

---

**Notes de cours de PHYS 708**  
**Méthodes et outils numériques**  
**de traitement du signal**

---

Damir Buskulic, 10 décembre 2010



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1	Definitions et notions de base	7
1.1	Signal et bruit . . . . .	7
1.2	Traitement du signal . . . . .	7
1.3	Notions de base . . . . .	9
2	Classification des signaux	10
3	Quelques signaux utiles	11
4	Corrélations	11
4.1	Intercorrélation . . . . .	11
4.2	Cas particulier : autocorrélation . . . . .	12
5	Introduction aux distributions	13
5.1	Problème "théorique" . . . . .	13
5.2	Distribution de Dirac . . . . .	14
5.3	Peigne de Dirac . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Représentation fréquentielle des signaux</b>	<b>17</b>
1	Introduction	17
1.1	Domaine temporel, domaine fréquentiel (ou spectral) . . . . .	17
1.2	Représentation fréquentielle . . . . .	18
2	Décomposition en série de Fourier	18
2.1	Définition . . . . .	19
2.2	Justifications . . . . .	20

2.3	Exemple . . . . .	20
3	Transformée de Fourier . . . . .	21
4	Quelques propriétés des transformées de Fourier . . . . .	22
5	Transformée de Fourier et énergie des signaux . . . . .	23
6	Exemples . . . . .	24
7	TF au sens des distributions . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Passage du signal continu au signal numérique . . . . .</b>	<b>25</b>
1	Avantages et inconvénients de la numérisation . . . . .	25
2	Chaîne de numérisation . . . . .	25
3	Echantillonnage . . . . .	26
4	Conséquences dans le domaine fréquentiel . . . . .	27
4.1	Spectre du signal après échantillonnage idéal . . . . .	27
4.2	Exemple de spectre, notion de repliement . . . . .	29
4.3	Théorème de Shannon . . . . .	29
4.4	Signaux à support en fréquence non borné . . . . .	30
5	Reconstruction d'un signal . . . . .	30
6	Quantification . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Systèmes linéaires continus . . . . .</b>	<b>31</b>
1	Définition et classification . . . . .	31
1.1	Exemples . . . . .	31
1.2	Définition . . . . .	31
1.3	Classification et caractéristiques . . . . .	31
1.4	Système LTI . . . . .	32
2	Réponse temporelle d'un système LTI . . . . .	32
2.1	Relation entrée/sortie . . . . .	32
2.2	Réponse impulsionnelle . . . . .	33
3	Réponse fréquentielle d'un système LTI . . . . .	34
3.1	Réponse à un signal monochromatique (sinusoïdal) . . . . .	34
3.2	Réponse fréquentielle d'un système LTI . . . . .	34

4	Transformée de Laplace	35
4.1	Définition	35
4.2	Convergence	35
4.3	Propriétés de la transformée de Laplace	36
5	Utilité des TL pour les systèmes LTI	36
5.1	TL appliquée à l'équa. diff d'un système LTI	36
5.2	Pôles, zéros et stabilité du système	37
5.3	Caractérisation d'un système LTI	38
<b>5</b>	<b>Filtrage analogique</b>	<b>39</b>
1	Introduction	39
1.1	Définition d'un "filtrage"	39
1.2	Filtrage temporel et fréquentiel	39
2	Caractérisation dans le domaine fréquentiel (filtres élémentaires)	39
2.1	Filtre passe bas	39
2.2	Autres filtres	40
2.3	Filtre physiquement réalisable	40
3	Filtres classiques	40
3.1	Exemple simple	40
3.2	Filtre de Butterworth	40
3.3	Adaptation au type de filtre	42
3.4	Caractérisation des filtres	42
3.5	Autres filtres	42



## 1 Définitions et notions de base

### 1.1 Signal et bruit

Un signal est la représentation d'une information (souvent dépendant d'un paramètre, par exemple le temps, mais pas forcément). Cette représentation a un support physique. Ce support sert à transmettre l'information.

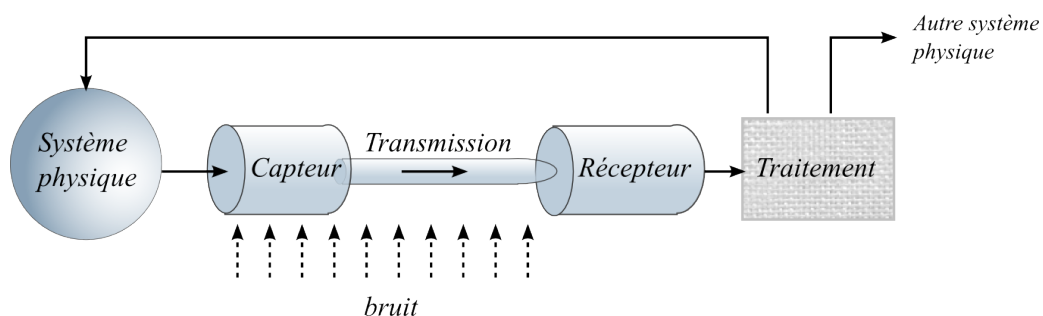
Exemples

- Signal électrique (support) sortant d'un microphone et représentant une information (parole, musique,...)
- Images (penser à l'astronomie) → signal 2D
- Vidéos
- Débit d'un fleuve en fonction du temps
- EEG, ECG (biologie)
- 

Bruit = phénomène perturbant la perception ou l'interprétation d'un signal

### 1.2 Traitement du signal

Techniques pour **créer**, **transformer** et **analyser** les signaux en vue de leur exploitation. On se bat contre le bruit, on veut conserver et/ou extraire le maximum d'information utile d'un signal généralement bruité.

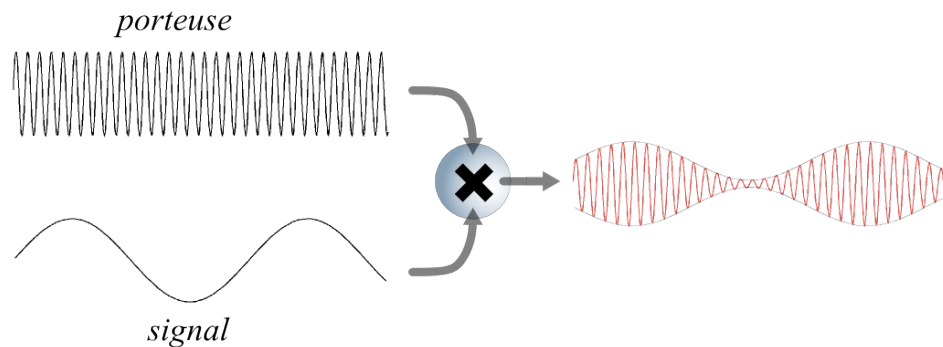


Le traitement du signal comprend par exemple : le contrôle, le filtrage, la compression de données, la transmission de données, le débruitage, la déconvolution, la prédiction, l'identification, la classification,...

### Création de signaux

Synthèse : combinaison de signaux élémentaires pour créer des signaux complexes. Par exemple écrire une lettre. Autre exemple, synthèse d'un signal temporel par ajout de signaux purs monochromatiques.

Modulation : on adapte un signal au canal de transmission. Par exemple modulation de fréquence ou modulation d'amplitude



*Recherche personnelle : rechercher des exemples de modulation*

### Transformation de signaux

Adaptation du signal aux besoins

- Filtrage : élimination de certaines portions ou composantes.
  - Craquements dans un vieil enregistrement
  - Annulation d'écho
  - Filtre pour la reconnaissance de forme / détection de contours
- Codage : sécurité, signaux numériques de la TNT,
- Compression : jpeg, mp3, mpeg4

### Analyse de signaux

Liée à ou utilisée pour l'interprétation des signaux

- Détection : séparation d'un signal du bruit de fond, extraction de composantes utiles
- Identification et classification : reconnaissance de la parole, vision artificielle (identification de produits défectueux sur une chaîne de production)



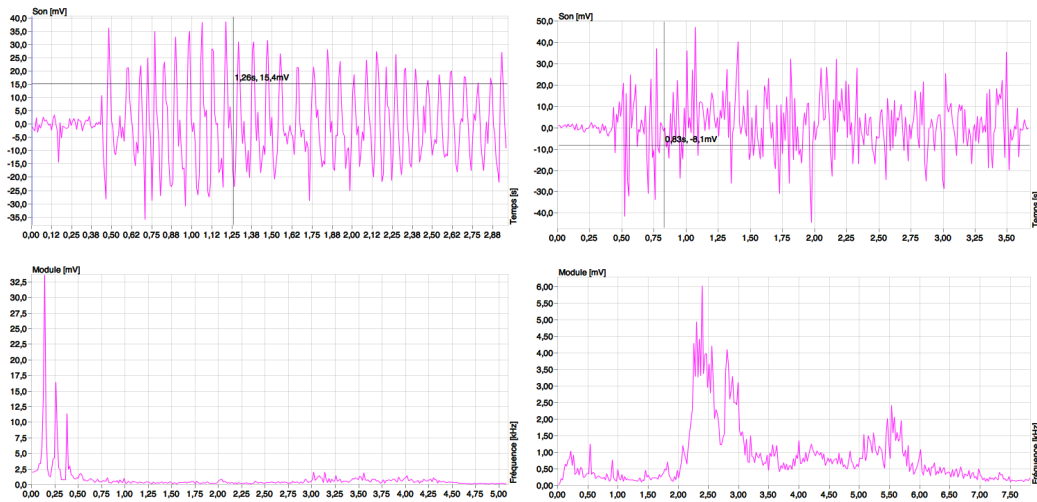


FIG. 1.1: Exemple d'évolution temporelle et de spectre d'un son voisé ("i", image de gauche) et non voisé ("ch", image de droite)

### 1.3 Notions de base

Dans tout ce qui suit, on prendra très souvent des signaux dépendant du temps mais il est bien entendu que les notions présentées peuvent être adaptées aux signaux dépendant d'un paramètre quelconque et quelque soit leur dimension.

#### Déterministe ou aléatoire ?

Signal peut être

- **déterministe** : on peut concevoir un modèle qui prévoit le signal au cours du temps.
- **stochastique** ou **aléatoire** (c'est la même chose) : l'évolution du signal est aléatoire, on ne peut pas la prédire à priori. Outils statistiques nécessaires.

Un signal aléatoire peut en outre être **stationnaire**, c'est à dire que ses propriétés statistiques ne changent pas au cours du temps.

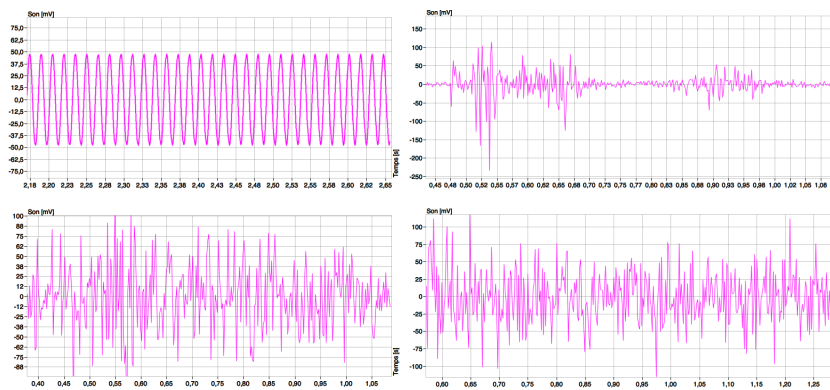


FIG. 1.2: Exemple de signal déterministe (image de gauche, en haut), aléatoire (image de gauche, en bas) non stationnaire (image de droite en haut) stationnaire (image de droite en bas)

### Energie et puissance d'un signal

On utilise souvent la notion d'**énergie** et de **puissance** d'un signal. Ces notions viennent par extension d'un cas pratique. Imaginons une tension variable  $v$  aux bornes d'une résistance  $\rho = 1 \Omega$ . La puissance instantanée sera  $P = v^2/\rho$ . Par convention, on a gardé cette notion de "puissance" comme une quantité proportionnelle à l'amplitude au carré, et celle associée "d'énergie" dans le cas de signaux non électriques.

En traitement du signal, l'énergie et la puissance d'un signal  $a(t)$  non périodique sont donc naturellement données par :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt, \quad P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |a(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

Dans le cas d'un signal périodique, on calcule la puissance sur une période.

Cette puissance est bien homogène à  $[E/t]$ .

### Rapport signal sur bruit

Vous verrez plus précisément dans le cours "Signaux et bruit" cette notion de rapport signal sur bruit.

Tout signal mesuré comporte du bruit, c'est à dire une composante aléatoire. Notion de bruit dépend du contexte. Par exemple

- pour l'ingénieur télécom,
  - Ondes radio d'un satellite = signal
  - Ondes radio d'une source astrophysique (pulsar...) = bruit
- pour l'astrophysicien,
  - Ondes radio d'un satellite = bruit
  - Ondes radio d'une source astrophysique (pulsar...) = signal

Un signal  $a(t)$  dépendant du temps contient une composante aléatoire  $b(t)$  (bruit) et une composante déterministe  $s(t)$  (signal) :

$$a(t) = s(t) + b(t) \quad (1.2)$$

Introduit la notion de **rapport signal sur bruit** pour quantifier la qualité d'un signal :

$$R_{S/B} = \frac{P_s}{P_b} \quad (1.3)$$

$P_s$  est la puissance du signal,  $P_b$  celle du bruit.

## 2 Classification des signaux

Classification

- **dimensionnelle** :
  - signal 1D monodimensionnel, fonction d'un seul paramètre (pas forcément  $t$ )
  - signal 2D bidimensionnel : image
  - signal 3D tridimensionnel : film = ensembles d'images en fonction du temps
- **comportementale** ou **phénoménologique** : selon que le signal est déterministe ou non, stationnaire ou non, etc... voir figure 1.3

*Recherche personnelle : faire des recherches sur l'ergodicité*

- **énergétique** :
  - signaux à énergie finie (puissance moyenne nulle) = généralement signaux physiques
  - infinie (puissance moyenne non nulle) : c'est le cas des signaux périodiques

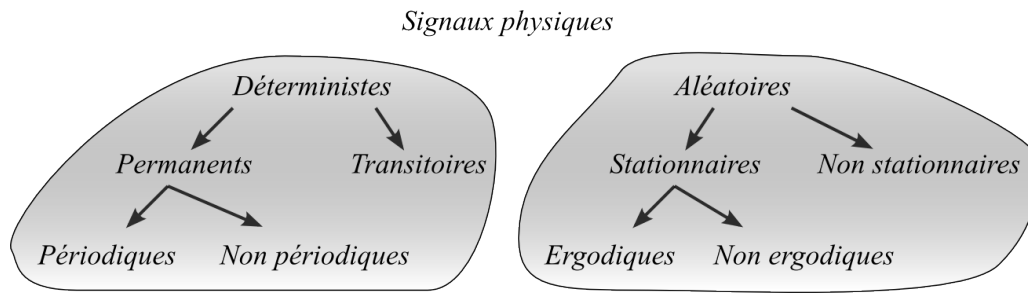


FIG. 1.3: Classification comportementale des signaux

### 3 Quelques signaux utiles

- **échelon** = établissement instantané d'un régime continu

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

- **porte (ou rectangle)** = différence de deux échelons

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec  $\tau$  la largeur de la porte.

- **exponentielle décroissante** :  $y(t) = \gamma(t).e^{-at}$  avec  $a > 0$
- **signaux périodiques simples** : sinus...

## 4 Corrélations

### 4.1 Intercorrélation

#### Définition

On veut comparer un signal  $x(t)$  à un signal  $y(t)$ , éventuellement en les décalant l'un par rapport à l'autre. L'intercorrélacion mesure la similitude entre ces deux signaux. Pour des signaux **réels** (pas complexes), la fonction d'intercorrélacion s'écrit :

- pour les signaux à énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y(t - \tau)dt \quad (1.4)$$

- pour les signaux à énergie infinie :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t).y(t - \tau)dt \quad (1.5)$$

#### Interprétation

On veut comparer la **forme** de deux signaux. On va supposer qu'ils ont la même énergie totale, et qu'on peut la calculer, évidemment, c'est à dire qu'elle n'est pas infinie.

Commençons par un signal simple, un signal porte. Les deux paramètres que l'on peut faire varier sont la largeur de la porte ( $T$ ) et la hauteur ( $A$ ). L'énergie (voir sa définition ci-dessus) pour un signal porte est simplement (faire le détail du calcul...)

$$E_T = A^2.T \quad (1.6)$$

La figure 1.4 montre deux signaux porte ayant la même énergie mais avec des valeurs de  $T$  différentes.

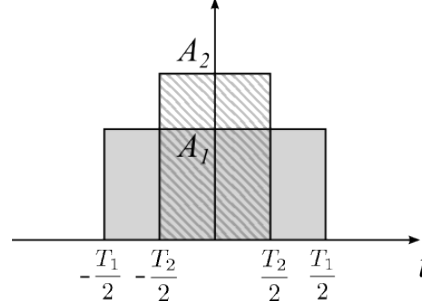


FIG. 1.4: Exemple de signaux "porte". Si les deux signaux ont la même énergie, leur intercorrélacion est maximale lorsqu'ils sont identiques

La valeur de l'intercorrélacion entre ces deux signaux si on suppose un décalage  $\tau = 0$  et  $T_2 < T_1$  est :

$$C_{xy} = A_1.A_2.T_2 \quad (1.7)$$

Or comme les deux signaux ont la même énergie, on a  $A_1^2.T_1 = A_2^2.T_2 \Rightarrow A_2 = A_1\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$  donc l'intercorrélacion s'écrit

$$C_{xy} = A_1.\sqrt{T_1.T_2} \quad (1.8)$$

Puisque  $T_2 < T_1$ , ce produit sera maximal pour  $T_2 = T_1$ , c'est à dire lorsque les deux signaux seront identiques. Un raisonnement similaire peut être fait lorsque  $T_2 > T_1$ , et on obtient le même résultat. On voit bien intuitivement que si l'on a deux fonctions bornées en temps (pas forcément des fonctions porte), on peut les découper en petits éléments  $dt$  et faire le même raisonnement que ci-dessus. L'intercorrélacion sera maximale pour deux fonctions ayant exactement la même forme.

Imaginons que nous ayons une forme d'onde donnée (figure 1.5) et que nous cherchions à savoir si elle se cache dans un signal bruité. Il suffit de décaler cette fonction d'une valeur  $\tau$  et de calculer l'intercorrélacion avec le signal.

La valeur  $C_{xx}(\tau)$  sera maximale lorsque le décalage correspondra à la position exacte où les deux signaux se ressemblent le plus.

## 4.2 Cas particulier : autocorrélacion

L'autocorrélacion est une intercorrélacion du signal avec une version décalée de lui-même :

– pour les signaux à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x(t-\tau)dt \quad (1.9)$$

– pour les signaux à énergie infinie :

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t).x(t-\tau)dt \quad (1.10)$$

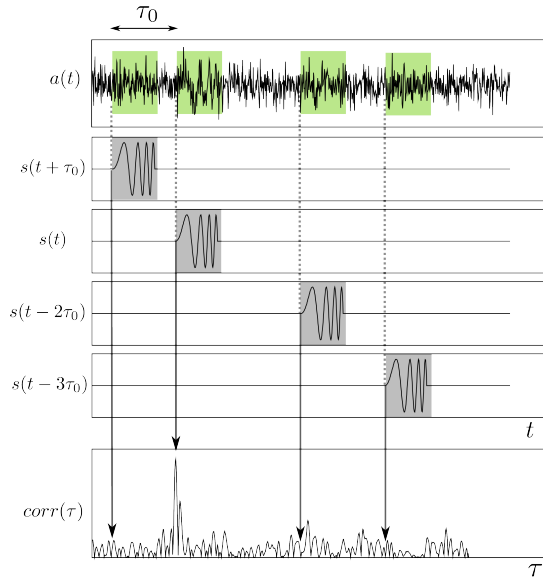


FIG. 1.5: On calcule la valeur absolue de l'intercorrélation  $|a \star s(\tau)|$  (graphe du bas) entre deux signaux  $a(t)$  et  $s(t)$  en fonction d'un décalage  $\tau$  de  $s(t)$ . La valeur maximale est obtenue lorsque  $s(t)$  "ressemble" le plus à  $a(t)$ . Ici, on a construit  $a(t)$  comme la somme de  $s(t)$  commençant à un temps  $\tau_0$  et d'un signal aléatoire gaussien.

elle indique pour quelles valeurs du décalage  $\tau$  le signal "se ressemble". Ceci sert à détecter des régularités du signal pas forcément visibles à l'oeil. Propriétés :

- $|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0)$ . Valeur max pour décalage nul
- $x(t)$  périodique  $\Rightarrow C_{xx}(t)$  périodique, même période
- $C_{xx}(t)$  paire pour des signaux réels.

## 5 Introduction aux distributions

### 5.1 Problème "théorique"

Petit problème "théorique" : soit le schéma électrique de la figure 1.6 qui permet de charger ou décharger un condensateur "instantanément" si l'on suppose que tous les composants et éléments sont idéaux.

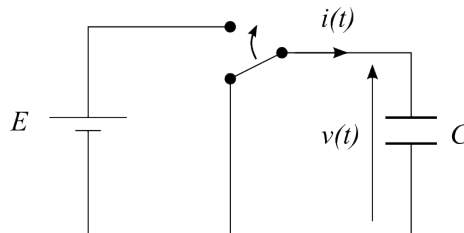


FIG. 1.6: Charge instantanée (en théorie...) d'un condensateur

Si l'on ferme l'interrupteur, le condensateur initialement déchargé se charge instantanément. La tension à ses bornes devient donc égale à  $E$  en un temps nul. Elle s'écrit  $v(t) = (0 \text{ si } t < 0, E \text{ si } t \geq 0)$ , c'est une fonction

discontinue.

Question : à quoi est égal le courant  $i(t)$  ?

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad (1.11)$$

donc  $i(t) = 0$  partout sauf en  $t = 0$  puisque  $v(t)$  n'est pas continue en ce point. Pourtant, le condensateur s'est chargé, il y a eu transfert de charge depuis le générateur  $E$ . Et l'intégrale de  $i(t)$  représente justement cette charge :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i(t) dt = Q_C = C.E \quad (1.12)$$

$i(t)$  ne peut pas être infinie en  $t = 0$ , sinon l'intégrale ne serait pas définie et on pourrait avoir des choses bizarres comme  $2i(t) = i(t)$ ...

## 5.2 Distribution de Dirac

La fonction  $i(t)$  n'en est pas une, c'est une extension du concept de fonction que l'on nomme une **distribution**. Son petit nom est **distribution de Dirac**. On peut la voir comme la limite d'une fonction porte lorsque l'on fait tendre  $T$  vers 0 tout en gardant l'aire constante. On peut aussi remplacer "porte" par "gaussienne" et faire la même chose. La forme de la fonction de départ n'est pas critique.

### Définition

Si  $f$  est une fonction, la distribution de Dirac  $\delta$  (appelée aussi impulsion de Dirac) est définie par la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0) \quad (1.13)$$

On dit aussi que la distribution de Dirac agit sur la fonction  $f$  :

$$\delta(f) = f(0) \quad (1.14)$$

Aucune "fonction" ne vérifie cette propriété. On représente la distribution de Dirac par une flèche sur l'axe des ordonnées en  $t = 0$  (figure 1.7).

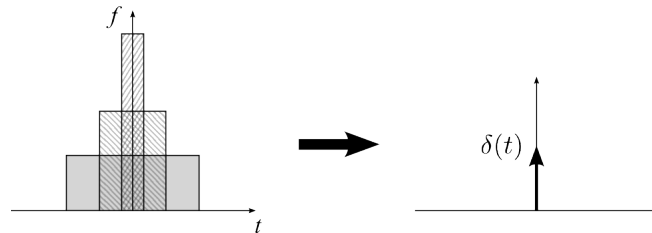


FIG. 1.7: Une distribution de Dirac est la limite d'une fonction porte dont l'aire reste constante mais la hauteur tend vers l'infini

### Propriétés

- Dirac = signal de durée nulle et d'énergie finie, égale à 1

- On note (abus de notation)  $\delta_{t_1} = \delta(t - t_1)$ , impulsion de Dirac à l'instant  $t_1$ . Appliquée à une fonction  $\varphi$ , on a

$$\delta_{t_1}(\varphi) = \varphi(t_1) \quad (1.15)$$

- $\delta(f_1 + f_2) = \delta(f_1) + \delta(f_2)$
- $\delta(\lambda.f) = \lambda.\delta(f)$
- la distribution de Dirac peut être vue comme la dérivée d'un échelon

### 5.3 Peigne de Dirac

Somme infinie d'impulsions de Dirac régulièrement espacées :

$$\text{III} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) \quad (1.16)$$





## Représentation fréquentielle des signaux

### 1 Introduction

#### 1.1 Domaine temporel, domaine fréquentiel (ou spectral)

Phénomène  $P(\alpha)$  dépendant du paramètre  $\alpha$  (le temps la plupart du... temps). Si  $P(\alpha)$  est périodique, fréquence  $f$  = nombre de fois que le phénomène se reproduit par unité de  $\alpha$ .

Exemple avec le temps. Si  $T$  est la période,  $f = 1/T$ . Unité : le Hertz ( $= s^{-1}$ ).

Pour un son : aigu = hautes fréquences, grave = basses fréquences.

.... *ajouter figure fréquence* ....

La fréquence apporte un certain type d'information.

Exemples :

- Son : voix, musique,...
- Onde lumineuse : correspondance couleurs  $\Leftrightarrow$  longueur d'onde ou fréquence
- Image : surfaces = basses fréquences, contours = hautes fréquences. On parle de fréquences "spatiales".



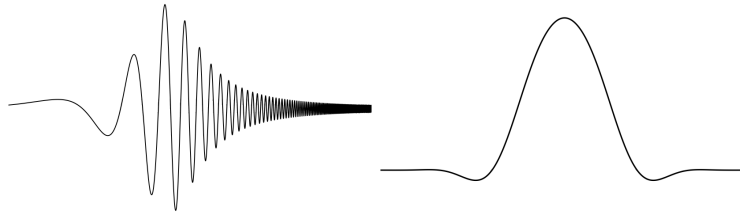
FIG. 2.1: Exemple de filtrage d'une image. On a enlevé les fréquences basses (les aplats) dans l'image de droite

## 1.2 Représentation fréquentielle

Interprétation de la fréquence d'un signal parfois plus utile que la forme de sa variation au cours du temps → représentation fréquentielle. Comment représenter l'information de fréquence d'un signal ?

Un signal a-t-il une "composition" en fréquence ?

- signal sinusoïdal  $x(t) = X_0 \sin(2\pi f_0 t) \rightarrow$  fréquence =  $f_0$ ... facile !
- et pour les signaux suivants :



c'est moins facile...

Pourtant, si on ajoute plusieurs signaux monochromatiques (sinusoïdes simples) de fréquence différentes, on obtient par exemple :

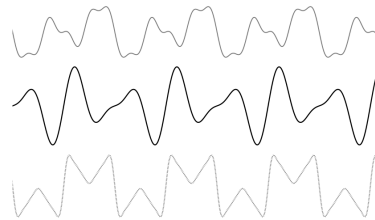
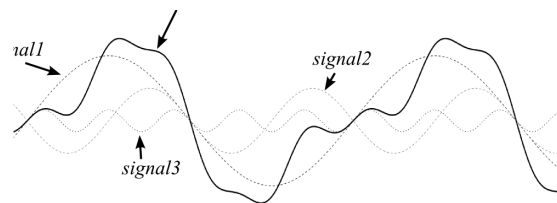


FIG. 2.2:

Des signaux complexes peuvent être représentés par une somme de sinus (ou cosinus d'ailleurs... pourquoi ?)



## 2 Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique de période  $T$  peut se décomposer en une somme de fonctions sinus et cosinus de fréquences multiples de  $f_0 = 1/T$ . C'est la décomposition en série de Fourier.  $f_0$  est la fréquence fondamentale.

Cette décomposition constitue le lien entre la représentation temporelle d'un signal et sa représentation fréquentielle.

## 2.1 Définition

### Forme trigonométrique

Signal  $x(t)$  périodique, de période  $T$  peut s'écrire

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ A_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right] \quad (2.1)$$

On peut calculer les coefficients de la série :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (2.2)$$

### Forme complexe

Utilise l'expression des sinus et cosinus sous forme d'exponentielles (formule de Moivre  $\exp(j\theta) = \cos\theta + j \cdot \sin\theta$ ) :

$$\cos\theta = \frac{\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)}{2} \quad \sin\theta = \frac{\exp(j\theta) - \exp(-j\theta)}{2j} = j \cdot \frac{\exp(-j\theta) - \exp(j\theta)}{2} \quad (2.3)$$

Desquelles on peut déduire la décomposition de  $x(t)$  en somme d'expo. :

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ (A_n - jB_n) \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) + (A_n + jB_n) \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} t\right) \right] \quad (2.4)$$

Si on pose

$$C_0 = \frac{A_0}{2} \quad (2.5)$$

$$C_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \quad \text{si } n > 0 \quad (2.6)$$

$$C_n = \frac{A_{(-n)} + jB_{(-n)}}{2} \quad \text{si } n < 0 \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

On peut écrire une forme simple de la décomposition :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (2.9)$$

avec une expression des coefficients  $C_n$  :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (2.10)$$

On appelle les  $C_n$  les **coefficients de Fourier** de  $x(t)$ . C'est leur ensemble qui forme la représentation fréquentielle du signal  $x(t)$ .

## 2.2 Justifications

### Pourquoi les nombres complexes ?

Plus faciles à manipuler pour des phénomènes périodiques. Exemple, lien entre courant et tension dans des circuits contenant R, L et C :

	résistance	inductance	capacité
en utilisant des réels	$v = Ri$	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{dv}{dt}$
en utilisant des complexes et $v = Zi$	$v = Ri$	$v = (jL\omega)i$	$v = \frac{j}{C\omega}.i$

L'utilisation de complexes permet de remplacer des équations différentielles par des expressions et équations algébriques.

### Interprétation vectorielle

On peut se représenter une transformée de Fourier comme la décomposition d'un vecteur sur une base dans un espace vectoriel. On fait pour commencer une analogie, les vecteurs de l'espace vectoriel étant des fonctions. Dans un espace vectoriel habituel, de dimension  $N$ , un vecteur  $\vec{v}$  peut s'écrire sur une base de  $N$  vecteurs  $\vec{u}_i$  :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^N c_i \vec{u}_i \quad (2.11)$$

où les  $c_i$  sont les coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base  $\vec{u}_i$ .

On décide de se placer dans l'espace abstrait des "fonctions périodiques de période  $T$ ", tel que toute fonction est appelée "vecteur". L'expression 2.9 ressemble à la décomposition d'un vecteur ( $x(t)$ ) sur une base dont les vecteurs de base seraient les fonctions  $\exp(-jn\frac{2\pi}{T}t)$  et les  $C_n$  les coordonnées de ce vecteur.

Un "petit détail" est que le nombre de vecteurs de base est ici infini...

Quand on parle de "base" dans un espace vectoriel, on définit souvent un produit scalaire, parce qu'il faut bien exprimer le fait que deux vecteurs sont orthogonaux. Dans notre cas, le produit scalaire est défini par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot g^*(t) dt \quad (2.12)$$

où le signe "\*" désigne la conjugaison complexe.

Dans un espace vectoriel habituel, pour calculer la coordonnée  $c_i$  du vecteur  $\vec{v}$  selon la direction du vecteur de base  $\vec{u}_i$ , on réalise le produit scalaire de  $\vec{v}$  et de  $\vec{u}_i$  :  $c_i = \vec{v} \cdot \vec{u}_i$ . Ceci ne marche que si les vecteurs de base sont orthogonaux.

On reconnaît dans l'expression 2.10 des coefficients  $C_n$  un produit scalaire tel que définit ci-dessus. On peut vérifier que les vecteurs de base sont orthogonaux entre eux en calculant le produit scalaire  $\langle \exp(-jn\frac{2\pi}{T}t), \exp(-jm\frac{2\pi}{T}t) \rangle$ . Ce produit est nul pour  $n \neq m$  (d'accord, ce n'est pas immédiat... à compléter).

L'analogie que nous venons de développer peut se justifier rigoureusement et prend tout son sens dans le cas de la transformée de Fourier que nous allons voir plus loin.

## 2.3 Exemple

Exemple, faisons la décomposition en série de Fourier de la fonction porte périodique  $P_T(t)$ , d'amplitude  $A$  entre  $-t_0/2$  et  $+t_0/2$ , 0 ailleurs, répété avec une période  $T$ .

Les coefficients de la décomposition se calculent :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_T(t) \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (2.13)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} A \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (2.14)$$

$$= \frac{A}{T} \left[ -\frac{1}{jn \frac{2\pi}{T}} \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} t\right) \right]_{-t_0/2}^{t_0/2} \quad (2.15)$$

$$= \frac{A}{T} \frac{1}{n \frac{\pi}{T}} \left[ -\frac{1}{2j} \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} \frac{t_0}{2}\right) + \frac{1}{2j} \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} \frac{-t_0}{2}\right) \right] \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

L'expression entre crochets n'est rien d'autre que  $\sin\left(\frac{n\pi t_0}{T}\right)$  sous forme d'exponentielles complexes. On a donc une expression simple des coefficients de Fourier :

$$C_n = \frac{A}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi t_0}{T}\right) \quad (2.18)$$

Petit détail : dans le cas de  $C_0$ , on trouve  $C_0 = At_0/T$  (faites le calcul!).

Et donc la fonction  $P_T$  peut se décomposer en série de Fourier :

$$P_T = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{A}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi t_0}{T}\right) \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (2.19)$$

A faire en cours : représentation des  $C_n$ , spectre de raies...

### 3 Transformée de Fourier

Pour les signaux périodiques, ça fonctionne. Quid des signaux non périodiques ? Un signal non périodique peut être vu comme un signal de période infinie. Dans la décomposition en série de Fourier, les fréquences des fonctions sont des multiples de  $f_0 = 1/T$  (= harmoniques de  $f_0$ ). Si  $T \rightarrow \infty$ ,  $f_0 \rightarrow 0$ , l'écart entre les raies du spectre devient infiniment petit, la représentation fréquentielle devient continue.

On parle alors de **transformée de Fourier**.

Donner un exemple graphique

Passer du discret au continu, c'est passer de la somme à l'intégrale. Il nous faut déterminer la variable qui varie dans la somme discrète 2.10 pour en faire notre variable d'intégration. Dans 2.9, la somme est réalisée sur la variable  $n$ . Si par commodité on réécrit la somme en introduisant un facteur  $\Delta n = (n+1) - n = 1$  (ça semble un peu artificiel, mais ça permet le passage à l'intégrale) :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) \Delta n \quad (2.20)$$

et si on pose  $\omega_n = 2\pi n/T$  (on reconnaît la pulsation correspondant à l'harmonique  $n$ ), on peut remplacer  $\Delta n$  :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right) \frac{T}{2\pi} \Delta \omega \quad (2.21)$$

où  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n$  est la différence de pulsation lorsqu'on passe d'une fonction harmonique à la suivante. Le passage à l'intégrale est alors facile. Si  $\Delta\omega \rightarrow 0$  lorsqu'on augmente la période  $T$  (pour passer du cas périodique au cas non périodique), on peut remplacer  $\Delta\omega$  par  $d\omega$  infinitésimal et écrire l'intégrale :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) \exp(j\omega t) \frac{T}{2\pi} d\omega \quad (2.22)$$

Avec  $T \rightarrow \infty$ . Les coefficients de Fourier ne dépendent plus d'une variable discrète  $n$  mais d'une variable continue  $\omega$ . Ils peuvent se calculer :

$$C(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (2.23)$$

Toujours avec  $T \rightarrow \infty$ . On voit que l'intégrale  $x(t)$  ne dépend plus de  $T$  puisque  $C(\omega) \sim 1/T$  et  $x(t) \sim T$ . On peut donc simplement éliminer ce paramètre infini qui ne joue finalement aucun rôle. De plus, on a l'habitude de symétriser le facteur  $1/2\pi$ , voir ci-dessous.

On définit la **transformée de Fourier** d'un signal  $x(t)$  (en utilisant des notations à peine différentes) par

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (2.24)$$

et on appelle la "décomposition de Fourier" la **transformée de Fourier inverse** :

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j2\pi ft) dt \quad (2.25)$$

## Notations

On notera la transformée de Fourier de  $x(t)$  et son inverse :

$$X(f) = \mathcal{F}(x(t)) \quad \text{et} \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(\omega))$$

## 4 Quelques propriétés des transformées de Fourier

- **Linéarité** :  $a.x(t) + b.y(t) \xrightarrow{TF} a.X(f) + b.Y(f)$
- **Changement d'échelle** :  $x(a.t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$   
contraction dans le domaine temporel = dilatation dans le domaine fréquentiel et inversement
- **Dérivation** :
- **Intégration** :
- **Parité** :  
 $x(t)$  réelle paire  $\xrightarrow{TF} X(f)$  réelle paire  
 $x(t)$  réelle impaire  $\xrightarrow{TF} X(f)$  imaginaire pur et impaire
- $x(-t) \xrightarrow{TF} X(-f)$
- **Signaux réels** : Si  $x(t)$  est réel, alors  $X(f) = X^*(-f)$ . Conséquence sur module et argument ?
- **Signaux imaginaires purs** : Si  $x(t)$  est imaginaire, alors  $X(f) = -X^*(-f)$
- **Décalage temporel** :  $x(t - t_0) \xrightarrow{TF} \exp(-j2\pi f t_0) X(f)$
- **Décalage fréquentiel** :  $\exp(j2\pi f_0 t) x(t) \xrightarrow{TF} X(f - f_0)$

### Dualité de la TF

à voir en TD

## 5 Transformée de Fourier et énergie des signaux

Théorème de Parseval, que l'on va donner sans démonstration.

Dans le cas où les intégrales existent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.26)$$

Ce qui se traduit par : la transformée de Fourier conserve l'énergie du signal. C'est une transformation unitaire.

L'une des questions qui se pose naturellement lorsqu'on étudie un signal est : "Quelle " *quantité* " de signal est présente à une fréquence  $f$  donnée ?". La notion de quantité est ici volontairement laissée floue pour le moment. Pour un signal **déterministe** (non aléatoire)  $x(t)$ , la transformée de Fourier  $\tilde{x}(f)$  peut suffire à décrire une série temporelle dans le domaine fréquentiel. Dans le cas d'un signal **stochastique** (série temporelle aléatoire), une transformée de Fourier ne donne l'information que pour une réalisation de la série temporelle (un cas particulier).

La TF conservant l'énergie, on peut définir une notion d'énergie par unité de fréquence. C'est ce que l'on appelle la **densité spectrale d'énergie**. On rappelle que l'énergie totale du signal est définie par

$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.27)$$

et donc (Parseval) :

$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.28)$$

on définit naturellement d'après ce qui précède la densité spectrale d'énergie par

$$E(f) = |X(f)|^2 \quad (2.29)$$

mais comme on l'a vu, ceci n'a pas réellement d'utilité pour un signal **stochastique**. On définit la densité spectrale d'énergie dans ce cas comme l'espérance mathématique (correspondant à un nombre infini de réalisations du signal)

$$E(f) \equiv E \left[ \left| \tilde{X}(f) \right|^2 \right]$$

bien entendu, seulement si cette espérance existe.

Pour définir la **densité spectrale de puissance**, on est tenté de prendre une moyenne temporelle de l'énergie comme dans l'équation 1.1. Mais, toujours dans le cas stochastique, il faut faire attention au fait que la fonction  $a(t)$  peut ne pas être de carré sommable et que  $\tilde{X}(f)$  peut ne pas être défini au sens des fonctions. On arrive à donner une définition cohérente en considérant des fonctions tronquées

$$x_T(t) \equiv \{ x(t) \text{ si } |t| < T, 0 \text{ sinon } \}$$

La définition de la densité spectrale de puissance est alors :

$$P_X(f) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[ |\tilde{x}_T(f)|^2 \right]}{2T} \quad (2.30)$$

Point intéressant, on montre que pour des processus stochastiques stationnaires, il y a une relation de Fourier entre la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation. C'est le *théorème de Wiener-Khinchine* :

$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

La plupart des auteurs utilisent d'ailleurs cette relation comme une définition de la densité spectrale de puissance.

Dans la plupart des cas qui nous occupent, la fonction  $x(t)$  est réelle et dans ce cas, la densité spectrale  $P(f)$  est une fonction réelle, positive et paire. On peut donc utiliser ce que l'on nomme la *densité spectrale de puissance unilatérale*

$$P_X^{SS}(f) = P_X(f) + P_X(-f) = 2.P_X(f) \quad (2.31)$$

## 6 Exemples

### Exemple 1

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

→ sinus cardinal

### Exemple 2

exponentielle multiplié par échelon (voir paragraphe 3 du chapitre précédent) :

$$x(t) = \gamma(t) \cdot \exp(-at) \quad \text{avec } a > 1$$

## 7 TF au sens des distributions



## Passage du signal continu au signal numérique

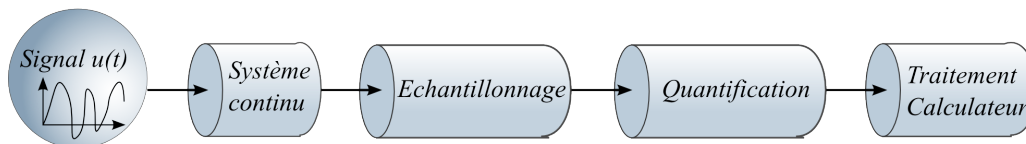
Numérisation = passage d'une information continue  $x(t)$  (en temps et en amplitude) à un ensemble d'informations discrètes  $x_i(t_k)$ , aussi bien en temps qu'en amplitude. Un signal numérique est une suite de valeurs, codées sous forme binaire (suite de 0 et de 1).

### 1 Avantages et inconvénients de la numérisation

- Numériser = perdre de l'information
- Permet l'utilisation de machines de traitement de l'information (ordinateurs, processeurs,...)
  - Flexibilité : on peut facilement modifier un logiciel, moins un montage électronique
  - Puissance : les traitements complexes sur ordinateur sont devenus plus efficaces que les traitements analogiques
  - Coût
- Une fois numérisé, la transmission du signal est très robuste (0/1 codé en 0/5V, un ajout d'erreur sur la tension ne change pas la valeur 0 ou 1)

Analogique et numérique ne peuvent pas se comparer en termes de qualité, chacun a ses utilisations.

### 2 Chaîne de numérisation



Les étapes principales de numérisation d'un signal sont les suivantes :

### Echantillonnage

prélèvement du signal continu à des temps discrets  $t_n$  séparés par un intervalle (généralement fixe)  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  appelé **période d'échantillonnage**.

Résultat : suite de valeurs  $x(t_n)$ ,  $t_n = n.\Delta t$ .

### Quantification

Chaque valeur  $x(t_n)$  est transformée en une valeur approchée  $x_e(t_n) = m.q$  qui est un multiple entier  $m$  d'une quantité élémentaire  $q$ . Cette quantité  $q$  est appelée **échelon de quantification**.

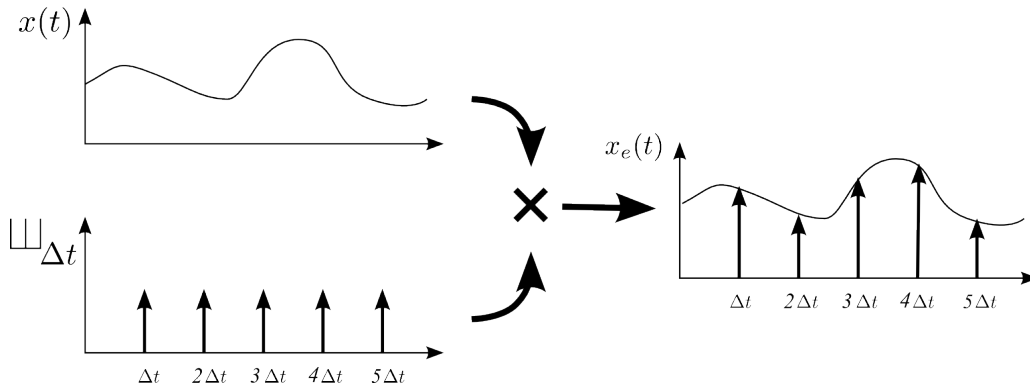
### Codage

transforme l'entier  $m$  en un mot binaire exploité par un calculateur.

## 3 Echantillonnage

Echantillonnage idéal : prélèvement pendant un temps infiniment court des valeurs de  $x(t)$  aux temps  $t = t_n = n.\Delta t$

Modélisation mathématique : produit de  $x(t)$  avec un peigne de Dirac  $\text{III}_{\Delta t}(t)$



$$x_e(t) = x(t) \cdot \text{III}_{\Delta t}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

les propriétés du peigne de Dirac donnent :

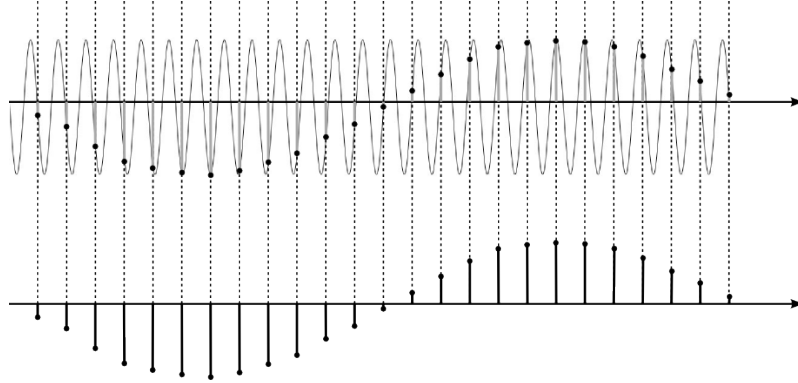
$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n\Delta t) \cdot \delta(t - n\Delta t)$$

## 4 Conséquences dans le domaine fréquentiel

### 4.1 Spectre du signal après échantillonnage idéal

#### Analogie stroboscopique

Supposons que nous réalisons l'échantillonnage à une fréquence  $f_e$  d'un signal qui a une fréquence fondamentale  $f_0$  plus grande que  $f_e$ . Le fait de prendre des échantillons régulièrement espacés reconstruit un signal



qui a la même forme que le signal initial, mais de fréquence plus faible. L'effet est le même que lorsqu'on fait de la stroboscopie. Dans le spectre, cela revient à déplacer une fréquence.

#### Justification mathématique, notion de convolution

Nécessité de la notion de convolution.

**Convolution** Soient deux signaux  $f(t)$  et  $g(t)$ . On appelle produit de convolution l'intégrale suivante :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (3.1)$$

Remarque : ça ressemble beaucoup à une corrélation, sauf qu'une des fonctions est inversée dans le temps.

Exemple : calcul du produit de convolution d'un signal porte par  $g(t) = e^{-at}\gamma(t)$

Pour des suites, on a un cas discret (peu utilisé mais utile pour comprendre) :

$$(f * g)(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(n - m)g(m) \quad (3.2)$$

Pour une valeur de  $n$  donnée, on peut comprendre cette expression comme une moyenne de tous les  $f(n)$  pondérée par les différentes valeurs  $g(m) \rightarrow$  "moyenne mobile".

**Explication intuitive** Si on fait le produit de convolution d'une fonction  $f$  par une impulsion de Dirac :

$$(f * \delta_a)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)\delta_a(\tau)d\tau = f(t - a) \quad (3.3)$$

ce qui revient à faire une translation de la fonction  $f$ .

Si on somme plusieurs pics de Dirac en les pondérant ( $g = \alpha\delta_a + \beta\delta_b$ ), on voit que l'on va faire la somme de deux fonctions  $f$  pondérées par  $\alpha$  et  $\beta$  et décalées respectivement de  $a$  et  $b$ .

### Propriétés

- Commutativité
  - Associativité
  - Distributivité par rapport à l'addition
  - Élément neutre : impulsion de Dirac
  - Translation temporelle : Dirac retardé
  - Convolution avec un peigne de Dirac :
- Rappel, peigne de Dirac :  $\mathbf{III}_T = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$ .  
Convolution avec un ensemble de Dirac retardés :

$$(f * \mathbf{III}_T)(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - mT) \Rightarrow (f * \mathbf{III}_T)(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(t - mT) \quad (3.4)$$

Fonction périodique formée par la recopie de  $f$  autour de chaque pic de Dirac.

- Lien avec la TF. Sans démonstration,

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad (3.5)$$

et inversement :

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) \quad (3.6)$$

### T.F. du signal échantillonné

Signal  $x(t)$ . Après échantillonnage idéal à la période  $T_e$ , on calcule la T.F. :

$$\mathcal{F}[x_e(t)] = \mathcal{F}[(x \cdot \mathbf{III}_{T_e})(t)]$$

D'après le lien convolution-TF vu plus haut,

$$\mathcal{F}[x_e(t)] = \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[\mathbf{III}_{T_e}(t)]$$

D'après la théorie des distributions (à voir), la T.F. d'un peigne de Dirac est  $\mathcal{F}[\mathbf{III}_{T_e}(t)] = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$  avec  $F_e = 1/T_e$ . Donc

$$\mathcal{F}[x_e(t)] = X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$$

On en déduit que, comme le produit de convolution est distributif et qu'on a la propriété  $(f * \delta)(t - t_0) = f(t - t_0)$  le spectre de  $x_e$  s'écrit :

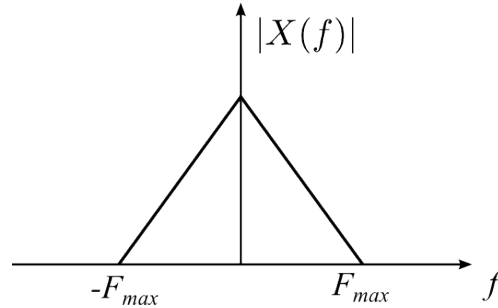
$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e)$$

où  $F_e = 1/T_e$  est la fréquence d'échantillonnage

Le spectre  $X_e(f)$  d'un signal échantillonné à la fréquence  $F_e$  est celui du signal non échantillonné répété avec une période fréquentielle  $F_e$ .

## 4.2 Exemple de spectre, notion de repliement

On considère un signal réel  $x(t)$  dont le spectre est borné en fréquence :



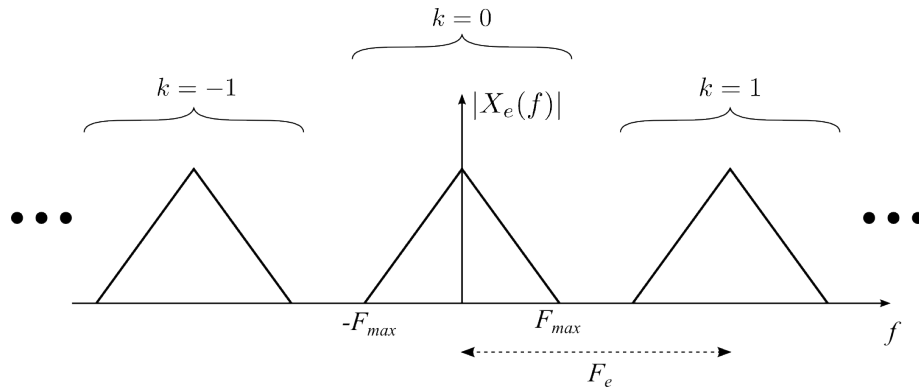
c'est à dire  $|f| > F_{max} \Rightarrow X(f) = 0$ .

Si on échantillonne le signal, on obtient le spectre :

$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_e)$$

deux cas :

- $F_e \geq 2F_{max}$   
pas de recouvrement des motifs élémentaires Le motif central, correspondant à  $k = 0$  est exactement



égal au spectre de  $x(t)$ . On peut donc extraire  $X(f)$  et reconstituer le signal  $x(t)$ . Il n'y a pas de perte d'information lors de l'échantillonnage.

- $F_e < 2F_{max}$   
Il y a recouvrement des motifs élémentaires de  $X_e(f)$  (voir figure 3.1) On parle de **repliement de spectres**. A cause des chevauchements, on ne peut plus récupérer le spectre  $X(f)$  du signal initial. On ne peut donc pas reconstruire  $x(t)$  à partir de  $x_e(t)$ . **Il y a perte d'information lors de l'échantillonnage.**

## 4.3 Théorème de Shannon

D'après la section précédente

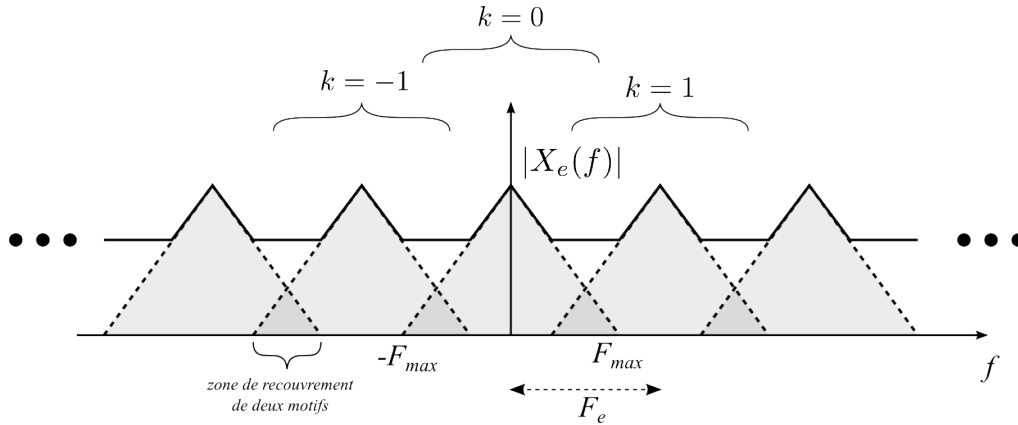


FIG. 3.1:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'échantillonnage d'un signal ne produise pas de perte d'information sont que le signal ait un support en fréquence borné (qu'il ait une fréquence maximale  $F_{max}$ ) et que la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  soit supérieure au double de  $F_{max}$ .

$\frac{F_e}{2}$  est appelée **fréquence de Nyquist**. Elle correspond à la fréquence maximale que peut avoir un signal pour éviter les distortions lors de l'échantillonnage.

#### 4.4 Signaux à support en fréquence non borné

Distortion du signal due au repliement  $\rightarrow$  filtrage anti-repliement = filtre avant l'échantillonnage avec une fréquence de coupure  $F_{ar} < F_e/2$

## 5 Reconstruction d'un signal

## 6 Quantification

## 1 Définition et classification

### 1.1 Exemples

Commençons par quelques exemples de ce que nous appelons "système" :

- Système électrique :  $u_e(t) \rightarrow \text{système RLC} \rightarrow u_s(t)$
- Système biologique : pression de contact  $\rightarrow$  sens du toucher  $\rightarrow$  impulsion nerveuse
- Système économique :

### 1.2 Définition

Système = ensemble d'éléments fonctionnels interagissant entre eux et établissant une relation entre des signaux d'entrée et des signaux de sortie

- Signaux d'entrée (excitations) :  $x$
- Signaux de sortie (réponses) :  $y$
- si le système est noté  $\mathcal{S}$ , reliant  $x$  et  $y$ , on note

$$y = \mathcal{S}[x] \quad (4.1)$$

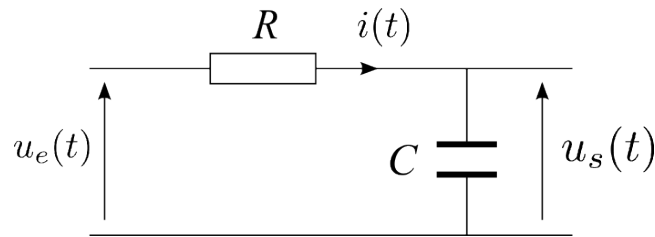
### 1.3 Classification et caractéristiques

On classe les systèmes en fonction de leurs caractéristiques :

- **Statique** : La réponse à une excitation est instantanée. Ex :  $i_s(t) = \frac{1}{R}u_e(t)$
- **Dynamique** : Réponse fonction de l'excitation au temps  $t$  et aux temps précédents.  
Exemple, système RC : Equation reliant entrée  $u_e(t)$  et sortie  $u_s(t)$  ?

$$RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_e(t) \quad (4.2)$$

- **Monovariante** : une seule variable d'entrée et une de sortie



- **Multivariable** : plusieurs variables en entrée et/ou en sortie
- **Linéarité** :  $x = \alpha x_1 + \beta x_2 \Rightarrow y = \alpha \mathcal{S}[x_1] + \beta \mathcal{S}[x_2]$
- **Causalité** : Réponse du système ne peut pas se produire avant l'excitation qui l'engendre.  
Alors, si  $x(t) = 0$  pour  $t < 0 \Rightarrow y(t) = 0$  pour  $t < 0$ .
- **Invariance par translation dans le temps** : si  $y(t) = \mathcal{S}[x(t)]$ , alors  $y(t - t_0) = \mathcal{S}[x(t - t_0)]$ . Le système est dit invariant.
- **Stabilité** : Système stable = excitation bornée  $\Rightarrow$  réponse bornée.  
 $\exists M_e, \forall t, x(t) < M_e \Rightarrow \exists M_s, \forall t, y(t) < M_s$   
Si le système est perturbé, il revient à son état initial lorsque cesse la perturbation.

### Exemples

Exemple : tachymètre = linéaire, causal, invariant

Non linéaire : hauteur d'une vague en fonction du vent

Non causal : De Lorean dans "Retour vers le futur"

Non invariant : parcmètre (tarif dépend du temps)

## 1.4 Système LTI

Dans la suite, étude des systèmes monovariabiles continus linéaires à temps invariant = systèmes LTI.

## 2 Réponse temporelle d'un système LTI

### 2.1 Relation entrée/sortie

La relation entre l'entrée et la sortie d'un système LTI la plus couramment utilisée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$b_n y^{(n)}(t) + \dots + b_1 y^{(1)}(t) + b_0 y(t) = a_m x^{(m)}(t) + \dots + a_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t) \quad (4.3)$$

avec  $f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$

Pour caractériser complètement le système, il suffit de connaître les coefficients. Et si on connaît  $x(t)$ , on peut calculer la sortie  $y(t)$ .

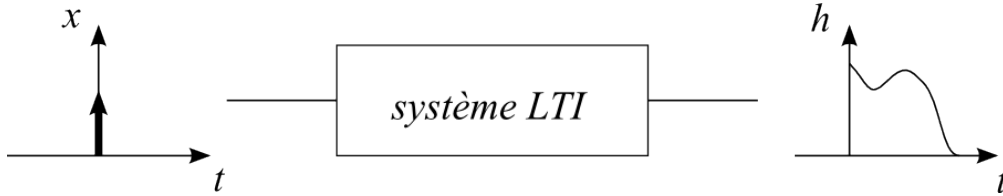
Exemple : circuit RLC



## 2.2 Réponse impulsionnelle

Autre manière de caractériser un système. La **réponse impulsionnelle** d'un système est sa réponse à une entrée qui est une impulsion de Dirac. Notée communément  $h(t)$  :

$$h(t) = \mathcal{S}[\delta(t)] \quad (4.4)$$



Nous allons voir qu'on caractérise ainsi complètement le système car on peut retrouver la réponse  $y(t)$  pour n'importe quel signal d'entrée  $x(t)$ .

On cherche donc la réponse du système à une excitation quelconque  $x(t)$ . Nous avons vu que l'impulsion de Dirac était l'élément neutre de l'opération de convolution :  $x(t) = x(t) * \delta(t)$ . Alors

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (4.5)$$

Si on applique  $x(t)$  comme excitation, on a en sortie :

$$y(t) = \mathcal{S} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] \quad (4.6)$$

notre système est linéaire donc

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \mathcal{S}[\delta(t - \tau)] d\tau \quad (4.7)$$

et le système a une invariance temporelle donc, par définition de la réponse impulsionnelle

$$\mathcal{S}[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau) \quad (4.8)$$

On en déduit

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (4.9)$$

C'est à dire

La réponse  $y(t)$  d'un système à une excitation  $x(t)$  est le produit de convolution de l'excitation et de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système :

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (4.10)$$

La réponse impulsionnelle caractérise donc complètement le système puisque ce qui précède est vrai pour toute excitation en entrée.

Stabilité : on dit qu'un système est stable si sa sortie est bornée lorsque son entrée est bornée. On montre qu'un système est stable ssi sa réponse impulsionnelle est absolument intégrable ( $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$ )

### 3 Réponse fréquentielle d'un système LTI

#### 3.1 Réponse à un signal monochromatique (sinusoïdal)

Considérons un système de réponse impulsionnelle  $h$  auquel on envoie un signal d'entrée  $x(t) = A \exp(j2\pi ft)$ , qui est un signal monochromatique (une seule fréquence). Le signal en sortie peut, d'après le paragraphe 2.2 s'écrire

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (4.11)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)Ae^{j2\pi f(t-\tau)}d\tau \quad (4.12)$$

$$= Ae^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

où on a sorti de l'intégrale ce qui ne dépendait pas de  $\tau$ . On reconnaît l'intégrale de la dernière ligne, il s'agit de la TF de la réponse impulsionnelle, que nous notons  $H(f)$  :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (4.15)$$

La réponse d'un système LTI à un signal monochromatique complexe (sinusoïdal) est ce même signal multiplié par le gain complexe  $H(f)$ , transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle

$$\mathcal{S}[Ae^{j2\pi ft}] = h(t) * Ae^{j2\pi ft} = H(f) \cdot Ae^{j2\pi ft} \quad (4.16)$$

#### 3.2 Réponse fréquentielle d'un système LTI

Un signal d'entrée quelconque peut, à l'aide d'une TF inverse, s'exprimer sous la forme d'une somme de signaux monochromatiques :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \quad (4.17)$$

On peut alors calculer le signal de sortie du système en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$y(t) = \mathcal{S}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}[X(f)e^{j2\pi ft}]df \quad (4.18)$$

Le résultat du paragraphe précédent, qui peut s'écrire :

$$\mathcal{S}[X(f)e^{j2\pi ft}] = H(f) \cdot X(f) \cdot e^{j2\pi ft} \quad (4.19)$$

permet d'obtenir :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)X(f)e^{j2\pi ft}df \quad (4.20)$$

Ce qui peut être interprété comme la TF inverse de la sortie  $y(t)$  si on note  $Y(f)$  sa TF :

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad (4.21)$$

Donc

Si  $y(t) = h(t) * x(t)$  est le signal de sortie d'un système LTI ayant comme entrée  $x(t)$  et comme réponse impulsionnelle  $h(t)$ , alors la TF de  $y(t)$ , notée  $Y(f)$ , s'écrit :

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad (4.22)$$

$H(f)$  est appelée **fonction de transfert** du système

$H(f)$  fait donc office de représentation fréquentielle du système. Elle mesure la réponse du système à une composante fréquentielle donnée du signal d'entrée.  $H(f)$  est un nombre complexe avec un module  $|H(f)|$  et un argument  $\phi(f)$

## 4 Transformée de Laplace

### 4.1 Définition

La TF d'un signal n'existe que si l'intégrale  $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$  converge. Ceci n'est pas toujours vrai. On améliore les choses en exigeant que le signal soit nul pour  $t < 0$ . Toutes les intégrales iront alors de 0 à  $+\infty$ .

Mais ce n'est pas suffisant. Si on multiplie  $x(t)$  par une exponentielle décroissante de paramètre  $\sigma > 0$  telle que

$$\int_0^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

et si on prend la TF de ce nouveau signal :

$$\begin{aligned} X(f, \sigma) &= \int_0^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_0^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma + j2\pi f)t}dt \end{aligned}$$

Posons  $p = \sigma + j2\pi f$ , on a :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

Ceci définit la **transformée de Laplace** du signal  $x(t)$ . C'est une généralisation de la TF, dans laquelle on décompose le signal  $x(t)$  sur une base de fonctions exponentielles  $e^{-pt}$  avec  $p$  complexe. On la note parfois  $\mathcal{L}(x)$

### 4.2 Convergence

$X(p)$  n'est défini que si l'intégrale converge. On appelle **région de convergence** (notée RC dans la suite), l'ensemble des nombres complexes  $p$  qui font converger l'intégrale.

Exemple : calcul de la T.L. de  $x(t) = e^{at}\gamma(t)$

### 4.3 Propriétés de la transformée de Laplace

Certaines identiques à celles de la TF :

- **Linéarité** :  $a.x(t) + b.y(t) \xrightarrow{TL} a.X(p) + b.Y(p)$
- **Décalage temporel** :  $x(t - t_0) \xrightarrow{TL} \exp(-pt_0)X(p)$
- **Décalage fréquentiel** :  $\exp(at)x(t) \xrightarrow{TL} X(p - a)$
- **Dérivation** :  $\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) ???$

on peut intégrer par parties :

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt} dt \quad (4.23)$$

$$= [e^{-pt}x(t)]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt}x(t) dt \quad (4.24)$$

$$= p\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0^+) \quad (4.25)$$

$$= pX(p) - x(0^+) \quad (4.26)$$

$$(4.27)$$

et de proche en proche, on peut montrer que la dérivée d'ordre ( $k$ ) se transforme en :

$$\mathcal{L}\left(x^{(k)}(t)\right) = p^k X(p) - p^{k-1}x(0^+) - p^{k-2}x^{(1)}(0^+) - \dots - x^{(k-1)}(0^+) \quad (4.28)$$

où les  $x(0^+), x^{(1)}(0^+), \dots, x^{(k-1)}(0^+)$  sont les conditions initiales, souvent nulles.

Conclusion : on transforme une dérivation dans le domaine temporel en multiplication dans le domaine "fréquentiel".

- **Intégration** : de façon symétrique à la dérivation :

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = \frac{1}{p} X(p) \quad (4.29)$$

- **Convolution** :  $x(t) * h(t) \xrightarrow{TL} X(p) \cdot H(p)$

Les transformées de Laplace ne sont pas toujours faciles à calculer, on utilise beaucoup les tables!!!

..... quelques exemples de TL .....

## 5 Utilité des TL pour les systèmes LTI

### 5.1 TL appliquée à l'équa. diff d'un système LTI

Un système répond à une entrée quelconque  $x(t)$  par une sortie  $y(t) = x(t) * h(t)$ . La TL de la réponse est alors

$$Y(p) = X(p)H(p) \Rightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad (4.30)$$

on appelle  $H(p)$  la fonction de transfert complexe ou **transmittance complexe** du système.

Si  $p = j2\pi f$  appartient à la région de convergence de la représentation de Laplace, on peut relier  $H(p)$  à la fonction de transfert  $H(f)$  :

$$H(f) = H(p)|_{p=j2\pi f} \quad (4.31)$$

Les systèmes LTI sont régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$b_n y^{(n)}(t) + \dots + b_1 y^{(1)}(t) + b_0 y(t) = a_m x^{(m)}(t) + \dots + a_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t) \quad (4.32)$$

avec  $m \leq n$

Si on suppose les conditions initiales nulles, c'est à dire  $x^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i$  et  $y^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i$ , en appliquant la TL à cette équation différentielle, on obtient :

$$b_n p^n Y(p) + \dots + b_1 p Y(p) + b_0 Y(p) = a_m p^m X(p) + \dots + a_1 p X(p) + a_0 X(p) \quad (4.33)$$

En mettant en facteur  $Y(p)$  dans un membre et  $X(p)$  dans l'autre, on obtient :

$$(b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0) Y(p) = (a_m p^m + \dots + a_1 p + a_0) X(p) \quad (4.34)$$

et donc on peut écrire la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (4.35)$$

La fonction de transfert s'écrit sous la forme d'une fraction rationnelle de deux polynômes en  $p$ ,  $N(p) = a_m p^m + \dots + a_1 p + a_0$  et  $D(p) = b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0$  de degrés respectifs  $m$  et  $n$ .

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (4.36)$$

## 5.2 Pôles, zéros et stabilité du système

- Les **pôles** du système sont les racines  $\lambda_i$  complexes du polynôme  $D(p)$ . Ils sont soit réels, soit constitués d'une paire de complexes conjugués.
- Les **zéros** du système sont les racines  $z_i$  complexes du polynôme  $N(p)$ .

On montre qu'un système est stable si et seulement si tous les pôles de  $H(p)$  ont une partie réelle strictement négative

### Rapel : décomposition en éléments simples

Décomposition en éléments simples :

soit une fraction

$$F(p) = \frac{p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_2p^2 + a_1p + a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_2p^2 + b_1p + b_0} \quad (4.37)$$

elle peut se décomposer pour se mettre sous la forme

$$F(p) = T(p) + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} \quad (4.38)$$

où les  $p_n$  sont les pôles du système, c'est à dire les zéros du dénominateur.  $T(p)$  est la partie entière de  $F(p)$ .

Utilité : il est beaucoup plus facile de faire la transformée de Laplace inverse sous cette forme !

Pour effectuer la décomposition, on a grossièrement trois étapes

1. La partie entière n'est présente que si  $m > n$ . Dans ce cas, on réalise le quotient des polynômes. Nous nous contenterons du cas où la partie entière est une constante.
2. Calculer les pôles du système. Si  $n \leq 2$ , c'est simple. Sinon, on essaye les valeurs simples entières, du genre  $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
3. Calculer les coefficients  $A_i$ . Pour ce faire, on multiplie successivement par les  $(p - p_i)$  et on prend  $p = p_i$ . Ensuite, la  $TL^{-1}$  étant une opération linéaire, il suffit de connaître la TL inverse de  $1/(p - p_i)!$

..... *Exemples* .....

### 5.3 Caractérisation d'un système LTI

- équation différentielle reliant  $x(t)$  et  $y(t)$
- réponse impulsionnelle  $h(t)$
- fonction de transfert  $H(f)$
- transmittance complexe  $H(p)$

## 1 Introduction

### 1.1 Définition d'un "filtrage"

Un signal peut contenir

- des composantes ou informations non pertinentes
  - du bruit
  - des valeurs aberrantes
  - plusieurs composantes que l'on voudrait séparer
- Filtrer = ne laisser passer que ce qui a un intérêt, est pertinent

ceci implique de changer ou d'annuler certaines composantes d'un signal

**Finalement, tous les systèmes que nous étudions sont des filtres**

Il y a des filtres partout : equaliseur dans des appareils audio, suspensions dans les voitures, téléphonie mobile, réglages graves/aigus sur un autoradio ...

..... *Exemples* .....

### 1.2 Filtrage temporel et fréquentiel

## 2 Caractérisation dans le domaine fréquentiel (filtres élémentaires)

### 2.1 Filtre passe bas

On veut sélectionner les basses fréquences. Donc on veut rejeter les fréquences supérieures à une **fréquence de coupure**  $f_c$ . On dit que la **bande passante** est  $[0; f_c]$ . Ceci donne une fonction de transfert dont le module ressemble à :

.... *Figure* ....

**bande passante d'un filtre** : intervalle de fréquence dans lequel le gain du filtre  $G(f)$  est supérieur à un gain de référence. Par exemple, en décibels -3 dB. Nous y reviendrons...

## 2.2 Autres filtres

- **Filtre passe-haut** :  
Sélection des fréquences  $> f_c$ , réjection des fréq  $< f_c$ .  
Bande passante :  $[f_c; +\infty]$
- **Filtre passe-bande** :  
Sélection des fréquences appartenant à un intervalle  $[f_{c1}; f_{c2}]$ , réjection des fréq en dehors de cet intervalle.  
Bande passante :  $[f_{c1}; f_{c2}]$
- **Filtre coupe-bande** :  
Sélection des fréquences en dehors d'un intervalle  $[f_{c1}; f_{c2}]$ , réjection des fréq appartenant à cet intervalle.  
Bande passante :  $[0; f_{c1}] [f_{c2}; +\infty]$

## 2.3 Filtre physiquement réalisable

Filtre **physiquement réalisable** = stable (il revient à son état initial après excitation) et causal (la sortie ne se produit pas avant l'entrée)

Considérons un filtre passe-bas idéal, dont la fonction de transfert se résume à une fonction porte :

$$H(f) = \gamma_{f_c} \quad (5.1)$$

la réponse impulsionnelle de ce filtre est la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert, et nous avons vu qu'il s'agissait de

$$h(t) = f_c \text{sinc}(2\pi f_c t) \quad (5.2)$$

La réponse impulsionnelle, c'est la réponse du système à un pic de Dirac en  $t = 0$ . Celle que nous venons de calculer commence en  $-\infty$  ! Autrement dit, la réponse commence avant l'excitation. Le système est non causal.

Ce filtre n'est donc pas physiquement réalisable. Ceci vient du fait que la fonction de transfert contient des discontinuités ou des dérivées infinies (en fréquence). On doit donc trouver une approximation du filtre idéal.

# 3 Filtres classiques

## 3.1 Exemple simple

Filtre LC :

### Calcul de la réponse du filtre

#### Réponse réelle

## 3.2 Filtre de Butterworth

La fonction de transfert réelle d'un filtre de Butterworth est de la forme

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (2\pi\Omega)^{2n}}} \quad (5.3)$$



(Ingénieur britannique Stephen Butterworth en 1930!!)

C'est une façon d'exprimer tous les types de filtres, il faut juste remplacer  $\Omega$  pour obtenir un filtre passe-haut, passe-bande ou autre. Dans le cas du filtre passe-bas, on a  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$  où  $\omega_c$  est la fréquence (plutôt pulsation) de coupure.

$n$  est l'ordre du filtre.

Caractéristiques :

- Réponse la plus plate possible dans la bande passante
- Pour un ordre  $n$  donné, l'atténuation asymptotique est de  $-20n$  dB/décade (à partir de  $\omega_n = 1$ )

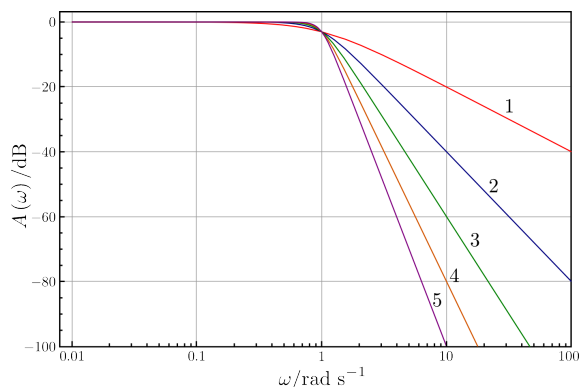


FIG. 5.1: Norme de la réponse d'un filtre de Butterworth en dB. Les différentes courbes correspondent à différents ordres

La représentation complexe d'un filtre de Butterworth passe par l'expression de sa fonction de transfert complexe ou bien de sa transmittance complexe. Après calcul, on trouve que, suivant l'ordre, la transmittance complexe (fonction de transfert au sens de Laplace) s'écrit pour les premiers ordres et pour une pulsation de coupure  $\omega_c = 1$  :

Ordre	Transmittance complexe
1	$H(p) = \frac{1}{1+p}$
2	$H(p) = \frac{1}{p^2 + 1.4142p + 1}$
3	$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2 + p + 1)}$
4	$H(p) = \frac{1}{(p^2 + 0.7654p + 1)(p^2 + 1.8478p + 1)}$
5	$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2 + 0.6180p + 1)(p^2 + 1.6180p + 1)}$
6	$H(p) = \frac{1}{(p^2 + 0.5176p + 1)(p^2 + 1.4142p + 1)(p^2 + 1.9319p + 1)}$
7	$H(p) = \frac{1}{(p^2 + 0.3902p + 1)(p^2 + 1.1111p + 1)(p^2 + 1.6629p + 1)(p^2 + 1.9616p + 1)}$

Il faut remplacer  $p$  par  $j\Omega$  pour obtenir la fonction de transfert complexe.

## Réalisation

### 3.3 Adaptation au type de filtre

Le filtre que nous avons décrit précédemment est un filtre générique, c'est à dire qu'il faut remplacer  $\Omega$  par une quantité dépendant de la pulsation  $\omega$  et de la pulsation de coupure  $\omega_c$ . Le tableau ci-dessous donne le changement de variable à faire en fonction du type de filtre :

Filtre	Pulsations associées	Changement de variable
passe-bas	coupure $\omega_c$	$\Omega \rightarrow \frac{\omega}{\omega_c}$
passe-haut	coupure $\omega_c$	$\Omega \rightarrow \frac{\omega_c}{\omega}$
passe-bande	$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ et $B = \omega_2 - \omega_1$	$\Omega \rightarrow \frac{\omega_0}{B} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1}{\frac{\omega}{\omega_0}}$
coupe-bande	$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ et $B = \omega_2 - \omega_1$	$\Omega \rightarrow \frac{\omega_0}{B} \cdot \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1}$

### 3.4 Caractérisation des filtres

Un filtre idéal est un filtre qui coupe parfaitement toutes les fréquences au delà (ou en deça, ça dépend du type de filtre) d'une fréquence de coupure. Malheureusement, ceci n'est pas possible. En effet, ceci correspond à une pente infiniment raide de la fonction de transfert à la fréquence de coupure. Ou, si l'on veut, à une discontinuité, ce qui veut dire des dérivées infinies, dans le domaine fréquentiel. Donc la réponse impulsionnelle (TF inverse de la fonction de transfert) aurait des valeurs s'étendant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , et donc des valeurs non nulles à des temps négatifs. Ce qui veut dire que la réponse du système serait non causale puisqu'il y aurait un signal en sortie avant que la cause ne se soit manifestée. Rappel : la réponse impulsionnelle est la réponse du système à une impulsion de Dirac au temps  $t = 0$ .

Un filtre idéal étant non causal, il n'est pas physiquement réalisable. On doit donc toujours faire une approximation du filtre idéal. Lorsqu'on réalise un filtre réel, on le caractérise par un gabarit qui spécifie

- la zone dans laquelle doit passer sa courbe en fréquence,
- la bande passante et la bande atténuée ou rejetée,
- les ondulations maximales admissibles dans la bande passante (paramètre  $a$  sur la figure 5.2) et l'atténuation minimale dans la bande atténuée (paramètre  $b$  sur la figure 5.2).

Un filtre réel est toujours un compromis entre atténuation et oscillations.

### 3.5 Autres filtres

Nous ne cherchons pas à être exhaustifs, mais pour montrer diverses caractéristiques de filtres, il faut citer ceux qui sont les plus classiques.

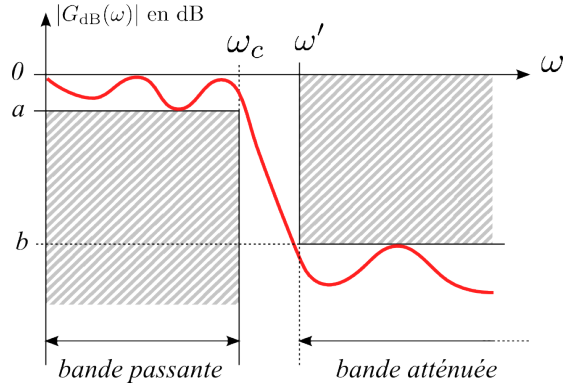


FIG. 5.2: Gabarit utilisé pour la caractérisation des filtres

### Filtre de Tchebychev

Il y a deux types de filtres de Tchebychev, qui présentent des oscillations soit dans la bande passante (filtres de Tchebychev de type I), soit dans la bande atténuée (filtres de Tchebychev de type II). Nous ne parlerons que des premiers (type I), ceux de type II étant peu utilisés.

La norme de la fonction de transfert est donnée, pour un filtre de Tchebychev de type I, par

$$|H_n(j\omega)| = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)} \quad (5.4)$$

où les  $T_n(x)$  sont les polynômes de Tchebychev :

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(x)) & \text{si } |x| < 1 \\ \cosh(n \cdot \operatorname{argch}(x)) & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

Les filtres de Tchebychev sont caractérisés par une oscillation dans la bande passante, réglée par le paramètre  $\varepsilon$ , pas d'oscillation en bande atténuée, une raideur de coupure importante. Un exemple de filtre passe-bas est illustré sur la figure 5.3.

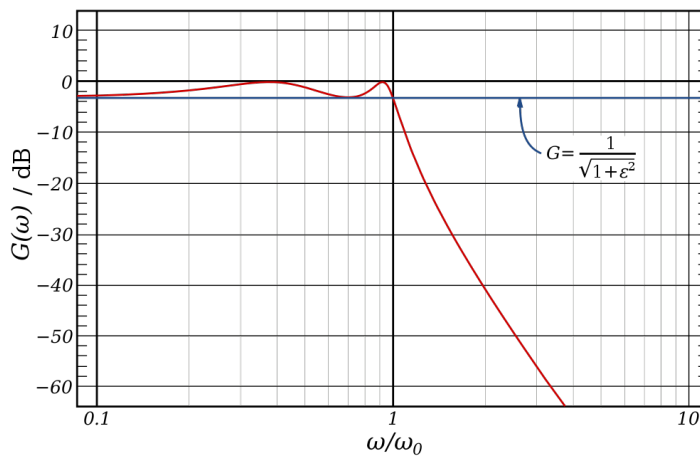


FIG. 5.3: Exemple de filtre de Tchebychev passe-bas

## Filtres elliptiques ou de Cauer

### Comparaison des filtres

Illustration sur la figure 5.4 du module de la fonction de transfert pour différents filtres. On observera la différence en termes de raideur, d'atténuation et d'oscillations. En pratique, on choisit le filtre adapté au problème que l'on veut traiter.

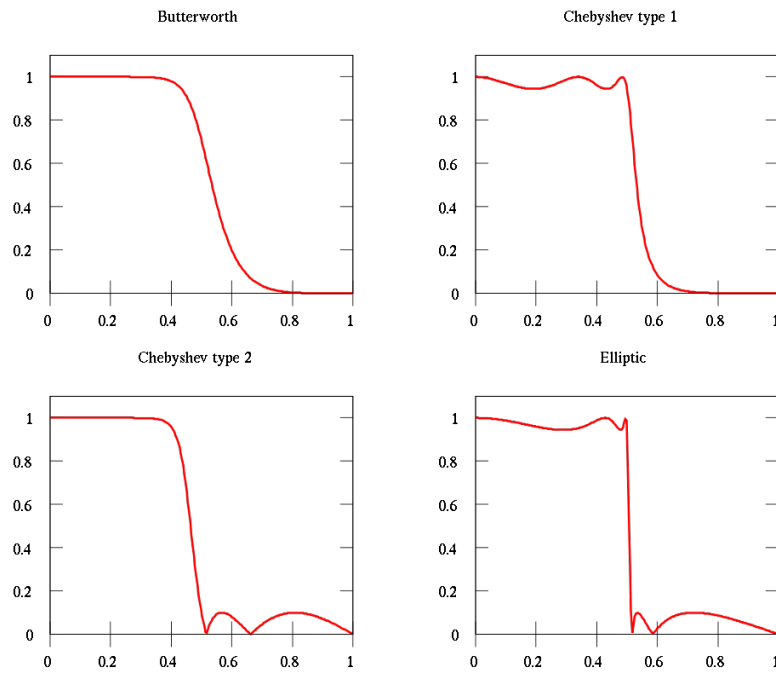


FIG. 5.4: Comparaison de différents filtres : Butterworth, Tchebychev de type I et II, elliptique