8

Conducteurs en équilibre électrostatique

1 Conducteur en équilibre électrostatique

1.1 Conducteur et équilibre

Conducteur

Un **conducteur** est un matériau dans lequel les charges se déplacent lorsqu'une force électrostatique leur est appliquée, aussi petite soit-elle.

- **Nature des charges mobiles :** dans les métaux, seuls les électrons sont mobiles, le réseau de charges positives étant à peu près fixe (cas particulier des trous dans les semi-conducteurs...). Dans les liquides et les gaz, les ions se déplacent aussi.
- **Cas particulier étudié ici :** Seules forces électrostatiques, conducteurs homogènes, température uniforme, pas d'influence électromagnétique variable dans le temps.
- **Force de rappel :** les forces de rappel à la surface du conducteur (attraction électrostatique des noyaux) sont toujours considérées ici comme suffisantes pour retenir les électrons du métal. (si force trop grande $\rightarrow$ émission d'e^- = rayons cathodiques, si chauffage = émission thermoélectronique)

Equilibre électrostatique

Un conducteur est en **équilibre électrostatique** si il n'y a pas de déplacement de charges mobiles. La répartition des charges est constante dans le temps.

Conséquences

- Puisque les charges ne bougent pas ($\vec{F}_{\text{é.s.}} = 0$), le champ électrostatique est toujours nul dans un conducteur : $\vec{E}_{int} = 0$.
- Si le champ est nul, et puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, le potentiel est constant à l'intérieur du conducteur. C'est un volume équipotentiel.

– Les charges en excès ne peuvent pas se répartir dans le volume. En effet, appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée S_{gauss} quelconque incluse dans le volume. Le flux du champ sur cette surface est nul,

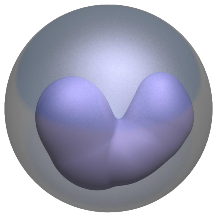

FIGURE 8.1: Surface de Gauss quelconque à l'intérieur d'un conducteur chargé. Si le conducteur est en équilibre électrostatique, il ne peut pas y avoir de charges à l'intérieur.

puisque le champ est nul. Donc

$$\int_{S_{gauss}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{8.1}$$

la somme des charges intérieures à cette surface est nulle.
Donc les charges excédentaires ne peuvent se répartir que sur la surface du conducteur. On a une densité surfacique de charges σ. Expérimentalement, on constate que les charges se répartissent effectivement sur une épaisseur de quelques Å.

– La surface du conducteur est une équipotentielle (voir plus haut). Puisque les lignes de champ électrostatique sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles $\Rightarrow$ le champ créé à l'extérieur près de la surface est $\perp$ à celle-ci.

Exemple : conducteur non chargé dans un champ uniforme.

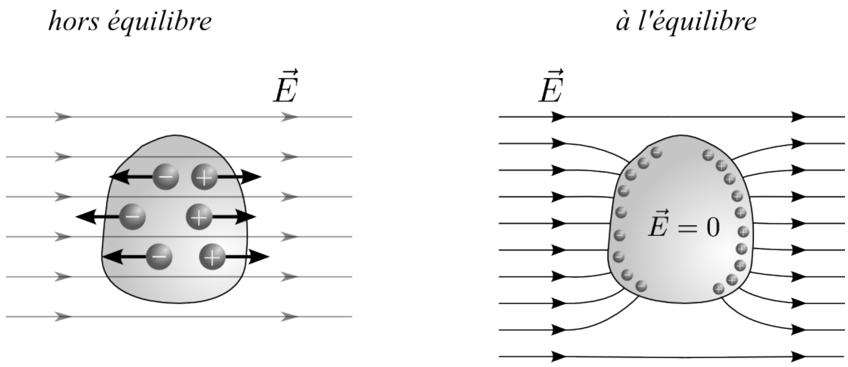

FIGURE 8.2: Les charges dans un conducteur neutre placé dans un champ électrostatique uniforme se déplacent pour annuler le champ dans le conducteur. Le champ extérieur en est modifié.

Les charges qui peuvent se mouvoir se déplacent vers la surface pour annuler exactement le champ $\vec{E}$ partout à l'intérieur du conducteur !

1.2 Cavité vide dans un conducteur

Considérons une cavité creusée dans un conducteur, cette cavité étant entièrement "incluse" dans le conducteur. Notons Σ la surface de cette cavité.

En l'absence de charges, le potentiel ne peut pas avoir d'extrêmum (si c'était le cas, on aurait un ensemble de lignes de champ qui partiraient toutes de cet extrêmum, donc il y aurait une charge en ce point).

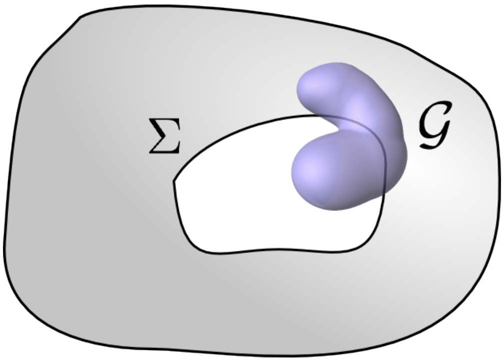

FIGURE 8.3: Cavité Σ dans un conducteur. Une surface de Gauss $\mathcal{G}$ quelconque est représentée.

Or le potentiel est constant (notons-le V_0) sur toute la surface Σ, comme dans tout le conducteur. Donc $V = cte = V_0$ partout dans la cavité.

$\Rightarrow \quad \vec{E} = 0$ dans la cavité.

$\rightarrow$ vrai quelque soit le champ extérieur au conducteur $\Rightarrow$ blindage contre les champs extérieurs = **cage de Faraday**

Recherche personnelle

Cage de Faraday, protection contre la foudre, voir courants de terre.

Et si il y avait une charge surfacique sur Σ ? Utilisation du théorème de Gauss $\mathcal{G}$ à cheval entre la cavité et le conducteur : flux du champ nul car champ nul $\Rightarrow \quad \sigma(\Sigma) = 0$. Toute charge excédentaire se retrouve sur la surface extérieure du conducteur.

1.3 Théorème de Coulomb

Calcul du champ au voisinage immédiat d'un conducteur chargé.

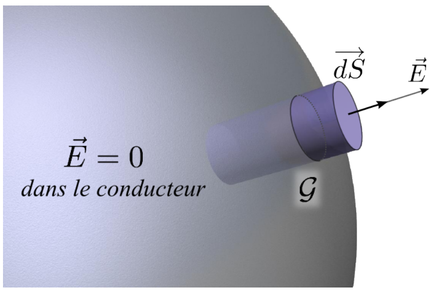

FIGURE 8.4: Surface de Gauss utilisée pour démontrer le théorème de Coulomb

Utilise une surface de Gauss $\mathcal{G}$ = cylindre à cheval sur la surface extérieure du conducteur. La surface de base est infinitésimale dS.

Nous avons vu
- $\vec{E} = 0$ dans le conducteur

– $\vec{E} \perp$ à la surface juste au dessus de celle-ci. Donc $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires (rappel : $\overrightarrow{dS}$ est *perp* à l'élément de surface dS)

donc le flux (élémentaire car dS est une surface élémentaire) est

$$d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

et comme la charge intérieure à la surface de Gauss est $q_{int} = \sigma.dS$, le champ s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}$$

C'est le **théorème de Coulomb** :

Au voisinage immédiat d'un conducteur portant localement une densité de charge surfacique σ, le champ électrostatique est porté par la normale à la surface et vaut

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n} \tag{8.2}$$

Voir éventuellement en TD : champ d'un disque S uniformément chargé ($= \sigma/(2\epsilon_0)$) et lien avec le théorème de Coulomb.

Pression électrostatique...

1.4 Capacité d'un conducteur en équilibre électrostatique

Pour un conducteur en équilibre électrostatique, il y a un lien entre le potentiel auquel ce conducteur se trouve et la charge qui est répartie sur sa surface. En effet, le potentiel en tout point M à l'intérieur du conducteur peut s'écrire

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_S \frac{\sigma_e dS}{r}$$

où S est la surface du conducteur, σ_e est la densité surfacique de charge et r la distance du point M sélectionné à l'élément de surface dS.

Or, la charge totale Q est la somme des charges élémentaires :

$$Q = \iint_S \sigma_e dS$$

Donc si l'on multiplie σ_e par un coefficient quelconque β, puisque l'intégrale est une opération linéaire, V et Q seront aussi multipliés par β. Donc le rapport Q/V est une constante. On l'appelle **capacité propre** du conducteur isolé, c'est à dire seul dans l'espace. Sa valeur dépend uniquement de la forme et de la grandeur de sa surface :

$$Q = CV \tag{8.3}$$

L'unité de capacité est le **Farad**, symbole **F**. C'est une unité très grande. On utilise plus communément le μF (10^{-6} F), voire le pF (10^{-12} F)

Exemple : pour une sphère, $V = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{R}$ donc $C = 4\pi\epsilon_0 R$

Recherche personnelle

retrouver l'expression du potentiel dans le cas de la sphère

Application numérique : pour la Terre, $C = 700\,\mu$F !

2 Ensemble de conducteurs en équilibre électrostatique

2.1 Propriétés des lignes de champ

Soit le cas de deux conducteurs à proximité l'un de l'autre, l'un chargé ($Q_1 > 0$) et l'autre non ($Q_2 = 0$). Les charges dans le conducteur neutre vont se déplacer pour annuler le champ à l'intérieur de ce conducteur.

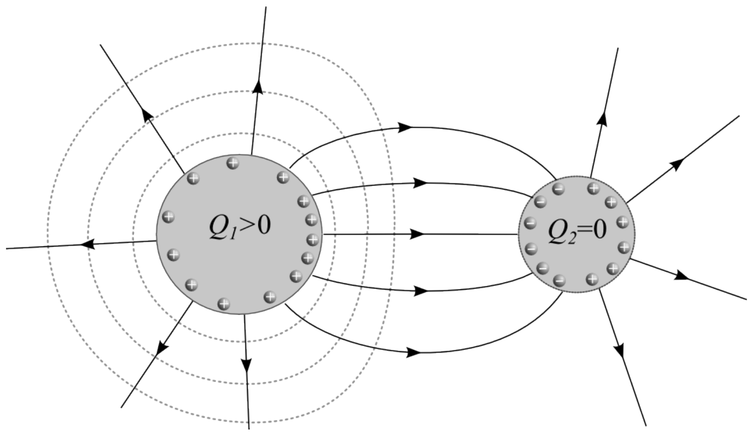

Figure 8.5

Les lignes de champ présentent certaines propriétés :
- Une ligne de champ est $\perp$ à la surface des conducteurs et part d'une région où la densité surfacique est $\sigma > 0$, se termine sur une région $\sigma < 0$ ou bien à l'infini.
- Le long d'une ligne de champ, le potentiel décroit forcément (sinon minimum du potentiel, donc charges présentes sur la ligne de champ, ce qui est faux). Conséquence : puisqu'un conducteur donné est partout au même potentiel V, une ligne de champ ne peut pas avoir ses deux extrémités sur le même conducteur. $\Rightarrow$ va de V_1 à V_2 ou bien de V_1 à l'infini.
- Si on applique le théorème de Gauss sur un tube de champ qui commence sur un conducteur et finit sur un autre. Surface de Gauss = tube de champ + bouchons à l'intérieur des conducteurs.
  A l'intérieur des conducteurs $\vec{E} = 0$ et sur le tube de champ, par définition $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$. Donc le flux total est nul :

$$\Phi = \int_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 \tag{8.4}$$

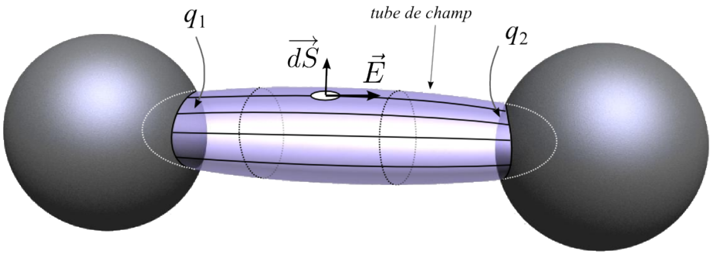

FIGURE 8.6

Les seules charges à l'intérieur de la surface de Gauss sont celles présentes à la surface des conducteurs. On a q_1 sur le conducteur 1 et q_2 sur le conducteur 2. Et d'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = 0 = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad q_1 = -q_2 \tag{8.5}$$

On dit que les surfaces des conducteurs à l'intérieur du tube de champ sont des éléments correspondants.

2.2 Conducteurs en influence partielle

Sur le schéma de la figure 8.5, on voit un exemple où deux conducteurs s'influencent mais certaines lignes de champ partent de l'un des conducteurs à l'infini.

On dit qu'on a **influence partielle**.

On a vu le théorème de superposition. Si on a deux états possibles d'un système, l'état qui serait la somme des deux (somme des charges, somme des potentiels ou des champs) est également un état possible.

Il est alors possible d'écrire la relation entre charge et potentiels, forcément un peu plus compliquée que dans le cas d'un conducteur isolé :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{array} \right. \tag{8.6}$$

Ce système d'équations exprime que la charge Q_1 dépend linéairement du potentiel V_1, comme dans le cas d'un conducteur seul, mais aussi du potentiel V_2, puisqu'il y a un deuxième conducteur qui influence les charges.

Les C_{ij} sont les **coefficients de capacité**, qui ne sont pas identiques à la capacité d'un conducteur seul dans l'espace.

2.3 Conducteurs en influence totale

Considérons la configuration de la figure 8.7. Un conducteur creux (”conducteur 2”) entoure complètement un ”conducteur 1”.

Conducteur $\Rightarrow$ les charges sont sur la surface. La charge totale sur le conducteur 2 est donc $Q_2 = Q_2' + Q_2''$, Q_2' étant la charge à l'intérieur de la cavité, Q_2'' celle sur la surface extérieure du conducteur.

Nous allons supposer que le potentiel V_2 du conducteur externe est nul (relié à l'infini par un fil métallique par exemple).

Voyons les conséquences.
– Puisque $V_2 = 0$, les charges totales dépendent du potentiel V_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = C_{11}V_1 \\ Q_2 = C_{21}V_1 \end{array} \right. \tag{8.7}$$

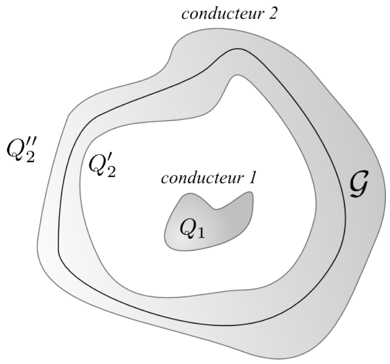

FIGURE 8.7

- Toutes les lignes de champ ont une extrémité sur le conducteur 1 et l'autre sur le conducteur 2. Si on applique le principe des éléments correspondants (voir ci-dessus), on a $Q'_2 + Q_1 = 0$
- Puisque $V_2 = 0 = V_\infty$, il n'y a pas de variation de potentiel à l'extérieur du conducteur 2 donc le champ extérieur est nul $\vec{E}_{ext} = 0$. Donc la charge $Q''_2 = 0$
- Mis ensemble, les points précédents donnent

$$Q_2 = -Q_1 \quad \Rightarrow \quad C_{11} = -C_{21} \tag{8.8}$$

La dernière égalité $C_{11} = -C_{21}$ définit deux conducteurs en **influence totale**. On peut mieux s'en rappeler en pensant que toutes les lignes de champ partant d'un conducteur se terminent sur l'autre.

Dans un cas très général (pas seulement $V_2 = 0$ comme ici), on montre que les deux coefficients C_{12} et C_{21} dans le système d'équations 8.6 sont égaux :

$$C_{12} = C_{21} \tag{8.9}$$

3 Condensateurs

3.1 Définitions

Un **condensateur** est un ensemble de 2 conducteurs en influence totale. On appelle $Q = Q_1$ la charge du condensateur, charge de l'armature interne de l'exemple de la section 2.3.

On appelle **capacité** du condensateur le coefficient de capacité C_{11} :

$$C = C_{11} = -C_{21} = -C_{12} \tag{8.10}$$

alors, la charge du condensteur s'écrit en fonction de potentiels V_1 et V_2 (pas forcément nul) :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \quad \Rightarrow \quad Q = CV_1 - CV_2$$

d'où l'expression

$$Q = C(V_1 - V_2) \tag{8.11}$$

3.2 Calcul de capacité

Pour calculer une capacité, la recette est très souvent celle-ci :

- Le problème a en général une symétrie qui permet d'utiliser le théorème de Gauss. On calcule donc le champ en tout point de l'espace entre les conducteurs.
- Connaissant le champ, on applique la relation champ-potentiel 2.17 pour calculer la différence de potentiel entre les deux conducteurs :
$$V_1 - V_2 = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} \tag{8.12}$$
où l'intégrale se fait sur un chemin reliant le conducteur 1 au conducteur 2.
- Si la charge n'est pas connue ou si on n'utilise pas la charge totale Q dans le théorème de Gauss de la première étape ci-dessus, on peut la plupart du temps la calculer en s'aidant du théorème de Coulomb. Celui-ci donne la densité surfacique de charge σ_e. La charge totale est alors
$$Q = \iint_S \sigma_e \cdot dS \tag{8.13}$$
où l'intégrale se fait sur toute la surface du conducteur 1.
- Dernière étape, utiliser l'équation 8.11
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \tag{8.14}$$

Ca tient de la recette de cuisine... mais ça fonctionne assez bien pour des géométries simples (sphériques, planes,...).

4 Exemples, applications

Capacité d'un condensateur sphérique. À voir en TD (peut-être...)