5

Champ magnétique créé par des courants

Örsted a montré la génération d'un champ magnétique par un courant, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart ont, vers 1820, établi empiriquement la loi qui gouverne cette génération.

1 Loi de Biot et Savart

Considère un conducteur filiforme = longueur $\gg$ dimension transversale

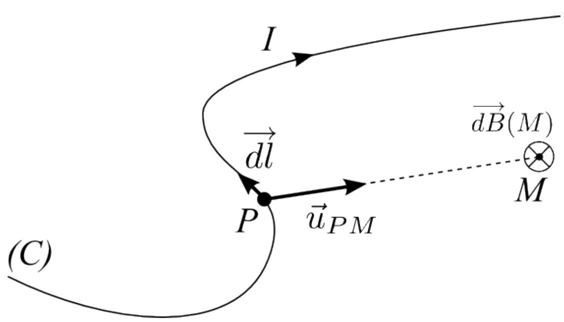

FIGURE 5.1: Elément de fil conducteur $\vec{dl}$ parcouru par un courant I et produisant un champ magnétique $\vec{B}(M)$ au point M.

Soit un fil conducteur décrivant une courbe (C). Ce fil est parcouru par un courant d'intensité I. On considère en un point P une portion élémentaire de fil $\overrightarrow{dl}$ orientée. Si on note $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ le vecteur position d'un point M relativement à P, le champ magnétique élémentaire créé en M est alors donné par

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl}\wedge\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl}\wedge\vec{u}_r}{r^2} \tag{5.1}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

Reliée à la permittivité du vide ϵ_0 et à la célérité de la lumière par la relation $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ (à voir dans le cours d'électromagnétisme). Valeur dans le S.I. :$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ S.I.

Propriétés :
- Le champ produit est $\perp$ au plan défini par $\overrightarrow{dl}$ et $\vec{r}$.
- Sens déterminé par la règle du tire-bouchon.
- Intensité $\propto 1/r^2$ avec r distance de l'élément de fil jusqu'au point considéré.

Pour obtenir le champ total produit en un point M, il faut faire la somme de tous les champs élémentaires produits par tous les éléments de fil :

$$\vec{B}(M) = \int_{P\in(C)} \overrightarrow{dB}(M) = \int_{P\in(C)} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl}\wedge\vec{u}_r}{r^2} \tag{5.2}$$

2 Généralisation à une densité de courant

Supposons que l'on ait affaire à une densité de courant définie en chaque point de l'espace. Par exemple si on veut regarder de plus près ce qui se passe si on considère un fil comme n'étant pas infiniment fin.

Le courant I peut être remplacé par son expression en fonction de la densité de courant. Si I est produit par une densité $\vec{j}$ traversant une surface $\overrightarrow{dS}$ et que $\vec{j}$, $\overrightarrow{dS}$ et $\overrightarrow{dl}$ ont tous les trois la même direction (ce qui est toujours vrai si c'est nous qui choisissons la surface dS). On a alors :

$$I\,\overrightarrow{dl} = j\,dS\,\overrightarrow{dl} = \vec{j}\,dS\,dl = \vec{j}\,dV \tag{5.3}$$

où dV devient un petit élément de volume (centré en un point P) qui contient la densité de courant qui va produire un champ magnétique élémentaire. Le champ magnétique total en M est alors la somme de tous les champs magnétiques élémentaires créés par tous les éléments de volume dV contenus dans un volume V délimitant la zone contenant les densités de courant :

$$\vec{B}(M) = \int_{P\in V} \overrightarrow{dB}(M) = \int_{P\in V} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dV\,\vec{j}(P)\wedge\vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in V}\frac{\vec{j}(P)\wedge\vec{u}_r}{r^2}dV \tag{5.4}$$

avec toujours $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$.

3 Propriétés de symétrie

Un plan de symétrie pour les courants = plan d'antisymétrie pour le champ magnétique

Un plan d'antisymétrie pour les courants = plan de symétrie pour le champ magnétique

4 Spires circulaires et bobines

4.1 Champ magnétique créé par une spire circulaire sur son axe

Un exemple classique et important est celui de la spire circulaire parcourue par un courant I. On cherche le champ magnétique produit sur l'axe de la spire.

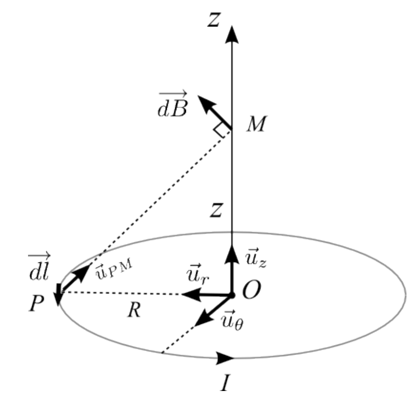

FIGURE 5.2: Spire circulaire parcourue par un courant I.

On considère d'abord un élément de fil $\overrightarrow{dl}$ en un point P de la spire. Cet élément produit un champ élémentaire $\overrightarrow{dB}$ en un point M de l'axe. La règle du tire-bouchon permet de trouver la direction et le sens de ce champ (voir figure 5.2)

L'étude des propriétés de symétrie du système permet de trouver la direction du champ sur l'axe. En effet, si l'on considère deux éléments de fil $\overrightarrow{dl}_1$ et $\overrightarrow{dl}_2$ situés de façon symétrique par rapport à l'axe en deux points P_1 et P_2, les champs produits $\overrightarrow{dB}_1$ et $\overrightarrow{dB}_2$ seront symétriques par rapport à l'axe. Leur somme (vectorielle) sera donc sur l'axe et dépendra de l'angle α (figure 5.3).

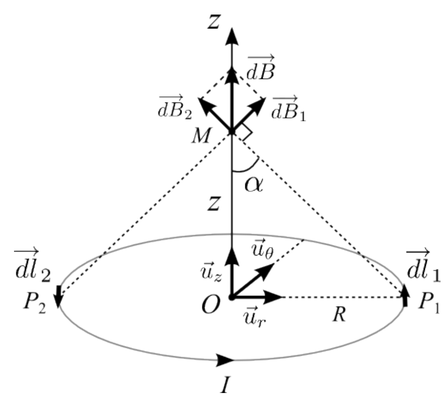

FIGURE 5.3: Spire circulaire parcourue par un courant I.

Le champ $\overrightarrow{dB}$ créé par un élément de fil $\overrightarrow{dl}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \tag{5.5}$$

Les propriétés de symétrie nous indiquent que seule compte la projection selon l'axe (Oz), puisque les composantes perpendiculaires à cet axe s'annulent deux à deux en considérant deux éléments $\overrightarrow{dl}_1$ et $\overrightarrow{dl}_2$ symétriques. On peut donc écrire que l'élément de champ projeté sur l'axe est :

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\|\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}\|}{PM^3} \sin\alpha \tag{5.6}$$

(Nous avons pris ici la norme du produit vectoriel car avec les conventions de la figure 5.3, la projection est positive). La figure 5.4 montre la projection du vecteur $\overrightarrow{dB}$ sur l'axe z et permet de comprendre la dépendance en $\sin\alpha$.

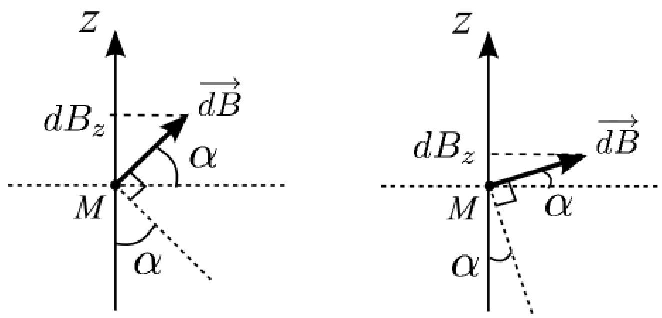

FIGURE 5.4: Détail de la projection du champ $\overrightarrow{dB}$ sur l'axe z.

Comme $\overrightarrow{dl}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont perpendiculaires, la norme de leur produit vectoriel peut s'écrire $\|\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{PM}\| = dl\,PM$ et la projection de l'élément de champ devient

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,PM}{PM^3}\sin\alpha \tag{5.7}$$

Pour obtenir le champ complet, il faut sommer sur tous les éléments de fil dl :

$$B(M) = \int_{dl\,\in\,\text{spire}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,PM}{PM^3}\sin\alpha \tag{5.8}$$

et comme tous les termes de cette expression sont constants quelque soit le point P et l'élément de fil dl, on a :

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\int_{dl\,\in\,\text{spire}} dl\,PM}{PM^3}\sin\alpha \tag{5.9}$$

Puisque $\int_{dl\,\in\,\text{spire}} dl = 2\pi R$, et que l'un des PM s'élimine,

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi R}{PM^2}\sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^2}{PM^2}\sin\alpha \tag{5.10}$$

Enfin, on peut écrire en fonction de α, puisque $\sin\alpha = \frac{R}{PM}$, et en réintroduisant la direction et le sens du vecteur $\vec{B}$, qui sont selon l'axe donc selon le vecteur $\vec{u}_z$:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\vec{u}_z \tag{5.11}$$

On peut réécrire cette expression en fonction de z, en remarquant que $\sin\alpha = \dfrac{R}{(z^2+R^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{(1+\frac{z^2}{R^2})^{1/2}}$:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\vec{u}_z \tag{5.12}$$

4.2 Champ magnétique créé par une bobine de longeur finie

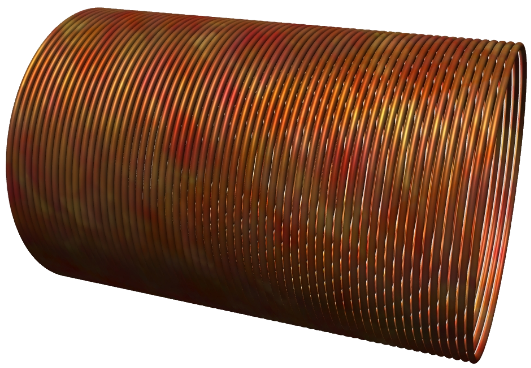

FIGURE 5.5: solénoïde de longueur finie

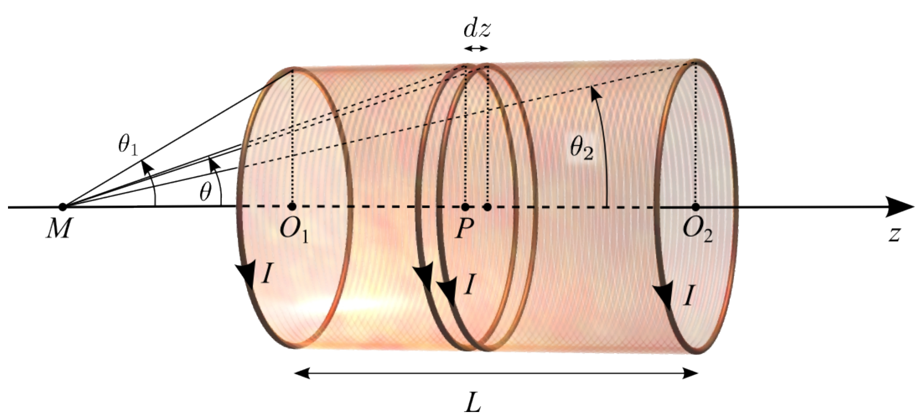

FIGURE 5.6: Schéma et conventions pour le calcul du champ généré par un solénoïde sur son axe.