4

Champ magnétique

1 Notions préliminaires

1.1 Courant électrique et densité de courant

Un courant électrique est défini par un déplacement de charges électriques élémentaires (ex : les électrons de conduction dans un métal)

L'intensité d'un courant est liée au débit (flux) des charges en mouvement. Pour mesurer le débit d'un fleuve (en $m^3 s^{-1}$ dans le S.I.), on pourrait se placer à une position au droit du fleuve et mesurer le volume d'eau qui traverse un détecteur. Le débit dépendrait clairement de la vitesse des particules qui composent le fluide et qui passent devant le détecteur (figure 4.1).

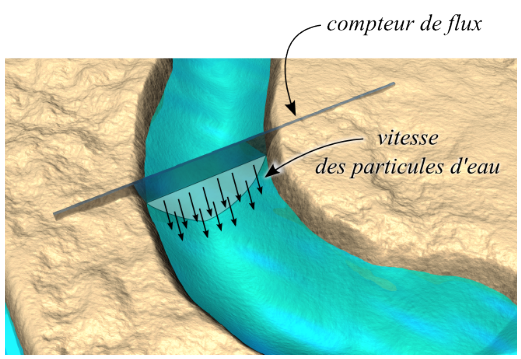

FIGURE 4.1

De même dans un conducteur, des charges se déplacent avec une vitesse $\vec{v}$. Notons q la valeur d'une charge et n la densité de charge. On définit la **densité de courant** comme la quantité de charge traversant par unité de temps une section droite de surface unité (section droite = surface perpendiculaire au vecteur $\vec{v}$). C'est le flux de charge par unité de temps et par unité de surface. Si on considère une surface dS perpendiculaire au flux de charges, et que pendant un temps dt, il passe une charge totale dQ à travers cette surface, la densité de courant j s'écrit

$$j = \frac{dQ}{dS \cdot dt} \tag{4.1}$$

La figure 4.2 illustre cette situation.

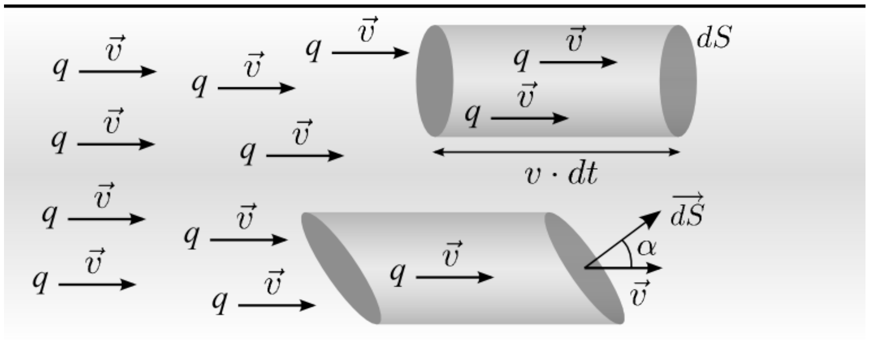

FIGURE 4.2

La charge dQ est formée par un ensemble de charges élémentaires q situées dans un volume dV, toutes ces charges ayant au maximum un temps dt pour passer à travers dS. Si on suppose que toutes les charges ont la même vitesse $\vec{v}$, la charge la plus éloignée qui aura le temps de passer sera située à une distance $v \cdot dt$. Le volume considéré est alors simplement $dV = dS \cdot v \cdot dt$.

La quantité de charge dQ dans un volume dV se calcule simplement à partir de n la densité volumique de particules (électrons) et de leur charge commune q. $nq = \rho$ est alors la densité volumique de charges et

$$dQ = n \cdot q \cdot dV = n \cdot q \cdot dS \cdot v \cdot dt \tag{4.2}$$

La densité de courant est alors $j = nqv$ d'après la définition (eq. 4.1).

Sur la figure 4.2, on voit aussi la situation où la surface dS n'est pas au droit du courant. Si α est l'angle entre l'axe du cylindre et le vecteur normal à la surface $\overrightarrow{dS}$, le volume s'écrit :

$$dV = dS \cos\alpha \cdot v \cdot dt = \overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} \cdot dt \tag{4.3}$$

soit surface de base $(dS \cos\alpha)$ $\times$ hauteur $(v \cdot dt)$.

On définit de façon générale le vecteur densité de courant par

$$\vec{j} = nq\vec{v} \tag{4.4}$$

Le lien entre une densité de courant et un courant peut s'établir de la façon suivante. Un courant est le rapport dQ/dt, quantité de charge traversant une surface par unité de temps. Ceci s'écrit pour une surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$:

$$\frac{dQ}{dt} = nq\frac{dV}{dt} = nq\frac{\overrightarrow{dS} \cdot \vec{v} \cdot dt}{dt} = nq\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} \tag{4.5}$$

Si on somme tous les courants élémentaires correspondant à une surface qui formerait une section du conducteur, on obtient l'intensité du courant total :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} \tag{4.6}$$

où S est la section du conducteur.

Recherche personnelle

Que se passe-t-il et quel est le courant si la densité de courant est uniforme sur toute la section droite du conducteur ?

Outils mathématiques

1.2 Produit vectoriel

Nous donnons ici la définition et les propriétés du produit vectoriel d'un point de vue géométrique, celui qui nous intéresse dans ce cours.

On se place dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, dans lequel on considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$) est défini comme le vecteur $\vec{c}$ possédant es propriétés suivantes :

- le vecteur $\vec{c}$ est orthogonal simultanément aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$,
- la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est de sens direct,
- la norme du produit vectoriel est donnée en fonction de l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ par

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \left| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \right|$$

Cette définition, en particulier celle de la norme, implique que si les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ et le profuit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est nul.

En pratique, pour trouver la direction et surtout le sens du produit vectoriel, on utilise la règle des trois doigts (de la main droite) ou celle du tire-bouchon (tenu de la main droite !).

Il existe plusieurs notations que vous pouvez rencontrer : $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ou $\vec{a} \times \vec{b}$.

Le calcul des composantes du produit vectoriel peut se faire de la façon suivante. Si les coordonnées des vecteurs dans une base orthonormée sont $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ et $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

où l'on remarque qu'il suffit de connaître la première ligne et de faire une permutation circulaire des indices x, y, z dans les lignes suivantes :

$x \to y \to z \to x$

2 Sources

2.1 Les aimants

L'observation des premiers phénomènes magnétiques remonte à l'antiquité. Exemple : magnétite (Fe_3O_4) attire des morceaux de fer. Aimants naturels.

La magnétite vient de Magnésie, une région de Grèces.

Pôles magnétiques d'un aimant

Boussole = invention chinoise. Aiguille aimantée suspendue à un fil indique la direction nord-sud. Toujours le même coté qui s'oriente vers le nord → pôle ”nord” de l'aimant. L'autre est le pôle ”sud”.

Action entre deux aimants :
– Deux pôles de même nature se repoussent
– Deux pôles de nature différente s'attirent

2.2 Le courant électrique

Avril 1820, dans un cours sur l'électricité, Örsted observe que le passage d'un courant électrique dans un fil fait dévier une boussole.

Recherche personnelle

Voir Romagnosi qui a découvert le phénomène 18 ans avant Örsted...

En réalité, toute charge électrique en mouvement est source d'un champ magnétique.

... figure bobine/aimant même lignes de champ ...

2.3 Visualisation du champ magnétique

Utilisation de ”mini-boussoles” (imaginaires ou non) ou de limaille de fer. On observe des lignes de champ. On peut associer à chaque point de l'espace une direction (limaille et boussole), un sens (boussole) et une intensité (nous verrons comment...) pour le champ magnétique. C'est bien un champ !

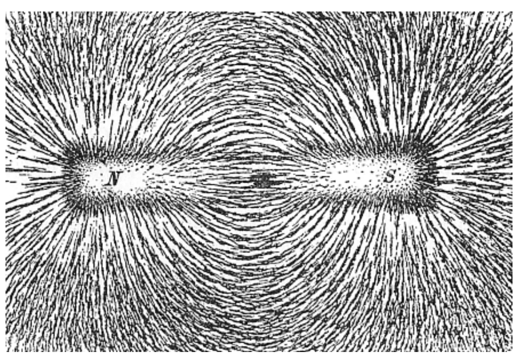

FIGURE 4.3: Lignes de champ magnétique autour d'un aimant, visualisées avec de la limaille de fer.

3 Forces magnétiques

Les résultats qui suivent sont issus de l'étude des interactions entre courants et champs magnétique, à la suite de la première expérience d'Örsted.

3.1 Echelle macroscopique : force de Laplace

Force de Laplace = force exercée par un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant

Soit un élément de fil conducteur $\overrightarrow{dl}$ (orienté, ce pourquoi c'est un vecteur), parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$. La force élémentaire qui s'exerce sur cet élément est :

$$\overrightarrow{dF} = I\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} \tag{4.7}$$

Propriétés :
- Le sens de la force dépend de celui du courant. I est une quantité algébrique.
- La force est perpendiculaire à la fois à l'élément de fil $\overrightarrow{dl}$ et au champ $\vec{B}$.
- Comme pour tout produit vectoriel : règle des trois doigts (ou tire-bouchon) permet de retrouver sens et direction de la force.

Pour obtenir la force totale s'exerçant sur un conducteur, il faut naturellement intégrer la force élémentaire sur toute la longueur du conducteur :

$$F_L = \int_{fil} I\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} \tag{4.8}$$

Recherche personnelle

Cas d'un fil rectiligne, champ uniforme perpendiculaire au fil

3.2 Echelle microscopique : force de Lorentz

Nous avons vu ce qui se passe pour des conducteurs, il est naturel de considérer une particule unique portant une charge q. Si on se place dans un référentiel où cette particule a une vitesse $\vec{v}$ et où le champ magnétique est $\vec{B}$, la force subie par la particule est

$$f = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{4.9}$$

Propriétés :
- Le sens de la force dépend de la charge, des vecteurs vitesse et champ magnétique. Changer le signe de la charge ou le sens de l'un des vecteurs change le sens de la force.
- La force est perpendiculaire à la fois au vecteur vitesse $\vec{v}$ et au champ $\vec{B}$.
- Comme pour tout produit vectoriel : règle des trois doigts (ou tire-bouchon) permet de retrouver sens et direction de la force.
- Cette force est toujours perpendiculaire à la vitesse, donc $\vec{f} \cdot \vec{v} = 0$ et la force ne travaille pas.

3.3 Lien entre forces de Lorentz et Laplace

Il y a évidemment un lien entre la force exercée sur un élément de fil conducteur parcouru par un courant (force de Laplace) et la somme des forces exercées sur chacun des porteurs de charge individuels qui constituent le courant (forces de Lorentz).

Cherchons à calculer la force de Laplace qui s'exerce sur un élément de fil $\overrightarrow{dl}$, de section droite ds parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, que nous supposerons constant sur la longueur $\overrightarrow{dl}$.

Les charges mobiles interagissent avec le réseau cristallin du fil, si bien qu'en régime permanent, si on fait le bilan des forces exercées sur le système = "ensemble des charges mobiles", on a :

- $\sum \vec{f}_i^{Lor}$ la somme de toutes les forces de Lorentz s'exerçant sur les charges individuelles
- $\overrightarrow{dF}_{cristal}$, l'action du réseau cristallin qui maintient les charges à l'intérieur du conducteur.

En régime permanent, les charges ont une vitesse constante, et donc

$$\sum_i \vec{f}_i^{Lor} + \overrightarrow{dF}_{cristal} = 0 \tag{4.10}$$

Par ailleurs, le principe des actions réciproques (action d'un système A sur un système B est égale en norme et opposée en sens à l'action de B sur A) nous permet d'écrire que la force exercée par les charges sur le cristal (constituants fixes du conducteur) est

$$\overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{dF}_{cristal} \tag{4.11}$$

et donc, d'après 4.10,

$$\overrightarrow{dF} = \sum_i \vec{f}_i^{Lor} \tag{4.12}$$

Cette force exercée sur la structure du conducteur est ce que nous appelerons la force de Laplace, et elle est égale à la résultante de toutes les forces de Lorentz exercées sur les charges élémentaires en mouvement dans le conducteur.

La résultante des forces de Lorentz peut s'écrire, si on note $\vec{v}$ la vitesse des charges en mouvement (vitesse supposée égale pour toutes les charges) et q_i la valeur de la charge élémentaire :

$$\sum_i \vec{f}_i^{Lor} = \sum_i q_i \vec{v} \wedge \vec{B} = \left(\sum_i q_i \right) \vec{v} \wedge \vec{B} = \delta Q \vec{v} \wedge \vec{B} \tag{4.13}$$

où δQ est la charge totale contenue dans l'élément de longueur $\overrightarrow{dl}$. Si on note n la densité de charges en mouvement et $dV = dl \cdot ds$ le volume de conducteur considéré, on peut écrire la quantité de charge $\delta Q = n\, q\, dV = n\, q\, ds\, dl$.

En remarquant que, puisque $\vec{v} = v \cdot \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire le long du fil, $\vec{v} \cdot dl = v \cdot \vec{u} \cdot dl = v \cdot \overrightarrow{dl}$ si le mouvement des charges mobiles se fait le long de l'élément de longueur dl ($\vec{v}$ colinéaire à $\overrightarrow{dl}$) donc colinéaire à $\vec{v}$, on peut écrire

$$\delta Q \vec{v} \wedge \vec{B} = n\, q\, ds\, dl\, \vec{v} \wedge \vec{B} = n\, q\, ds\, v\, \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} \tag{4.14}$$

Et puisque nous avons vu que le courant pouvait s'écrire $I = j\, ds = n\, q\, v\, ds$, la résultante des forces de Lorentz peut s'écrire :

$$\sum_i \vec{f}_i^{Lor} = n\, q\, ds\, v\, \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} = I\, \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} \tag{4.15}$$

4 Vecteur champ magnétique

- Direction : celle indiquée par une petite boussole imaginaire placée au point M d'intérêt. Le vecteur $\vec{B}$ est dirigé selon le sens sud-nord de la boussole.
- mesure : Balance de Cotton, sonde à effet Hall

Recherche personnelle

Rechercher le principe d'une "balance de Cotton" et d'une sonde à effet Hall.

– unité : le Tesla (T). En unité du S.I., ça donne quoi ? (utiliser l'une des relations ci-dessus).
  Ordres de grandeur :
  – champ magnétique terrestre : $0,5\,10^{-4}$ T
  – appareils de RMN (Résonance Magnétique Nucléaire) ou d'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) : quelques Teslas
  – champ magnétique généré par un fil en T.P. : quelques mT
  – champ magnétiques les plus puissants générés en labo : environ 150 à 200 T
  – champs magnétiques les plus puissants de l'univers connu (du moins, en 2012), ceux produits par certaines étoiles à neutrons appelées "magnétars" : plusieurs 10^{10} à 10^{11} T ! (ou si on veut de 10 à 100 GT ou GigaTeslas).