

Théorème de Gauss

1 Rappel (ou pas) : flux d'un champ de vecteurs et angle solide

1.1 Notion intuitive de flux

Essayons de nous faire une image intuitive de la notion de flux. Nous la développerons et la formaliserons dans le paragraphe suivant.

Soit une rivière dont nous voulons mesurer le débit, c'est à dire le volume d'eau qui passe en un temps donné à travers une surface "détectrice" qui serait posée en travers du courant (figure 3.1).

Le débit dépend évidemment de la vitesse des particules qui composent le fluide. Nous supposons pour simplifier une vitesse constante et identique pour tous les volumes élémentaires d'eau. Pour commencer, considérons une petite portion de détecteur, de surface dS qui serait perpendiculaire au vecteur vitesse \vec{v} de l'eau.

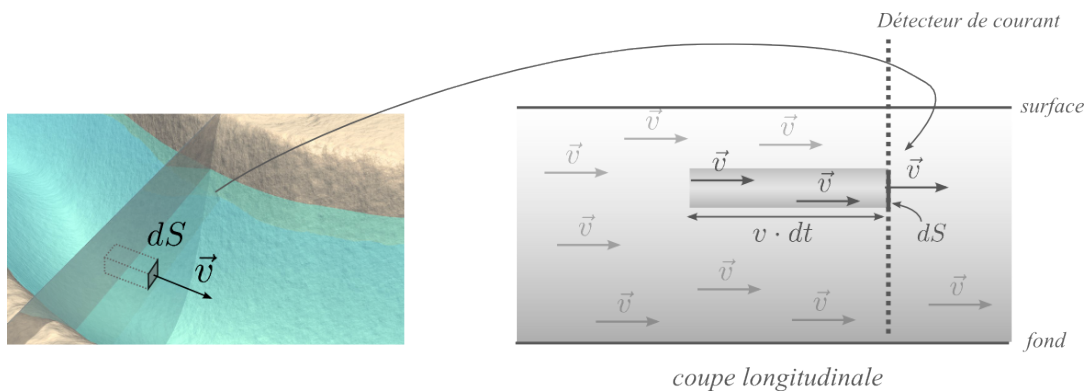


FIGURE 3.1

Le volume d'eau dV qui va traverser la surface dS pendant un temps dt nous donnera le débit à travers cette surface élémentaire. Ce sera donc un "débit élémentaire" $dD = \frac{dV}{dt}$ (on peut aussi prendre $dt = 1$ s et juste calculer le volume).

Pour calculer ce volume, il suffit de se dire que le dernier volume élémentaire qui traversera la surface dS sera celui qui aura juste la vitesse suffisante pour ce faire, c'est à dire celui qui parcourra la distance $dL = v \cdot dt$ et arrivera au niveau de dS juste avant la fin de l'intervalle de temps dt . Tous les éléments de volume qui sont

situés entre lui et la surface vont réussir à passer. Le volume dV sera donc $dV = dL \cdot dS = v \cdot dt \cdot dS$.

Pour obtenir le débit total du fleuve, il faut sommer (intégrer) le débit de l'eau passant par toutes les surfaces élémentaires dS qui constituent le détecteur.

Que se passe-t-il si le détecteur n'est plus perpendiculaire au courant, c'est à dire qu'il a un angle avec le vecteur vitesse \vec{v} ? Ce cas de figure est représenté sur le schéma 3.2

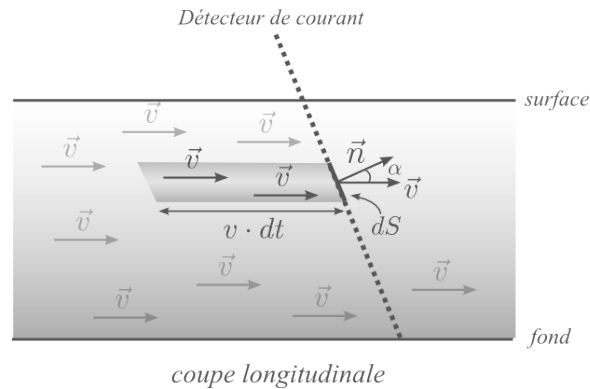


FIGURE 3.2

La longueur dL est toujours égale à $v \cdot dt$, mais la forme du volume dV a changé. On peut assez facilement voir que $dV = dS \cdot \cos \alpha \cdot dL = dS \cdot \cos \alpha \cdot v \cdot dt$. En effet, le cylindre (un cylindre n'a pas forcément une base circulaire) que constitue dV a maintenant une base dont la surface est $dS \cdot \cos \alpha$ (voir figure 3.3).

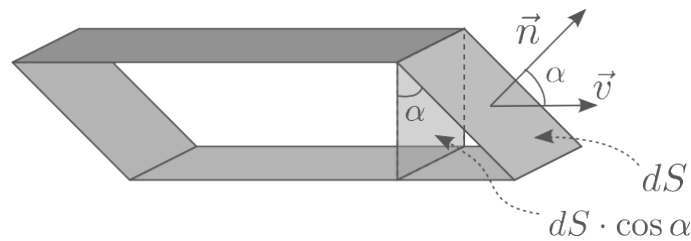


FIGURE 3.3

On peut remarquer que, si l'on considère le vecteur unitaire normal à la surface dS et appelé \vec{n} , on a $dS \cdot v \cdot \cos \alpha = dS \cdot \vec{n} \cdot \vec{v}$. Ce produit scalaire est appelé le flux du vecteur \vec{v} à travers la surface élémentaire dS .

Le débit élémentaire à travers dS peut alors s'écrire $dD = dS \cdot \cos \alpha \cdot v = dS \vec{n} \cdot \vec{v}$, c'est également l'expression du flux! Ceci n'est vrai que parce que nous cherchons le débit volumique (quel volume d'eau passe par unité de temps à travers notre détecteur). Si nous avions voulu un débit massique (quelle masse d'eau passe par unité de temps à travers notre détecteur), nous aurions multiplié le flux par la densité volumique de l'eau.



Outils mathématiques

1.2 Flux élémentaire

Nous allons généraliser la notion de flux aperçue précédemment. Soit un champ de vecteurs \vec{A} . On considère une surface élémentaire dS autour d'un point M d'une surface complète S (figure 3.4). La surface élémentaire est orientée, c'est à dire qu'on peut distinguer les deux faces : au dessus et en dessous ou bien intérieur et extérieur. On définit le vecteur unitaire \vec{n} normal à dS , et son sens définit l'orientation

de la surface. On définit également le vecteur surface élémentaire $d\vec{S} = dS.\vec{n}$.

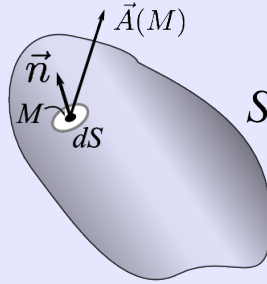


FIGURE 3.4: Flux élémentaire d'un champ \vec{A} à travers une surface $d\vec{S}$



Le **flux élémentaire** $d\Phi$ est le produit scalaire du vecteur champ défini au point M , $\vec{A}(M)$ avec le vecteur surface élémentaire $d\vec{S}$:

$$d\Phi = \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS \quad (3.1)$$

Si α est l'angle entre $\vec{A}(M)$ et \vec{n} , le flux élémentaire peut s'écrire $d\Phi = \|\vec{A}(M)\| \cos(\alpha) dS$. Comme $\|\vec{A}(M)\| > 0$ et $dS > 0$, on a trois cas en fonction de l'angle α :

- si $\vec{A}(M)$ est dirigé vers le même coté de la surface que \vec{n} , on a $d\Phi > 0$
- si $\vec{A}(M)$ est dirigé vers le coté opposé à \vec{n} , on a $d\Phi < 0$
- si $\vec{A}(M)$ est dirigé selon la surface, c'est à dire perpendiculaire à \vec{n} , on a $d\Phi = 0$

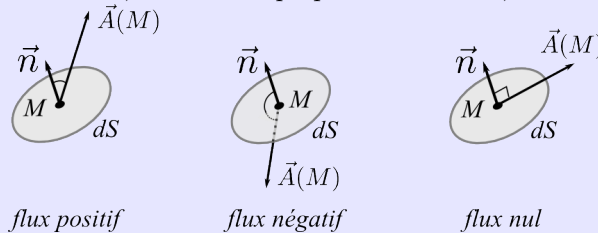


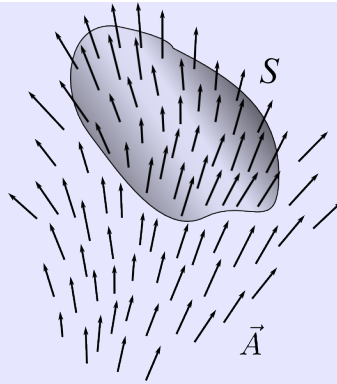
FIGURE 3.5: Signe du flux élémentaire d'un champ \vec{A} à travers une surface $d\vec{S}$

1.3 Flux total à travers une surface



Le flux total à travers une surface S est la somme des flux élémentaires :

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n}(M) dS \quad (3.2)$$

FIGURE 3.6: Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface S

Pour une surface fermée Σ , qui définit un volume intérieur V_Σ , on choisit d'orienter tous les vecteurs \vec{n} vers l'extérieur de V_Σ . Le flux est alors appelé "sortant".

1.4 Angle solide

La notion d'angle solide, très importante dans ce qui va suivre, mérite un petit rappel. Il s'agit de l'extension de la notion d'angle à trois dimensions.

Mesure d'un angle α : soit un cercle de rayon R , la valeur de l'angle est le rapport entre la longueur s de l'arc de cercle intercepté par deux rayons séparés de cet angle et le rayon R : $\alpha = s/R$. Il est mesuré en radians (sans dimension).

Angle solide c'est l'extension à trois dimensions de la définition précédente : soit une sphère de rayon R , la valeur de l'angle solide Ω est le rapport entre la surface S de la sphère interceptée par le cône de sommet O (centre de la sphère) et le rayon R au carré : $\Omega = S/R^2$. Le cône n'est pas forcément un cône de révolution (voir figure 3.7). On peut voir l'angle solide comme la surface sur laquelle se projette un objet quelconque sur une sphère unité lorsqu'il est vu du centre de la sphère.

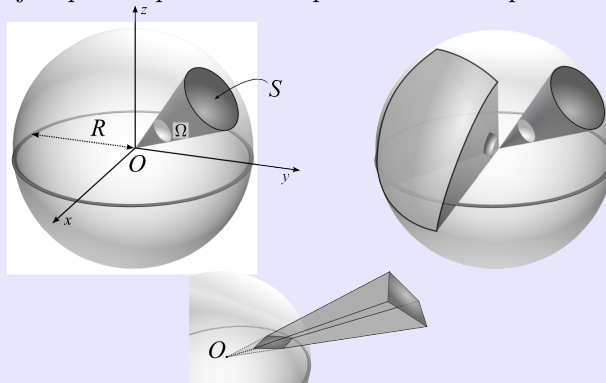


FIGURE 3.7: Définition de l'angle solide Ω (figure de droite). Si la sphère a un rayon $R = 1$, la valeur de l'angle solide est S . La figure de gauche illustre deux angles solides différents, pas uniquement avec un cône de révolution.

L'unité d'angle solide est le stéradian (noté "sr"), et il est sans dimension.

Cas élémentaire. Pour les utilisations qui vont suivre, nous avons besoin de définir l'angle solide élémentaire. Il s'agit de l'angle solide sous lequel on voit une surface élémentaire dS . Comme représenté sur la figure 3.8, cette surface est quelconque, dans cet exemple elle est inclinée d'un angle α par rapport à la perpendiculaire à la ligne de visée (représentée par le vecteur unitaire $\vec{u} = \overline{OM} / \|\overline{OM}\|$).

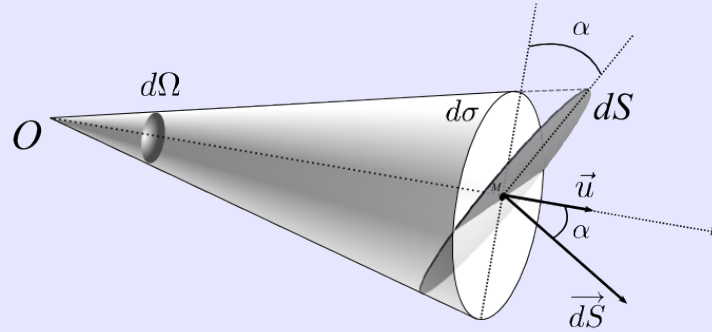


FIGURE 3.8: Angle solide élémentaire $d\Omega$ sous lequel on voit une surface dS qui est inclinée d'un angle α par rapport à la perpendiculaire à la ligne de visée \vec{OM} .

La projection de dS perpendiculairement à la ligne de visée est la surface $d\sigma$ et on a

$$d\sigma = dS \cdot \cos \alpha \quad (3.3)$$

On notera \vec{n} le vecteur unitaire perpendiculaire à dS , et $\vec{dS} = \vec{n} \cdot dS$ le vecteur surface élémentaire. Si on note $r = \|\vec{OM}\|$ la distance OM , l'angle solide élémentaire $d\Omega$ se calcule d'après la définition :

$$d\Omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos \alpha}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS}{r^2} \quad (3.4)$$



Recherche personnelle

Retrouver l'expression de l'angle solide délimité par un cône de révolution de $1/2$ angle au sommet θ

2 Théorème de Gauss

2.1 Approche intuitive

Coïncidences

Soit une charge ponctuelle Q située en M . Considérons une sphère \mathcal{S} centrée sur M et de rayon r . Cherchons à calculer le flux du champ créé par Q à travers la sphère \mathcal{S} . En un point P de la sphère, le champ électrostatique est dirigé radialement selon \vec{MP} . Pour une portion de surface élémentaire de \mathcal{S} , que nous appelons dS (voir figure 3.9), le vecteur normal \vec{n} est également radial. Donc le flux élémentaire autour d'un point M sur la sphère est

$$d\Phi = \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dS \quad (3.5)$$

car $\vec{u} = \frac{\vec{MP}}{\|\vec{MP}\|}$ et \vec{n} sont unitaires et colinéaires.

Si on somme tous les petits éléments de flux, il faut le faire sur l'ensemble de la sphère. On obtient

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{sphere} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$

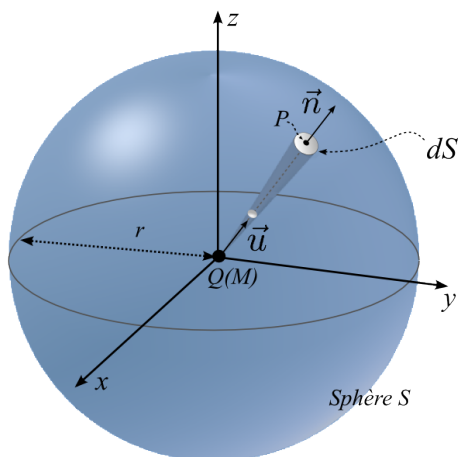


FIGURE 3.9: Illustration du flux élémentaire d'un champ électrostatique \vec{E} créé par une charge Q placée en M à travers une surface sphérique S

Car la surface de la sphère $\mathcal{S} = \int_{\text{sphère}} dS = 4\pi r^2$. Il est remarquable que l'expression du flux ne dépende pas de r , ce qui vient bien sûr de la dépendance du champ en $1/r^2$

Considérons maintenant une charge répartie uniformément sur un fil infini. Par des arguments de symétrie, que nous avons développé au chapitre 2, on montre que le champ électrostatique est perpendiculaire au fil (regardez bien la figure 3.13). Son intensité peut se calculer directement (vous le ferez sans doute en T.D.) et l'on obtient

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u} \quad (3.7)$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire perpendiculaire au fil dans la direction (fil - point M) et λ est la densité linéique de charge sur le fil.

Calculons, comme pour la sphère, le flux du champ à travers un cylindre centré sur le fil, de rayon r . On fait de ce cylindre une surface fermée en y ajoutant des bouchons (voir encore la figure 3.13). Le flux du champ est alors la somme des flux sur le cylindre et sur les bouchons :

$$\Phi = \iint_{S_{\text{surface cylindrique fermée}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_{\text{cylindre}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_{\text{bouchons}}} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Le vecteur $\vec{dS} = dS \cdot \vec{n}$ est toujours par définition normal à la surface. Sur les bouchons, il est donc colinéaire au fil et sur le corps du cylindre perpendiculaire au fil. Donc le produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{dS}$ est nul sur les bouchons et égal à $\vec{E} \cdot \vec{dS} = \|\vec{E}\| \cdot \|\vec{dS}\| = E \cdot dS$ sur le corps du cylindre, et ce quelque soit la position de la surface élémentaire dS . Le flux est donc

$$\Phi = \iint_{S_{\text{cylindre}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_{\text{cylindre}}} E \cdot dS = \iint_{S_{\text{cylindre}}} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot dS$$

L'élément de surface dS peut s'exprimer en coordonnées cylindriques le long du fil $dS = r \cdot d\theta \cdot dz$. Pour ce faire, on place un système d'axes cylindrique tel que l'origine soit sur l'un des bouchons. dz est un élément infinitésimal de l'axe z que nous plaçons le long du fil, θ est l'angle entre un axe x et la direction radiale du fil vers le point M où se trouve dS . Le flux est alors :

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{S_{\text{cylindre}}} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot r d\theta dz \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz\end{aligned}$$

où L représente la longueur du cylindre. Finalement, après intégration :

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad (3.8)$$

où λL n'est rien d'autre que la charge totale (densité linéique de charge multipliée par longueur) qui se trouve à l'intérieur de la surface.

Bref, on a une belle coïncidence où, dans deux cas différents (sphère autour d'une charge ponctuelle et cylindre autour d'un fil infini chargé), le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée définie autour d'un ensemble de charges est égal, à une constante près, à la charge totale contenue à l'intérieur de la surface.

Ceci n'est pas une coïncidence et nous allons le généraliser.

Modèle illustrant le théorème

Avant de nous attaquer frontalement à la démonstration, donnons un modèle qui nous permettra de raisonner ensuite par transposition.

Imaginons une source ponctuelle de grains de lumière (des photons) qui émet dans toutes les directions de façon isotrope (vous pouvez penser à la source comme à une étoile). Considérons une surface fermée quelconque \mathcal{S} qui entoure cette source. La source émet Q photons par seconde dans toutes les directions. Considérons une direction particulière définie par un vecteur unitaire \vec{u} et la surface élémentaire dS sur \mathcal{S} qui est "touchée" par des photons partant autour de la direction définie par \vec{u} . On suppose que dS est à une distance r de la source.

Si dS est perpendiculaire à \vec{u} , le nombre de photons qui touchent dS par seconde est :

$$dN = Q \cdot \frac{dS}{\text{surface de la sphère de rayon } r} = Q \cdot \frac{dS}{4\pi r^2} \quad (3.9)$$

Si la surface dS n'est pas perpendiculaire à la direction \vec{u} , nous avons le même problème que dans le cas du détecteur incliné mesurant le flux de courant d'une rivière (voir ci-dessus). Nous devons tenir compte de la surface dS projetée sur la direction perpendiculaire à \vec{u} . Le nombre de photons traversant dS est alors

$$dN = Q \cdot \frac{dS \cdot \cos(\theta)}{4\pi r^2} \quad (3.10)$$

Si l'on définit le vecteur $\vec{dS} = dS \cdot \vec{n}$ comme colinéaire au vecteur normale \vec{n} à la surface, on a $dS \cdot \cos(\theta) = \vec{dS} \cdot \vec{u}$ et

$$dN = Q \cdot \frac{\vec{dS} \cdot \vec{u}}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u} \cdot \vec{dS}$$

Le premier terme du produit, $\vec{G} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}$ ressemble furieusement à l'expression d'un champ électrostatique ! Il aura exactement les mêmes propriétés mathématiques.

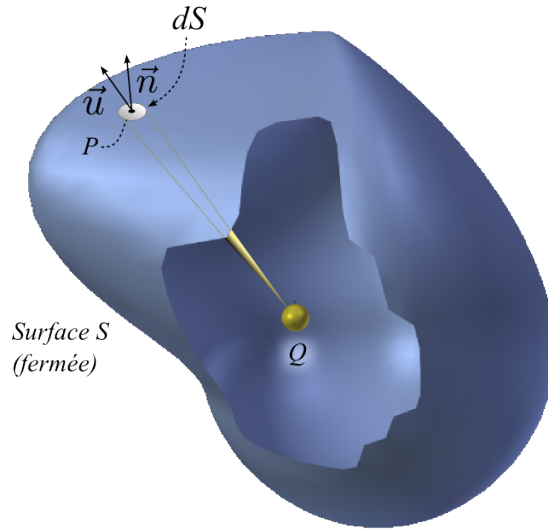


FIGURE 3.10: Modèle illustrant le théorème de Gauss. Une source lumineuse envoie des photons de façon isotrope avec un flux total Q . Une surface fermée S entourant entièrement la source est considérée. Sur la figure, on montre la surface écorchée pour des raisons de compréhension.

Si on appelle ce terme \vec{G} , le nombre de photons par seconde dN peut s'interpréter comme un flux élémentaire

$$dN = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u} \cdot \vec{dS} = \vec{G} \cdot \vec{dS} = d\Phi \quad (3.11)$$

Si on somme le nombre de photons par seconde sur toute la surface, on va obtenir le flux total à travers la surface, et puisqu'il n'y a qu'une seule source et qu'elle émet Q photons par seconde, et que la surface l'entoure entièrement, on doit retrouver ce nombre Q :

$$Q = \iint_{\text{surface}} dN = \iint_{\text{surface}} \vec{G} \cdot \vec{dS} = \Phi \quad (3.12)$$

On trouve de façon naturelle, que le flux du vecteur \vec{G} à travers une surface *quelconque* entourant la "charge" Q est égal à Q . La constante de proportionnalité est le temps pendant lequel on compte les photons qui passent, c'est à dire 1 s.

Et si la charge était à l'extérieur de la surface? Le flux est défini comme $\vec{G} \cdot \vec{dS}$ et \vec{dS} est un vecteur dirigé vers l'extérieur de la surface. Donc si \vec{G} est entrant et \vec{dS} sortant, le produit scalaire sera négatif. Autrement dit, on comptera négativement les photons qui entrent et positivement les photons qui sortent. Et comme la source est à l'extérieur de la surface, si un photon entre dans la surface, il doit en sortir. Le flux total de \vec{G} à travers la surface sera nul!

On peut continuer le raisonnement en posant plusieurs charges à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface, mais nous allons faire la démonstration rigoureuse.

2.2 Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Charge ponctuelle Q située en O . Champ en un point M (avec $\vec{u} = \overrightarrow{OM} / \|\overrightarrow{OM}\|$) :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad (3.13)$$

Flux élémentaire

Le flux du champ électrostatique à travers une surface élémentaire dS quelconque dont le centre est au point M est

$$d\Phi = \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot \vec{dS} \quad (3.14)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{dS}}{r^2} \quad (3.15)$$

On reconnaît dans le deuxième terme l'expression de l'angle solide élémentaire :

$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (3.16)$$

Important : l'expression du flux élémentaire ne dépend pas de l'orientation de la surface dS . Dit autrement, quelque soit la forme, l'orientation la distance r , le flux est le même si l'angle solide sous lequel on voit la surface est le même.

Flux à travers une surface quelconque

Soit une surface qui s'appuie sur une courbe fermée C et orientée de telle manière que les vecteurs normales à la surface soient définis. Pour la compréhension intuitive, on prendra une surface qui ne fait pas de "retours" ou qui n'est pas trop compliquée. Ceci n'a en fait aucune importance, comme on le verra plus loin.

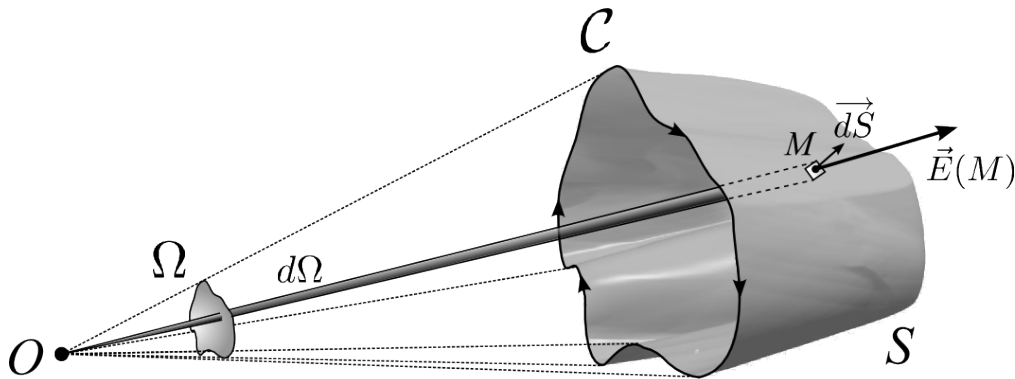


FIGURE 3.11: Illustration du flux élémentaire d'un champ électrostatique \vec{E} créé par une charge Q placée en O à travers une surface S s'appuyant sur un contour fermé C orienté et vue du point O

Le flux total du champ électrostatique à travers la surface S , créé par une charge Q située en O est la somme des flux élémentaires à travers les éléments de surface dS :

$$\Phi = \int_{M \in S} d\Phi = \int_{M \in S} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (3.17)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{M \in S} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (3.18)$$

où Ω est l'angle solide total sous lequel est vu le contour fermé C . Ce résultat ne dépend donc pas de la surface S .

Flux à travers une surface fermée

- **Si la charge Q est à l'intérieur** : l'angle solide sous lequel la charge voit la surface est l'angle solide maximal, de l'espace tout entier. C'est la surface d'une sphère unité (voir la définition de l'angle solide), c'est à dire $\Omega_{\text{espace}} = 4\pi \cdot 1^2 = 4\pi$.

Le flux est alors

$$\Phi_T = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_{\text{espace}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Le flux du champ électrostatique d'une charge Q à travers une surface fermée englobant la charge est

$$\Phi_T = \frac{Q}{\epsilon} \quad (3.19)$$

où ϵ est la permittivité électrique du milieu où existe le champ.

- **Si la charge Q est à l'extérieur** : Considérons un cône élémentaire s'appuyant sur un angle solide élémentaire $d\Omega$, partant du point O où se trouve la charge. Les surfaces élémentaires correspondant à l'intersection de ce cône avec la surface sont intéressantes. Si on calcule le flux du champ électrostatique à travers ces surfaces élémentaires ($d\Phi = \vec{n} \cdot \vec{E}(M) \cdot dS$ où \vec{n} est un vecteur unitaire normal la surface), on constate que ce flux est négatif lorsque le cône "entre" dans la surface et positif lorsqu'il en "sort" (c'est le signe de $\vec{n} \cdot \vec{E}$). De plus, ce flux élémentaire ne dépend que de l'angle solide $d\Omega$, comme vu quelques

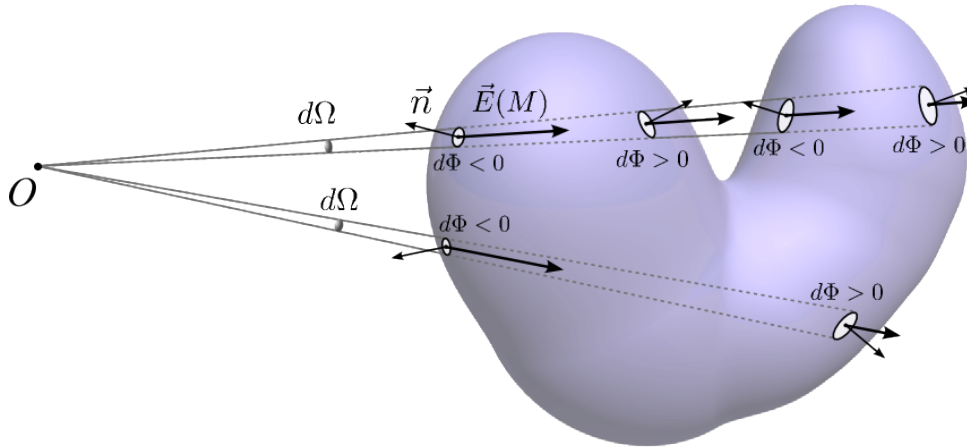


FIGURE 3.12

paragraphes au dessus : $d\Phi = \pm \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$. Le signe + ou - dépend de l'orientation respective de \vec{n} et \vec{E} . Donc un flux élémentaire "entrant" ($d\Phi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$) est exactement compensé par un flux élémentaire "sortant" ($d\Phi = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$). Enfin, on constate qu'un cône élémentaire dont le sommet est à l'extérieur de la surface "entre" et "sort" un nombre pair de fois (autant d'entrées que de sorties de la surface). Si n est le nombre d'entrées (ou de sorties), le flux total correspondant aux entrées est

$$d\Phi_e = n \cdot \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) d\Omega \quad (3.20)$$

et celui correspondant aux sorties

$$d\Phi_s = n \cdot \left(+\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) d\Omega \quad (3.21)$$

La somme correspondant à l'angle solide élémentaire $d\Omega$ est donc $d\Phi = d\Phi_e + d\Phi_s = 0$. Ceci est vrai quelque soit l'angle solide élémentaire considéré donc



Le flux total du champ électrostatique à travers une surface fermée S , créé par une charge qui est à l'extérieur de cette surface, est nul.

$$\Phi'_T = 0 \quad (3.22)$$

2.3 Flux du champ électrostatique créé par un ensemble de charges

Soit une surface S fermée, imaginaire ou non (elle n'a pas besoin d'exister physiquement) et un ensemble de charges, certaines à l'extérieur du volume délimité par la surface (notées q_i^{ext}), d'autres à l'intérieur (notées q_j^{int}). Le champ électrostatique créé en un point M de la surface est la somme vectorielle :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i^{ext} + \sum_j \vec{E}_j^{int} \quad (3.23)$$

Le flux total de \vec{E} à travers S peut s'écrire

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \int_{M \in S} \left[\sum_i \vec{E}_i^{ext} + \sum_j \vec{E}_j^{int} \right] \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{M \in S} \left[\sum_i \vec{E}_i^{ext} \right] \cdot d\vec{S} + \int_{M \in S} \left[\sum_j \vec{E}_j^{int} \right] \cdot d\vec{S} \\ &= \sum_i \int_{M \in S} \vec{E}_i^{ext} \cdot d\vec{S} + \sum_j \int_{M \in S} \vec{E}_j^{int} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Le flux total est donc la somme des flux totaux individuels dus à chaque charge. Les charges à l'extérieur donnant un flux nul et celles à l'intérieur un flux $\frac{q_j^{int}}{\epsilon_0}$, on a :

$$\Phi = \sum_i 0 + \sum_j \frac{q_j^{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (3.24)$$

où Q_{int} est la charge totale située à l'intérieur du volume délimité par la surface S .

Dans le cas continu, il faut remplacer les sommes discrètes par des intégrales. Par exemple si on a un volume chargé V_c , avec une densité de charge $\rho(P)$ où P est un point dans ce volume, le flux du champ électrostatique créé par cette distribution de charges est

$$\Phi_{vol} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_{P \in V_{int}} \rho(P) \cdot dV \quad (3.25)$$

On n'intègre que sur les charges à l'intérieur du volume délimité par la surface S . V_{int} est l'intersection entre ce volume et V_c .



Recherche personnelle

Ecrire les expressions correspondant à une surface chargée et un fil chargé. Que se passe-t-il si une charge est **sur** la surface de Gauss ?

2.4 Théorème de Gauss

Enoncé

D'après tout ce qui précède, le théorème de Gauss s'énonce :



Le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface S quelconque dans le vide est égal à la somme des charge intérieures au volume délimité par S divisé par la permittivité ϵ_0

$$\Phi = \int_{P \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{intérieures}}}{\epsilon_0} \quad (3.26)$$

Utilité

Soit une distribution donnée de charges. On recherche la valeur du champ électrostatique en un point M . Si on peut choisir une surface (fictive) S_G passant par M et pour laquelle le flux du champ est facile à calculer, le calcul du champ en M devient très simple. S_G est appelée "surface de Gauss". *Cette surface, c'est vous qui la choisissez, ce n'est pas forcément une surface qui contient des charges. Le théorème de Gauss est valable quelle que soit la surface choisie, aussi farfelue soit-elle. D'accord, si elle est trop farfelue ou mal adaptée, il sera difficile de calculer le flux du champ à travers elle.*

On choisit la surface de Gauss en fonction des symétries du problème et souvent telle que le champ \vec{E} soit perpendiculaire à la surface ou parallèle à celle-ci. Dans ce cas

– si $\vec{E} // d\vec{S}$ pour tout $d\vec{S}$: le flux élémentaire est simplement $\vec{E} \cdot d\vec{S} = \|\vec{E}\| \cdot \|d\vec{S}\| = E \cdot dS$ et le flux total

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \quad (3.27)$$

et pour peu que la norme du champ soit constante $E = E_0$, on a

$$\Phi = E_0 \cdot \int_S dS = E_0 \cdot S_{//} \quad (3.28)$$

où $S_{//}$ est la portion de surface sur laquelle on a effectivement $\vec{E} // d\vec{S}$.

Les surfaces qui satisfont à cette condition sont généralement les équipotentielles.

– si $\vec{E} \perp d\vec{S}$, le produit scalaire $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ et donc le flux total sur la surface correspondante aussi.

Méthode

Une fois démontré, on utilise toujours le théorème de Gauss de la même manière.

- Déterminer les éléments de symétrie du système
- En déduire et déterminer la forme des lignes de champ et équipotentielles. Il s'agit d'avoir une idée des paramètres dont dépend le module du champ et sa direction.

- On cherche le champ en un point. Choisir une surface de Gauss passant par ce point et qui passe en totalité ou partiellement sur une équipotentielle. Le module de \vec{E} sera alors constant sur cette surface.
- Fermer la surface si nécessaire avec une portion de surface sur laquelle le champ est parallèle à la surface ($\vec{E} \perp d\vec{S}$).
- Calculer le flux de \vec{E} sur la surface totale fermée
- Calculer la charge totale située à l'intérieur de la surface
- Appliquer le théorème de Gauss pour trouver le module du champ au point choisi au départ.
- En déduire le potentiel électrostatique.

Un exemple montrera le principe.

3 Applications

3.1 Champ créé par un fil infini

On suppose un fil infini chargé avec une densité linéique de charge constante λ .

Symétries du système

Le fil étant infini, le système a une symétrie cylindrique. Deux points situés à la même distance perpendiculaire r du fil verront un champ de même module E et dirigé du fil vers le point M considéré si la charge du fil est positive. Ce champ est radial $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_r$.

les surfaces équipotentielles sont donc des cylindres infinis de rayon r et d'axe le fil.

Choix de la surface de Gauss

Le choix de la surface de Gauss s'impose de lui-même : c'est un cylindre de rayon r passant par le point d'intérêt M , d'axe le fil et de hauteur h . On ferme ce cylindre par des "bouchons" qui sont des disques perpendiculaires au fil. Comme \vec{E} est radial, il est perpendiculaire aux éléments de surface des bouchons et donc son flux sera nul à travers ceux-ci.

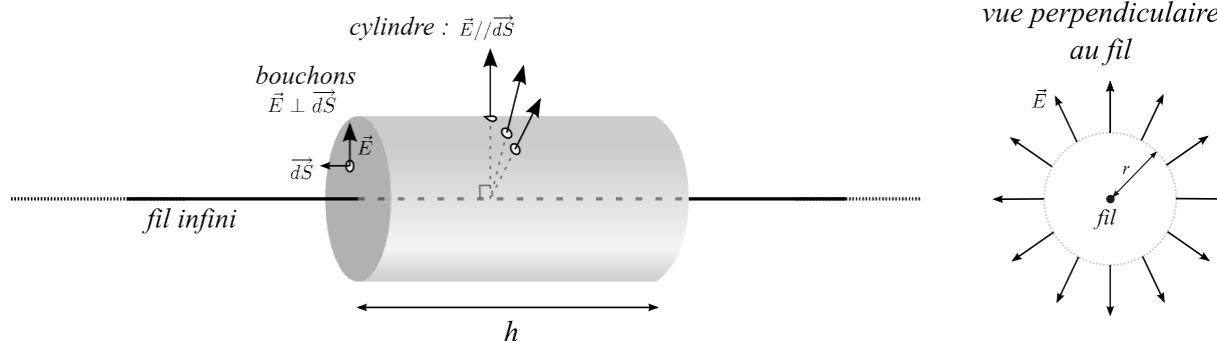


FIGURE 3.13

Calcul du flux à travers la surface de Gauss

Le flux se décompose en trois parties : celui à travers le cylindre et ceux correspondant aux bouchons de chaque coté du cylindre. Nous avons vu qu'à travers les bouchons, on a $\vec{E} \perp \vec{dS}$ et donc le flux est ici nul. Le flux est donc uniquement celui à travers le cylindre :

$$\Phi = \int_{S_{cylindre}} \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

et comme sur ce cylindre $\vec{E} // \vec{dS}$, avec $\|\vec{E}(r)\| = E(r)$ norme constante en fonction des coordonnées cylindrique (θ, z) , le flux s'écrit

$$\Phi = \int_{S_{cylindre}} E(r) \cdot dS = E(r) \cdot \int_{S_{cylindre}} dS$$

L'intégrale n'est rien d'autre que l'aire du cylindre $S_{cylindre}$ donc le flux est :

$$\Phi = E \cdot S_{cylindre} = E(r) \cdot 2\pi r \cdot h$$

Application du théorème de Gauss

Le flux calculé plus haut est égal à la charge intérieure à la surface de Gauss divisée par ϵ_0 (théorème de Gauss). La charge est répartie sur le fil avec une densité linéique λ . Donc la charge totale intérieure à la surface est $Q_{int} = \lambda \cdot h$ avec h la longueur de la partie du fil intérieure à la surface. On a donc

$$\Phi = E(r) \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0}$$

et donc la norme du champ ne dépend que du rayon et s'écrit

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

On remarque que le champ est défini partout sauf sur le fil.

Calcul du potentiel

à faire en TD (?). Résultat :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$