \text{et} \quad i' = \theta - \frac{h}{SA'} = \frac{h}{SC} - \frac{h}{SA'} \quad (2.22)$$

La loi de Snell-Descartes $ni = n'i'$ se réécrit donc

$$n \left(\frac{h}{SC} - \frac{h}{SA} \right) = n' \left(\frac{h}{SC} - \frac{h}{SA'} \right) \quad (2.23)$$

On peut simplifier cette équation par h , ce qui traduit la propriété de stigmatisme approché : le résultat ne dépend pas du rayon lumineux particulier que l'on considère, tant que l'on est dans les conditions de Gauss. On arrive donc à

$$\frac{n}{SA} - \frac{n'}{SA'} = \frac{n - n'}{SC} \quad (2.24)$$

Dans la situation représentée sur la figure précédente, on peut remplacer les distances par des distances algébriques, $SA = -\overline{SA}$, $SA' = -\overline{SA'}$ et $SC = -\overline{SC}$, ce qui donne

$$\boxed{\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n - n'}{\overline{SC}}} \quad (2.25)$$

Il se trouve que cette expression est encore valable dans toutes les configurations, quels que soient les signes de \overline{SC} , \overline{SA} et $\overline{SA'}$.

2.3 Discussion

On en déduit plusieurs choses :

- Quand $\overline{SA} \rightarrow -\infty$ ou quand $\overline{SA} \rightarrow +\infty$, les rayons incidents sont parallèles, et l'image se forme au foyer, $A' \equiv F'$,

$$\boxed{\overline{SF'} = \frac{n'}{n' - n} \overline{SC}} \quad (2.26)$$

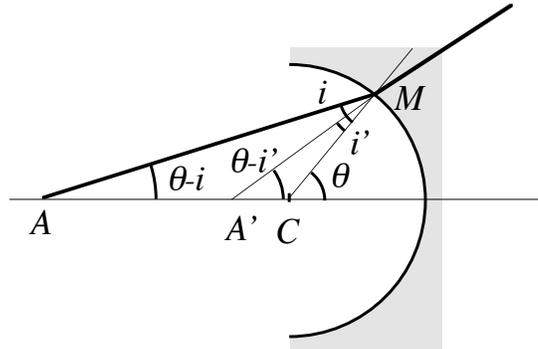
- Quand $\overline{SA'} \rightarrow +\infty$, ou quand $\overline{SA'} \rightarrow -\infty$, les rayons réfléchis sont parallèles, ce qui signifie qu'ils ont été émis par le foyer objet, soit $A \equiv F$.

$$\boxed{\overline{SF} = \frac{n}{n - n'} \overline{SC}} \quad (2.27)$$

- Les deux foyers ne sont plus confondus, contrairement au cas des miroirs sphériques.
- Quand $SC \rightarrow \infty$, on retrouve la relation du dioptre plan, $\overline{SA'} = (n'/n)\overline{SA}$.

2.4 Formule de conjugaison avec origine au centre

On peut reprendre la démarche suivie dans le cas des miroirs, en se basant sur la figure suivante. On trouve,



en se basant sur le triangle CMA' , que

$$\frac{\sin(\theta - i')}{R} = \frac{\sin(i')}{CA'} \quad \text{soit} \quad \frac{\sin(\theta - i')}{CS} = \frac{\sin(i')}{CA'}$$

On trouve une relation similaire dans le triangle CMA ,

$$\frac{\sin(\theta - i)}{CS} = \frac{\sin(i)}{CA}$$

Nous allons nous placer dès maintenant dans les conditions de Gauss, car les calculs exacts peuvent vite devenir lourds. On a alors

$$\frac{\theta - i}{CS} = \frac{i}{CA} \quad \text{et} \quad \frac{\theta - i'}{CS} = \frac{i'}{CA'}$$

soit

$$i \left(\frac{1}{CA} + \frac{1}{CS} \right) = \frac{\theta}{CS} \quad \text{et} \quad i' \left(\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CS} \right) = \frac{\theta}{CS}$$

ce qui s'écrit aussi

$$i \left(\frac{1}{CA} + \frac{1}{CS} \right) = i' \left(\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CS} \right)$$

Or les angles i et i' sont reliés par la loi de Snell-Descartes, et donc dans les conditions de Gauss, on peut remplacer i' par ni/n' , ce qui conduit à

$$n'i \left(\frac{1}{CA} + \frac{1}{CS} \right) = ni \left(\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CS} \right)$$

On peut simplifier par i . Comme dans le cas du miroir, cette étape est cruciale, elle traduit la propriété de stigmatisme, car la relation obtenue ne dépend plus du rayon lumineux considéré. On obtient alors, après réarrangement, la **relation de conjugaison avec origine au centre**

$$\boxed{\frac{n'}{CA} - \frac{n}{CA'} = \frac{n - n'}{CS}}$$

Nous avons montré cette relation dans un cas particulier, dans lequel les points A et A' sont situés à gauche de C et le dioptré est concave. Une étude des autres situations montre qu'elle est tout à fait générale.

2.5 Applications

Les dioptrés sphériques jouent un rôle important en optique, car ils sont utilisés dans les lentilles, comme nous allons le voir dans le prochain chapitre. On les rencontre aussi dans d'autres situations. Par exemple dans l'œil, l'interface entre la cornée et l'air constitue un dioptré sphérique qui contribue de façon importante à la formation des images sur la rétine. La vergence de ce dioptré est plus importante que celle du cristallin, ce qui signifie que la déviation des rayons lumineux dans l'œil est principalement due à ce dioptré sphérique. Les techniques chirurgicales modernes de traitement de la myopie altèrent la forme de ce dioptré.