

## Théorème d'Ampère et applications

### 1 Théorème d'Ampère

Equivalent du théorème de Gauss pour l'électrostatique. Permet de calculer des champs simplement en utilisant la symétrie des courants. Mais il faut que le degré de symétrie soit élevé (on verra dans les applications).

#### 1.1 Fil infini parcouru par un courant, circulation du champ magnétique

Soit un fil infini parcouru par un courant  $I$ .

##### Calcul du champ magnétique créé par ce courant

Le champ magnétique créé par ce courant en un point  $M$  situé à une distance  $r$  du fil peut se calculer de la façon suivante. Soit  $P$  un point du fil (voir figure 6.1, considérons le segment élémentaire  $\vec{dz}$  en ce point.

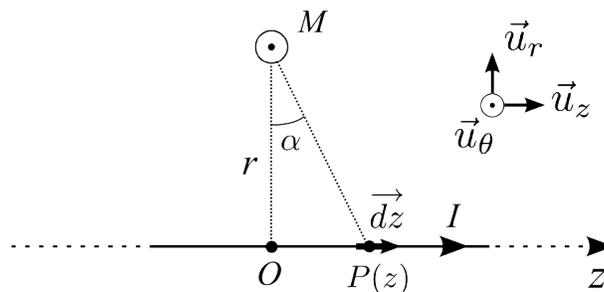


FIGURE 6.1: Schéma et conventions pour le calcul du champ généré par un fil infini.

Le champ magnétique élémentaire créé par  $\vec{dz}$  est :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Comme ce champ est orthogonal à  $\vec{dz}$  et  $\overrightarrow{PM}$  simultanément, il est dirigé perpendiculairement au plan de la figure. La règle du tire-bouchon nous donne son sens, comme indiqué sur cette même figure par  $\odot$ .

Le produit vectoriel  $\vec{dz} \wedge \overrightarrow{PM}$  peut s'écrire dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  comme :

$$\vec{dz} \wedge \overrightarrow{PM} = \vec{dz} \wedge (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) = dz \vec{u}_z \wedge (z\vec{u}_z + r\vec{u}_r) = dz r \vec{u}_z \wedge r \vec{u}_r$$

où l'on n'a laissé que le produit vectoriel donnant un résultat non nul et où l'on pose  $OP = z$  et  $OM = r$ . Puisque  $\vec{u}_z \wedge r\vec{u}_r = \vec{u}_\theta$  et  $PM = \sqrt{z^2 + r^2}$ , le champ élémentaire peut s'écrire

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz r}{\sqrt{z^2 + r^2}^3} \vec{u}_\theta \quad (6.1)$$

Pour obtenir le champ magnétique total en  $M$ , nous devons intégrer cette expression pour tous les éléments de courant  $dz$ , ce qui ne semble pas trivial. Après plusieurs essais, on se rend compte que c'est beaucoup plus simple en faisant un changement de variable pour intégrer sur l'angle  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} z &= r \tan \alpha \Rightarrow dz = r(1 + \tan^2 \alpha) d\alpha = r \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \\ PM &= \frac{r}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Et lorsqu'on remplace dans l'éq. 6.1, on obtient :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos \alpha d\alpha \vec{u}_\theta \quad (6.2)$$

En prenant comme variable l'angle  $\alpha$ , variant de  $-\pi/2$  à  $\pi/2$  pour  $z$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , on peut intégrer les contributions de tous les éléments du fil infini, et on obtient la norme du champ en  $M$  :

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Ce qui donne finalement, puisque le terme entre crochets est égal à  $[\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})] = 1 - (-1) = 2$ ,

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (6.3)$$

### Circulation du champ le long d'une courbe fermée

Considérons maintenant une courbe fermée ( $C$ ) entourant le fil (figure 6.2).

La circulation de  $\vec{B}$  sur ce contour fait intervenir le petit déplacement élémentaire  $\vec{dl}$ . Celui-ci peut s'écrire en un point  $M$  donné sur ( $C$ ), de façon très générale :

$$\vec{dl} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

La circulation élémentaire est alors :

$$\vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z)$$

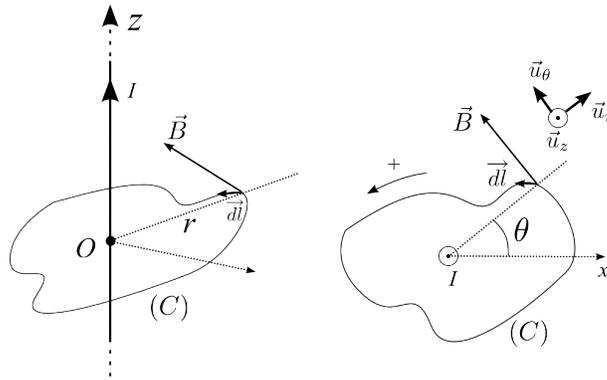


FIGURE 6.2: Schéma et conventions pour le calcul de la circulation du champ sur une courbe fermée autour d'un fil infini.

Ce qui donne, puisque seul reste le terme en  $\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta$  :

$$\vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$$

Et donc la circulation totale sur le contour fermé est donnée, en intégrant sur l'angle  $\theta$  :

$$c = \oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\theta$$

Sur le contour fermé, l'angle  $\theta$  varie de 0 à  $2\pi$  (on fait un tour complet). On a donc

$$c = \oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I$$

Expression remarquable car elle ne dépend pas de la forme du contour, du moment qu'il entoure le fil. Si par contre le contour est complètement à l'extérieur du fil (figure 6.3)

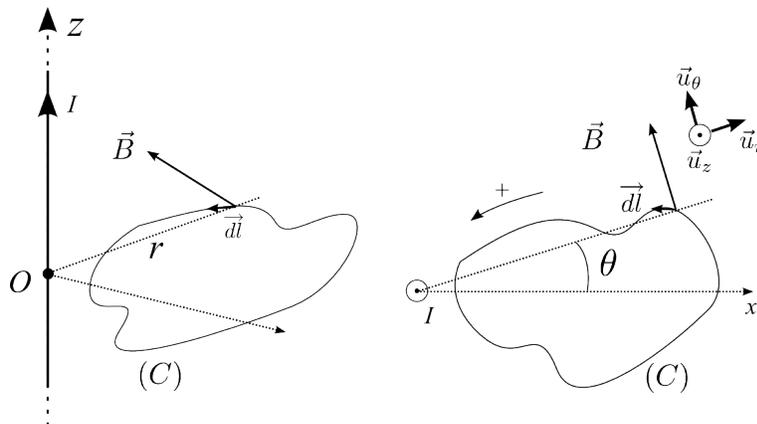


FIGURE 6.3: Schéma et conventions pour le calcul de la circulation du champ sur une courbe fermée située à l'extérieur d'un fil infini.

Le calcul est presque le même que ci-dessus, excepté que l'angle  $\theta$  va, lors de l'intégration, passer de 0 pour revenir à 0 en ayant passé par un maximum. La circulation s'accroit alors :

$$C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^0 d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

La circulation est donc nulle dans ce cas.

Quelques remarques et conclusions :

- Le contour ( $C$ ) est **orienté**, selon la règle du tire-bouchon par rapport au sens du courant  $I$ . Ceci influe sur le signe de l'intégrale.
- Dans le cas électrostatique, la circulation du champ électrostatique sur un contour fermé est toujours nulle.
- Si le contour **enlace** le courant, c'est à dire que le courant  $I$  traverse la surface orientée s'appuyant sur le contour fermé, alors la circulation du champ est égale à  $C = \mu_0 I$ .
- Si le courant ne traverse pas cette surface, la circulation du champ est nulle.

## 1.2 Généralisation, théorème d'Ampère

On montre (mais il faut des outils mathématiques qui vont un peu au delà de ce cours) que le résultat précédent se généralise à tous les courants, pas seulement ceux circulant sur un fil rectiligne infini.

Pour ce faire, on considère un contour fermé quelconque ( $C$ ) et une surface ( $S$ ) s'appuyant sur ce contour. A part cette contrainte, ( $S$ ) peut être quelconque. On suppose également la présence de plusieurs circuits filiformes qui traversent ou pas la surface ( $S$ ) et qui sont parcourus par des courants, générant donc un champ magnétique (figure 6.4).

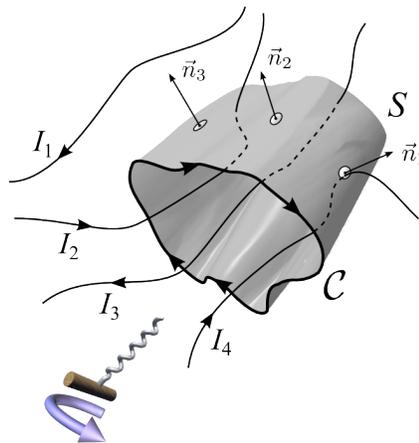


FIGURE 6.4: Schéma et conventions pour le calcul de la circulation du champ sur une courbe fermée orientée. Un ensemble de circuits filiformes sont parcourus par des courants et traversent ou non une surface s'appuyant sur le contour.

Le contour est orienté et donc la normale à la surface en tout point est orientée avec la règle du tire-bouchon.

Un courant qui traverse toute surface ( $S$ ) s'appuyant sur le contour est dit **enlacé** par le contour.



### Théorème d'Ampère

Dans le vide, la circulation du champ magnétique sur un contour fermé et orienté est égale à la somme algébrique des courants enlacés par le contour multipliée par  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide :

$$\mathcal{C} = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}} \quad (6.4)$$

Attention, la somme est algébrique, donc le sens de circulation d'un courant influe sur le signe de sa contribution. Si  $I$  sort dans le même sens que la normale, sa contribution est positive, sinon elle est négative.

### 1.3 Utilisation du théorème d'Ampère

Comme le théorème de Gauss, celui d'Ampère s'utilise principalement lorsque les symétries du problème sont suffisantes. On veut calculer le champ en un point  $M$  de l'espace. Il faut trouver un contour fermé qui entoure certains courants et tel que la circulation du champ magnétique soit simple à calculer, c'est à dire

- sur la totalité ou une partie du contour,  $\vec{B} // \vec{dl}$  et la norme  $\|\vec{B}\|$  est constante
- ou/et sur une partie du contour  $\vec{B} \perp \vec{dl}$  donc la circulation sera nulle sur cette partie là.

## 2 Exemples et applications

### 2.1 Solénoïde infini

#### Symétries du système

Soit un solénoïde infini d'axe ( $Oz$ ) constitué de spires jointives. On considère que, bien que le fil soit enroulé en hélice, un tour correspond à une spire, ce qui est approximativement vrai si l'on considère des spires jointives et un diamètre de fil négligeable devant le rayon du solénoïde.

Le rayon du solénoïde est  $R$  et le nombre de spires par unité de longueur sera noté  $n$ . On cherche le champ en un point  $M$  quelconque de l'espace. On se place évidemment dans un système de coordonnées cylindriques. Symétries des courants :

- plan contenant une spire. C'est un plan de symétrie. Le champ est donc perpendiculaire à ce plan. Vrai quelque soit la position de ce plan sur l'axe ( $Oz$ ).
- plan contenant l'axe ( $Oz$ ). C'est un plan d'anti-symétrie des courants. Il contient donc le champ. Ceci est vrai quelque soit l'orientation du plan.

Le vecteur champ magnétique est donc selon la direction  $\vec{u}_z$ . Et sa norme est indépendante de la coordonnée  $z$ . En effet, quelque soit la position  $z$  du point  $M$ , celui-ci voit un solénoïde infini (invariance par translation le long de ( $Oz$ )). En conclusion,  $\|\vec{B}(M)\|$  ne dépend que de la coordonnée  $r$  :  $\vec{B} = \vec{B}(r)$ .

#### Choix du contour

On choisit donc comme contour un rectangle ( $ABCD$ ) dont la longueur  $AB = L$ , dans un plan d'anti-symétrie (plan contenant l'axe ( $Oz$ )). Ce rectangle aura deux cotés parallèles à ( $Oz$ ), respectivement ( $AB$ ) et ( $DC$ ), aux rayons  $r_1$  et  $r_2$  et deux cotés perpendiculaires, ( $BC$ ) et ( $DA$ ).

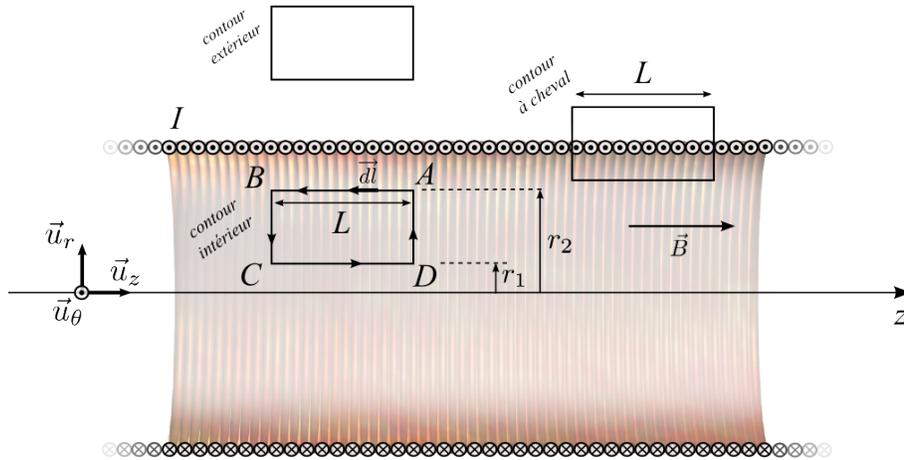


FIGURE 6.5: Choix des contours pour l'application du théorème d'Ampère dans le cas d'un solénoïde infini.

### Calcul de la circulation

La circulation du champ se décompose en quatre parties, correspondant à chaque coté du rectangle :

$$C = \int_{\text{coté (AB)} r=r_2} B(r_2) \cdot \vec{u}_z \cdot (dz) \vec{u}_z + \int_{\text{coté (BC)}} B(r) \cdot \vec{u}_z \cdot (dr) \vec{u}_r + \int_{\text{coté (CD)} r=r_1} B(r_1) \cdot \vec{u}_z \cdot (dz) \vec{u}_z + \int_{\text{coté (DA)}} B(r) \cdot \vec{u}_z \cdot (dr) \vec{u}_r$$

Certaines de ces intégrales sont nulles, celles sur les cotés perpendiculaires à  $(Oz)$  (on voit dans ces intégrales des termes  $\vec{u}_z \cdot \vec{u}_r$  qui sont nuls). Il reste, en utilisant  $\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1$  :

$$C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_{\text{coté (AB)} r=r_2} B(r_2) \cdot (-dz) + \int_{\text{coté (CD)} r=r_1} B(r_1) \cdot dz = B(r_1)L - B(r_2)L = L[B(r_1) - B(r_2)]$$

### Utilisation du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère s'écrit dans ce cas :

$$C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot \vec{dl} = L[B(r_1) - B(r_2)] = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}} \quad (6.5)$$

Donc tout dépend de la position du contour et du fait qu'il y ait ou non des courants enlacés.

- **Si le contour se trouve complètement à l'intérieur du solénoïde**, c'est à dire  $r_2 < R$ , on a  $\sum I_{\text{enlacé}} = 0$ , d'où

$$L[B(r_1) - B(r_2)] = 0 \Rightarrow B(r_1) = B(r_2) \quad (6.6)$$

Le champ est donc constant à l'intérieur du solénoïde, quelque soit  $r$ . Nous le noterons  $B_0$ .

- **Si le contour se trouve complètement à l'extérieur du solénoïde**, c'est à dire  $r_1 > R$ , on admettra que le champ est nul partout. En effet, pour tout morceau  $dl$  de spire produisant un champ  $dB$ , on peut trouver un morceau  $dl'$  d'une autre spire produisant un champ  $-dB$ , car le solénoïde est infini (mieux argumenter...).

- **Si le contour se trouve à cheval sur quelques spires du solénoïde**, nous pouvons déterminer le nombre de courants enlacés. Chaque spire conduit un courant  $I$  et il y a  $n$  spires par unité de longueur. Donc pour un contour-rectangle de longueur  $L$ , le nombre de courants enlacés est  $nL$ . De plus, le champ en  $r_1$ , qui est à l'intérieur du solénoïde, est constant et égal à  $B_0$ . Le champ en  $r_2$ , qui est à l'extérieur, est nul. On a, en utilisant l'équation 6.5

$$L[B_0 - 0] = \mu_0(nL)I \quad (6.7)$$

et donc

$$B_0 = \mu_0 n I \quad (6.8)$$

Conclusion : le champ à l'intérieur du solénoïde infini est constant et égal à  $B_0 = \mu_0 n I$  où  $n$  est la densité linéique de spires et  $I$  le courant les traversant. Ce champ est dirigé selon l'axe du solénoïde. Le champ est nul à l'extérieur.

