

---

# **Notes de cours de PHYS 801**

## **Introduction à la Physique Nucléaire**

---

Damir Buskulic (basé sur un cours de Daniel Décamp), 14 avril 2013



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Caractéristiques générales du noyau</b>	<b>7</b>
1	Constituants du noyau : les nucléons	7
2	Nomenclature	8
<b>2</b>	<b>Masse des noyaux, énergie de liaison et modèle de la goutte liquide</b>	<b>9</b>
1	Masse des noyaux et énergie de liaison	9
2	Energie de liaison	9
3	Modèle de la goutte liquide et formule de Bethe-Weizsäcker	12
3.1	Hypothèses de base du modèle de la goutte liquide . . . . .	12
3.2	Energie de liaison, formule de Bethe-Weizsäcker . . . . .	12
3.3	Détermination des coefficients . . . . .	16
4	Applications	17
4.1	Energie de séparation d'un nucléon . . . . .	17
4.2	$Q$ d'une réaction . . . . .	17
4.3	Détermination de l'isobare le plus stable . . . . .	18
4.4	Stabilité des noyaux . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Dimension des noyaux et densité nucléaire</b>	<b>21</b>
1	Introduction	21
2	Diffusion de Rutherford	22
2.1	Diffusion d'une particule chargée par un noyau . . . . .	22

2.2	Angle de déflexion de la particule . . . . .	24
3	Section efficace . . . . .	26
3.1	Probabilité de diffusion à un angle $\Theta$ . . . . .	26
3.2	Vérifications expérimentales . . . . .	27
3.3	Généralisation de la notion de section efficace . . . . .	28
4	Distribution de charge dans le noyau . . . . .	28
4.1	Densité des états finals . . . . .	30
4.2	Un peu de cinématique . . . . .	30
4.3	Élément de matrice . . . . .	31
4.4	Section efficace différentielle de diffusion élastique . . . . .	33
4.5	Propriétés du facteur de forme . . . . .	34
4.6	Remarques sur la section efficace . . . . .	35
4.7	Résultats expérimentaux . . . . .	36
4.8	Densité nucléaire . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Radioactivité : généralités</b> . . . . .	<b>39</b>
1	Radioactivité $\alpha$ . . . . .	39
1.1	Condition énergétique . . . . .	39
2	Radioactivité $\beta$ . . . . .	40
2.1	Radioactivité $\beta^-$ . . . . .	40
2.2	Radioactivité $\beta^+$ . . . . .	41
2.3	Capture électronique . . . . .	41
2.4	Conditions énergétiques . . . . .	42
2.5	Parabole de masse . . . . .	43
3	Radioactivité $\gamma$ . . . . .	44
4	Loi de la radioactivité . . . . .	45
4.1	Loi fondamentale de la radioactivité . . . . .	45
4.2	Activité . . . . .	46
4.3	Période et vie moyenne . . . . .	47
4.4	Largeur de raie . . . . .	47
4.5	Filiations radioactives . . . . .	48
4.6	Radioactivité naturelle et familles radioactives . . . . .	49
5	Applications de la radioactivité . . . . .	50
5.1	Datation au $^{14}\text{C}$ . . . . .	50
5.2	Datation de roches et de météorites . . . . .	51
6	Radioactivité artificielle . . . . .	52
6.1	Notion de section efficace . . . . .	53
6.2	Production de noyaux radioactifs . . . . .	55

<b>5</b>	<b>Radioactivité : approche théorique</b>	<b>59</b>
1	Radioactivité $\alpha$	59
1.1	Approximation semi-classique WKB . . . . .	59
1.2	Autre méthode de calcul . . . . .	61
1.3	Théorie de Gamow de la radioactivité $\alpha$ . . . . .	62
2	Théorie de Fermi de la radioactivité $\beta$	64
2.1	Elément de matrice . . . . .	65
2.2	Spectre d'une transition permise . . . . .	66
2.3	Classification des transitions $\beta$ . . . . .	69
2.4	Détermination de la constante de Fermi $G_F$ . . . . .	70
2.5	Double désintégration $\beta$ . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Modèles nucléaires</b>	<b>73</b>
1	Modèles à particules indépendantes	74
1.1	Modèle de Fermi . . . . .	75
1.2	Modèle en couches . . . . .	77
1.3	Applications du modèle en couches . . . . .	85
2	Modèles collectifs	91
2.1	Généralités . . . . .	91
2.2	Modèle vibrationnel . . . . .	91
2.3	Modèle rotationnel . . . . .	93



## Caractéristiques générales du noyau

Noyau atomique = lieu, au sein de l'atome, où se trouvent concentrées toute la charge positive et pratiquement toute la masse de l'atome.

Lorsqu'on l'observe de façon fine, on constate que le noyau possède une structure étendue, dont les dimensions n'excèdent pas quelques  $10^{-14}$  m. Vis à vis des dimensions de l'atome ( $\sim 10^{-10}$  m =  $\sim 1$  Å) le noyau peut être considéré comme pratiquement ponctuel.

Unité de longueur en physique nucléaire = le fermi : 1 fm =  $10^{-15}$  m

### 1 Constituants du noyau : les nucléons

Le noyau, comme l'atome est un objet composite. Ses constituants sont appelés les **nucléons**. On a découvert, il y a une quarantaine d'années, que les nucléons ont eux-mêmes une structure, qu'ils sont composites. Pour étudier cette structure, il faut encore descendre par rapport au Fermi dans l'échelle des distances : c'est le domaine de la **Physique des Particules**, qui sera peut-être étudiée dans un autre cours. Pour les besoins de la **Physique Nucléaire**, on peut considérer, en première approximation les nucléons comme des objets ponctuels.

Il existe deux espèces de nucléons, les protons et les neutrons dont voici les caractéristiques :

	Masse (MeV/c <sup>2</sup> )	charge (C)	Moment magnétique
proton	$938.272013 \pm 0.000023$	$1.602176487(40) \times 10^{-19}$	$(2.792847356 \pm 2.3 \times 10^{-8})\mu_N$
neutron	$939.565346 \pm 0.000023$	0	$-(1.9130427 \pm 5 \times 10^{-7})\mu_N$

où  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$  désigne le magnéton de Bohr nucléaire

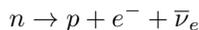
$$\mu_N = 3.1524512326(45) \times 10^{-14} \text{ Mev.T}^{-1}$$

(noter la différence avec le magnéton de Bohr en physique atomique  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.7883817555(79) \times 10^{-11} \text{ Mev.T}^{-1}$ )

#### propriétés des nucléons

- L'existence du moment magnétique des proton et neutron vient de ce que ceux-ci ont un moment cinétique intrinsèque (spin) de valeur  $\hbar/2$ . Une autre manière de voir les choses est que le neutron, bien qu'ayant une charge globale nulle, a une densité volumique de charge non nulle, ce qui peut entraîner l'existence d'un moment magnétique. Le proton est lui chargé.

- Du point de vue de la physique statistique, le proton et le neutron sont des fermions. Un système de deux fermions identiques obéit au principe d'exclusion de Pauli : “deux fermions identiques ne peuvent pas être dans le même état quantique et la fonction d'onde d'un système de deux fermions identiques est antisymétrique”.
- Le neutron libre est instable ; il se désintègre en



avec une période  $T_{1/2} = 14,7$  mn.

Chaque noyau est constitué de  $Z$  protons et  $N$  neutrons

$Z$  est le **nombre de charge** ou **numéro atomique**

le **nombre de masse**  $A$  est donné par  $A = Z + N$ .

## 2 Nomenclature

On désigne souvent par **Nuclide** ou **Nucléide** un système de nucléons, c'est à dire un noyau, et on le représente par le symbole



où  $X$  est le symbole chimique,  $Z$  le numéro atomique (nombre de protons),  $A$  le nombre de masse (nombre total de nucléons) et  $N$  le nombre de neutrons ; on omet souvent  $N$  puisque  $N = A - Z$  :  ${}^A_Z X$ .

Les nuclides ayant le même  $Z$  sont appelés **isotopes**. Ainsi par exemple

- le carbone naturel contient 98,89% de  ${}^{12}_6 C$ , 1,11% de  ${}^{13}_6 C$  et des traces de  ${}^{14}_6 C$  radioactif
- l'uranium naturel contient 99,275% d' ${}^{238}_{92} U$ , 0,72% d' ${}^{235}_{92} U$  et 0,005% d' ${}^{234}_{92} U$

Les isotopes ont les mêmes propriétés chimiques puisque celles-ci sont reliées aux orbitales atomiques, c'est à dire aux propriétés des électrons.

Les nuclides ayant le même nombre de masse sont appelés **isobares**, ils appartiennent à des éléments différents. Par exemple  ${}^{14}_6 C$  et  ${}^{14}_7 N$  ou bien  ${}^{64}_{28} Ni$ ,  ${}^{64}_{29} Cu$  et  ${}^{64}_{30} Zn$ .

Les nuclides ayant même  $N$  sont appelés **isotones**. Par exemple  ${}^{13}_6 C$  et  ${}^{14}_7 N$  ;  ${}^{14}_6 C$  et  ${}^{15}_7 N$  ;  ${}^{39}_{19} K$  et  ${}^{40}_{20} Ca$ .

On appelle fréquemment **noyaux pair-pair** des nuclides dont  $Z$  et  $N$  sont pairs et **noyaux impair-impair** des nuclides dont  $Z$  et  $N$  sont impairs. Enfin, on appelle **noyaux impairs** ceux dont  $A$  est impair, c'est à dire ceux dont  $Z$  ou  $N$  **seulement** est impair.

## Masse des noyaux, énergie de liaison et modèle de la goutte liquide

### 1 Masse des noyaux et énergie de liaison

Les dispositifs tels que les spectromètres (ou spectrographes) magnétiques permettent de mesurer la masse des atomes avec une excellente précision, de l'ordre d'une fraction de MeV pour les atomes stables (voir exemple en fig. 2.1).

Application : la découverte des isotopes par J.J. Thomson en 1911

Au premier ordre, la masse d'un élément est caractérisée par le nombre de masse  $A$  qui représente le nombre de nucléons que contient le noyau. On sait mesurer avec une grande précision le rapport des masses atomiques des éléments. Si l'on se fixe la masse de l'un d'entre eux, on en déduit celle des autres.

On a convenu de prendre égale à 0,012 kg (12 g) la masse d'une mole de l'isotope à 12 nucléons du carbone ( $^{12}_6C$ ). Ceci définit le nombre d'atomes dans une mole, c'est à dire le nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}_A$ . Connaissant ce nombre, on en déduit la masse d'un atome de carbone :

$$M(^{12}_6C) = \frac{12}{\mathcal{N}_A} \text{ g}$$

En physique de l'atome ou du noyau, pour avoir une masse atomique qui s'approche de  $A$  et une unité commode, on exprime la masse en unité de masse atomique (u.m.a. ou a.m.u. en anglais) dont l'abréviation officielle est u. On définit cette unité par la relation :

$$M_{\text{atome}}(^{12}_6C) = 12 \text{ u} = 12 \times \frac{1 \text{ g}}{\mathcal{N}_A} = 12 \times (1.660538921 \pm 7.3 \times 10^{-8}) \times 10^{-27} \text{ kg}$$

On peut aussi écrire  $1 \text{ u} = 931.494061 \pm 2.1 \times 10^{-5}) \text{ MeV}/c^2$

### 2 Energie de liaison

La masse réelle d'un atome dépend du nombre de nucléons mais également de l'énergie de liaison des différents constituants. Cette énergie de liaison variant d'un atome à l'autre, la masse réelle d'un atome  $M_{at}(Z, A)$  diffère en général de  $A$  (en unités de masse atomique). On caractérise traditionnellement cette différence par **l'excès de masse**  $\Delta M_{at}$  :

FIGURE 2.1: Exemple de spectromètre de masse, le spectromètre de Bainbridge (1935). Une source produit des atomes ionisés une fois, de charge  $e$ , de masse  $M$ , ayant une certaine distribution de vitesses. Ces atomes traversent une région où ils sont soumis à un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$  croisés. Ces champs agissent comme un filtre de vitesse : seuls traversent la fente de sortie les atomes satisfaisant  $eE = evB$ . Les atomes de vitesse  $v = E/B$  traversent alors la région de champ magnétique  $B$ , décrivant un demi-cercle de rayon  $R$ , et tombent sur un détecteur (une plaque photographique à l'époque de Bainbridge). La distance entre la fente  $S_2$  et l'image est  $2R$ , où  $R$  satisfait la relation  $evB = Mv^2/R$ . On en déduit  $M = eB^2R/E$ . La masse de l'atome neutre est obtenue en ajoutant la masse d'un électron à celle de l'ion (son énergie de liaison est négligeable devant ces masses). Résolution des spectros modernes :  $\Delta M/M \sim 10^{-5}$

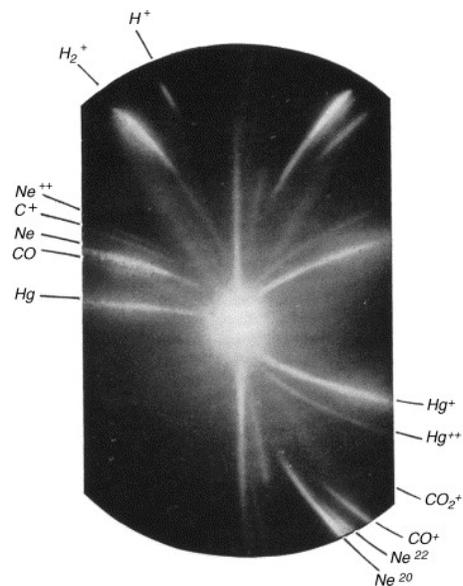
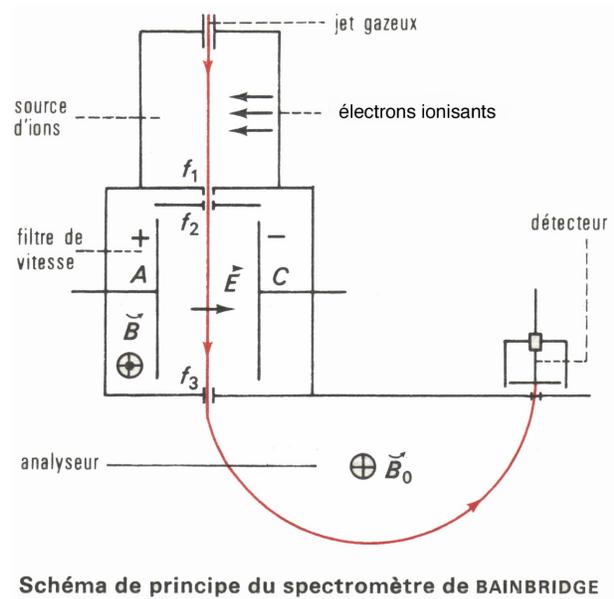


FIGURE 2.2: Plaque photographique de J.J. Thomson. Les trajectoires des deux isotopes du Néon sont visibles en bas à droite.

$$\Delta M_{at}(Z, A)_u = M_{at}(Z, A)_u - A \quad (2.1)$$

ou en  $\text{MeV}/c^2$  :

$$\Delta M_{at}(Z, A)_{\text{MeV}/c^2} = M_{at}(Z, A)_{\text{MeV}/c^2} - (931,49 \times A)_{\text{MeV}/c^2} \quad (2.2)$$

Si  $m_e$  représente la masse de l'électron et  $B_e$  l'énergie de liaison (en valeur absolue) de tous les électrons dans l'atome, la masse atomique est liée à celle du noyau par

$$M_{at}(Z, A) = M_{noyau}(Z, A) + Zm_e - \frac{B_e}{c^2} \quad (2.3)$$

En termes d'ordre de grandeur, la quantité  $B_e$  est au plus de l'ordre de quelques keV par électron. Lorsqu'on s'intéresse aux masses nucléaires, cette quantité est faible devant l'énergie de liaison nucléaire qui est typiquement de 8 MeV/nucléon.

La masse du noyau est liée à celle de ses constituants (protons et neutrons) par la relation :

$$M_{noyau}(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{B_N}{c^2} \quad (2.4)$$

où  $m_p$  et  $m_n$  désignent respectivement la masse du proton et celle du neutron ;  $B_N$  est l'**énergie de liaison du noyau**, en valeur absolue. On considère plus généralement l'énergie de liaison moyenne par nucléon  $B_N/A$  (ou  $B/A$ ).

La figure 2.3 représente la variation de  $B/A$  en fonction du nombre de masse  $A$

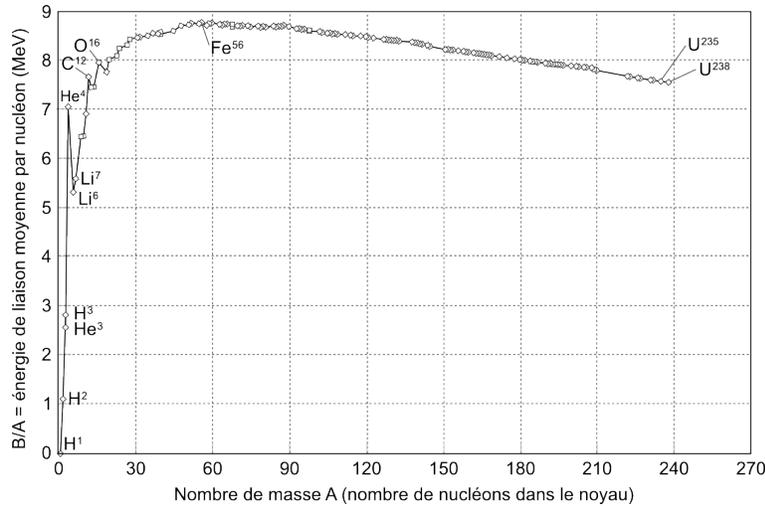


FIGURE 2.3: Energie de liaison par nucléon représentée en fonction du nombre de masse  $A$  pour différents noyaux stables.

On constate que, si l'on excepte les noyaux très légers, l'énergie de liaison ne varie que faiblement avec  $A$ . Ce comportement remarquable est une conséquence *du caractère à courte portée des forces d'interaction nucléaire*. Il en résulte qu'un nucléon n'interagit qu'avec ses proches voisins et pas avec tous les constituants du noyau. On a donc une saturation des forces d'interaction et de l'énergie de liaison.

S'il n'en était pas ainsi, en particulier si la stabilité nucléaire résultait d'une interaction à deux corps à longue portée, l'énergie de liaison serait proportionnelle au nombre de paires de nucléons. On aurait alors  $B \propto A(A-1)$  et donc  $B/A \propto A-1$ , ce qui n'est pas observé dans les données expérimentales.

Une observation plus précise des données expérimentales montre que l'énergie de liaison par nucléon est systématiquement légèrement plus grande pour les noyaux pair-pair que pour les noyaux impairs. Les noyaux pair-pair sont donc toujours légèrement plus stables que les noyaux impairs proches, comme nous le verrons plus loin. Ceci se traduit par les proportions relatives de noyaux pair-pair, impair-impair et impairs observées dans la nature. Sur 274 noyaux stables, les proportions sont les suivantes :  
 $\sim 60.2\%$  de noyaux pair-pair,  $\sim 38.3\%$  de noyaux impairs et  $\sim 1.5\%$  de noyaux impair-impair. Il n'existe que 4 noyaux impair-impair stables :  ${}^2_1\text{H}$ ,  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ .

### 3 Modèle de la goutte liquide et formule de Bethe-Weizsäcker

La propriété de saturation évoquée plus haut se manifeste également dans un système physique inattendu : la goutte liquide. Les forces de Van der Waals y sont l'analogie des forces d'interaction forte entre nucléons. Le modèle dit de la goutte liquide, élaboré par Carl Friedrich von Weizsäcker (1935) et Niels Bohr (1937) permet de retrouver certaines propriétés des noyaux, comme l'énergie de liaison, le rayon ou la stabilité vis à vis de la radioactivité  $\beta$  et de la fission spontanée.

Ce modèle ne permet toutefois pas d'expliquer certaines propriétés plus fines des noyaux (niveaux d'énergie des nucléons, transitions nucléaires,...), ce que font mieux des modèles dits **à particules indépendantes**. Le modèle de la goutte liquide est un **modèle collectif**.

#### 3.1 Hypothèses de base du modèle de la goutte liquide

- le “liquide” nucléaire est incompressible et “universel” : sa masse volumique est voisine de  $2 \times 10^{14} \text{ t.m}^{-3}$  (pour comparaison, la masse volumique de l'eau est de  $1 \text{ t.m}^{-3}$ ).
- dans son état stable non perturbé, le noyau est sphérique. Le liquide étant incompressible son rayon est proportionnel à la racine cubique du nombre  $A$  de nucléons :

$$R = r_0 A^{1/3} \quad \text{avec} \quad r_0 = \text{constante} \quad (2.5)$$

- dans le noyau, la densité volumique de charge est constante ; autrement dit, la probabilité d'existence des protons est la même en tout point du noyau
- la force de cohésion ne dépend pas de la charge (interaction forte). Nous verrons qu'elle est maximale quand le nombre de protons et de neutrons sont les mêmes.

#### 3.2 Energie de liaison, formule de Bethe-Weizsäcker

Le modèle conduit à la formule semi-empirique de Bethe-Weizsäcker pour l'énergie de liaison :

$$B(Z, A) = a_v A - a_{surf} A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(Z, N) \quad (2.6)$$

Nous allons discuter de l'origine physique de chacun des 5 termes :

$B(Z, A) = a_v A$	énergie de volume
$-a_{surf} A^{2/3}$	énergie de surface
$-a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$	énergie coulombienne
$-a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$	terme d'asymétrie
$+\delta(Z, N)$	terme d'appariement

### Energie de volume

C'est le terme principal qui résulte des forces d'interaction nucléaire (attractives). En raison de la saturation de ces forces, l'énergie de liaison qui en résulte est la même pour tous les nucléons. Le coefficient  $a_v$  correspond donc à l'énergie de liaison moyenne par nucléon.

### Energie de surface

Les nucléons à la surface de la "goutte" ne sont liés qu'aux nucléons internes, ils ont moins de voisins que ceux situés au cœur du noyau. Il en résulte une perte d'énergie de liaison, représentée par le terme d'énergie de surface. C'est un terme analogue au terme de tension superficielle dans une goutte liquide, il diminue l'énergie de liaison totale. Par ailleurs, il tend à donner une forme sphérique à la goutte. Cette contribution est proportionnelle à la surface de la sphère, donc à  $R^2$ , donc à  $A^{2/3}$ .

### Energie coulombienne

La répulsion électrostatique entre protons tend à diminuer l'énergie de liaison. Le noyau étant sphérique par hypothèse, la diminution sera égale à l'énergie électrostatique d'une sphère uniformément chargée, de charge totale la charge totale des protons.

Calculons cette énergie électrostatique, notée  $E_c$ . Soit  $\rho$  la densité volumique de charge :

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Pour calculer  $E_c$ , calculons le travail  $dW$  nécessaire pour créer la couche sphérique de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ . Il faut amener de l'infini (potentiel 0) jusqu'à une distance  $r$  de  $O$  (le centre de la sphère) la charge  $\rho(4\pi r^2 dr)$ . Cette charge se trouve soumise à l'action de la charge  $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ , que l'on peut considérer comme ponctuelle (voir le Th. de Gauss), située au centre  $O$  de la sphère, et qui crée en tout point de la sphère de rayon  $r$  le potentiel

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} dW &= dq \cdot V \\ &= \rho(4\pi r^2 dr) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right) \\ &= \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr \end{aligned}$$

l'énergie totale se calcule en sommant toutes les coquilles jusqu'au rayon  $R$  du noyau :

$$\begin{aligned} |E_c| &= \int_0^R \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr \\ &= \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5 \end{aligned}$$

or  $\rho^2 = \frac{Z^2 e^2}{(16/9)\pi^2 R^6}$ , donc

$$|E_c| = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R}$$

Puisqu'on définit l'énergie coulombienne dans la formule de Bethe-Weizsäcker par

$$E_c = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

et de plus, par hypothèse,  $R = r_0 A^{1/3}$  (eq. 2.5), on en déduit l'expression de  $a_c$  :

$$a_c = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0}$$

### Terme d'asymétrie

Les trois termes discutés ci-dessus sont d'origine classique. Il reste deux termes d'origine quantique. Ils sont dûs au fait que, dans les noyaux, les nucléons occupent des niveaux d'énergie quantifiés. Ceci est traité plus complètement dans les modèles à particules indépendantes comme le "modèle en couches", mais il y a des conséquences dont on ne peut pas s'abstraire dans le modèle de la goutte liquide. Nous avons supposé que l'énergie de liaison des neutrons est identique à celle des protons, une fois que l'on a pris en compte le terme d'interaction coulombienne. Ceci n'est vrai strictement que si le nombre de neutrons est égal à celui des protons.

Pour le montrer, imaginons deux puits de potentiel, chacun avec son ensemble de niveaux d'énergie, identiques, l'un pour les protons et l'autre pour les neutrons. Ces niveaux se remplissent suivant le principe d'exclusion de Pauli puisque les protons et les neutrons sont des fermions. Si  $Z = N$  les deux puits sont remplis de la même manière (fig. 2.4.a)).

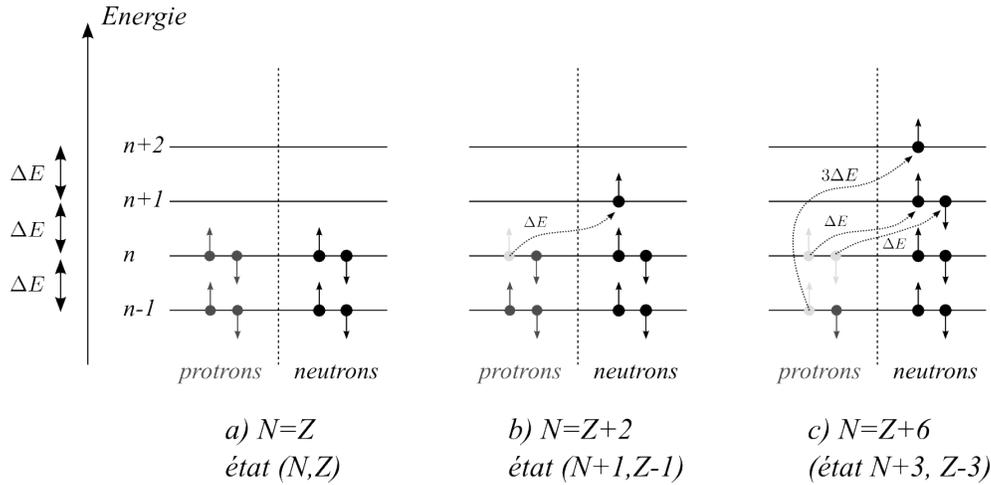


FIGURE 2.4: Illustration du calcul du terme d'asymétrie dans l'énergie de liaison.

Nous désirons voir ce qui se passe si, en gardant le même nombre de masse  $A$ , nous faisons varier le nombre de neutrons par rapport au nombre de protons. Si par exemple, on passe du noyau  $(N, Z)$  au noyau  $(N+1, Z-1)$ , c'est à dire  $N = Z + 2$ , un proton doit se transformer en neutron. C'est l'un des protons de la couche complète la plus haute (appelons la  $n$ ) des protons qui va passer à la couche  $n+1$  des neutrons, celle où il y a de la place. La différence d'énergie entre les deux états nucléaires est alors  $\Delta E$  (fig. 2.4.b)).

Si, toujours avec le même nombre de masse  $A$ , on passe à un noyau  $(N + 2, Z - 2)$ , c'est à dire  $N = Z + 4$ , deux protons doivent passer de la couche  $n$  des protons à la couche  $n + 1$  des neutrons en se transformant en neutrons. L'écart d'énergie entre les deux noyaux est  $2\Delta E$ .

Si on passe à un noyau  $(N + 3, Z - 3)$ , c'est à dire  $N = Z + 6$ , un troisième proton doit se transformer en neutron. Il ne peut venir que de la couche  $n - 1$  et aller sur la couche  $n + 2$  avec un écart d'énergie apportée  $3\Delta E$ . La différence totale d'énergie entre les noyaux  $(N, Z)$  et  $(N + 3, Z - 3)$  est donc  $2\Delta E + 3\Delta E = 5\Delta E$ .

On peut poursuivre le raisonnement et la variation d'énergie sera :

$N - Z$	2	4	6	8	10	12	14	16
variation d'énergie par rapport à un noyau $(N, Z)$	$\Delta E$	$2\Delta E$	$5\Delta E$	$8\Delta E$	$13\Delta E$	$18\Delta E$	$25\Delta E$	$32\Delta E$
$(N - Z)^2/8$	0.5	2	4.5	8	12,5	18	24,5	32

On peut approximer ce tableau en notant que pour passer de  $N = Z = A/2$  à  $N = A - Z$  avec  $N > Z$ , il faut une énergie  $\approx \frac{(N-Z)^2}{8} \Delta E$ .

On peut approximer la valeur de  $\Delta E$  en prenant un modèle de particule quantique dans un puits de potentiel à 3 dimensions. On sait qu'à une dimension,  $\Delta E \propto 1/a$ , où  $a$  est la largeur du puits. Pour un puits à 3 dimensions,  $\Delta E \propto 1/a^3$ , avec  $a^3$  le volume de la boîte, ici le volume du noyau  $\propto R^3$ . Donc  $\Delta E \propto 1/R^3 \propto 1/A$ . La différence d'énergie de liaison entre un noyau  $(A/2, A/2)$  et un noyau  $(N, Z)$  ayant le même  $A$  est

$$|B(N, Z) - B(A/2, A/2)| = \frac{(N - Z)^2}{8A}$$

Comme les neutrons en excédent sont sur les niveaux supérieurs donc moins liés. L'énergie de liaison totale doit donc être diminuée :

$$B(N, Z) - B(A/2, A/2) = -a_{sym} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

### Terme d'appariement

On a supposé les forces nucléaires indépendantes du spin... or, il n'en est rien. Les nucléons de même nature ont tendance à se grouper par paires de nucléons à spin antiparallèle. Ceci se voit par exemple avec les noyaux pair-pair qui sont plus liés que les noyaux impairs de masse comparable. Cet effet est empiriquement corrigé et vaut :

$$\delta = \begin{cases} \Delta(A) & \text{si } N \text{ et } Z \text{ sont pairs} \\ 0 & \text{si } A \text{ est impair} \\ -\Delta(A) & \text{si } N \text{ et } Z \text{ sont impairs} \end{cases}$$

La valeur adoptée pour  $\Delta(A)$  (Bohr et Mottelson, 1969) est

$$\Delta(A) = a_p A^{-1/2} \text{ MeV}$$

avec  $a_p = 12 \text{ MeV}$ . Une valeur plus récente est donnée plus bas.

L'énergie moyenne par nucléon devient donc

$$\frac{B}{A} = a_v - a_{surf} A^{-1/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_{sym} \left( \frac{N - Z}{A} \right)^2 + \frac{\delta}{A} \quad (2.7)$$

L'importance relative des différents termes, à part celui d'appariement, est montrée sur la figure 2.5.

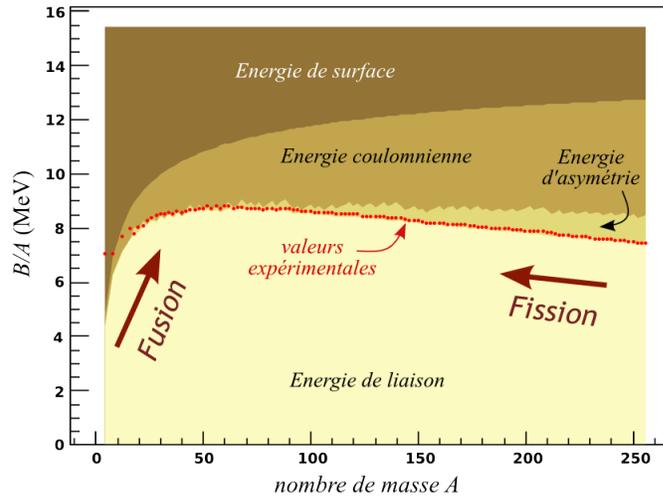


FIGURE 2.5: Contributions des différents termes dans l'expression de l'énergie de liaison. (c) UdS

Les effets purement quantiques et le terme de surface expliquent la croissance de  $B/A$  observée pour les noyaux légers ; l'accroissement de la répulsion coulombienne rend compte de la diminution de  $B/A$  pour les noyaux lourds.

La figure 2.6 montre la qualité de l'accord dans le cas des noyaux pair-pair. L'écart devient important pour des noyaux dont le nombre de protons ou neutrons est égal à

$$N \text{ ou } Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

Ces noyaux ont une énergie de liaison plus élevée que leurs voisins et les nombres correspondants ont reçu le nom de **nombres magiques**. Ces propriétés de stabilité pour des nombres donnés de constituants suggèrent une analogie avec le modèle atomique, où par exemple, les gaz rares ont des propriétés de stabilité chimique liée à la couche électronique externe saturée. En physique nucléaire, on développe de façon similaire un **modèle nucléaire en couches**. La fermeture de couche entraîne une plus grande stabilité du noyau, que ne reflète pas la formule de Bethe-Weizsäcker.

L'expression de la masse du noyau, appelée formule de masse de Bethe-Weizsäcker est obtenue en regroupant les expressions 2.4 et 2.6 :

$$M_{\text{noyau}}(Z, A)c^2 = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - a_v A + a_{\text{surf}} A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \delta(Z, N) \quad (2.8)$$

### 3.3 Détermination des coefficients

La détermination des coefficients de la formule de Bethe-Weizsäcker se fait en ajustant les données expérimentales à l'expression. Cet ajustement varie en fonction des données utilisées (nombre et propriétés des noyaux, précision des mesures expérimentales,...).

Voici des valeurs parmi les plus récentes trouvées dans la littérature <sup>1</sup> :

- $a_v = 15.409 \pm 0.026$  MeV
- $a_{\text{surf}} = 16.873 \pm 0.080$  MeV

1. Acta Phys.Polon. **B37** (2006) 1833-1846 [arXiv :nucl-th/0408013v3]

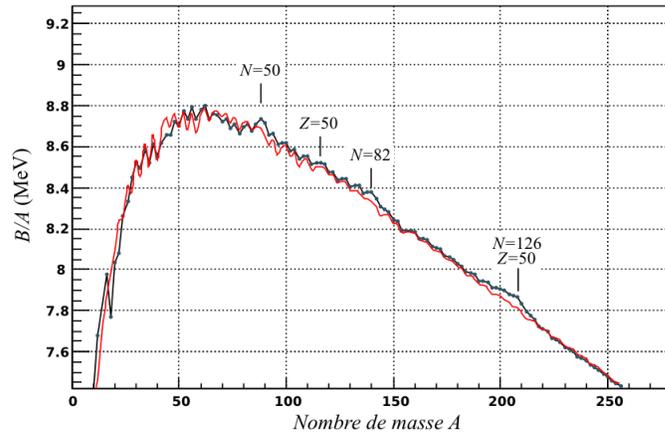


FIGURE 2.6: Comparaison des énergies de liaison par nucléon expérimentales (points) et des valeurs obtenues à partir de la formule de B-W dans le cas de noyaux pair-pair stables. Les paramètres utilisés sont indiqués dans le texte.

- $a_c = 0.695 \pm 0.002$  MeV
- $a_{sym} = 22.435 \pm 0.065$  MeV
- $a_p = 11.155 \pm 0.864$  MeV, ce terme est approximé par  $a_p = 12$  MeV dans la plupart des calculs.

## 4 Applications

### 4.1 Energie de séparation d'un nucléon

Jouant un rôle analogue à l'énergie d'ionisation d'un atome, c'est l'énergie nécessaire pour enlever du noyau un proton ( $S_p(Z, N)$ ) ou un neutron ( $S_n(Z, N)$ ). Elle s'exprime à partir de l'énergie de liaison :

$$\text{– proton : } S_p(Z, N) = [M_{noy}(Z-1, N) + m_p - M_{noy}(Z, N)] c^2$$

$$\Rightarrow S_p(Z, N) = B(Z, N) - B(Z-1, N)$$

$$\text{– neutron : } S_n(Z, N) = [M_{noy}(Z, N-1) + m_n - M_{noy}(Z, N)] c^2$$

$$\Rightarrow S_n(Z, N) = B(Z, N) - B(Z, N-1)$$

### 4.2 $Q$ d'une réaction

Considérons une réaction  $X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4$  mettant en jeu 4 noyaux de masses respectives  $M_{noy}(i)$ ,  $i=1$  à 4.

La conservation de l'énergie se traduit par

$$E = [M_{noy}(1) + M_{noy}(2)] c^2 + T_1 + T_2 = [M_{noy}(3) + M_{noy}(4)] c^2 + T_3 + T_4$$

On pose

$$\begin{aligned}
 Q &= [(M_{noy}(1) + M_{noy}(2)) - (M_{noy}(3) + M_{noy}(4))] c^2 \\
 &= (T_3 + T_4) - (T_1 + T_2)
 \end{aligned}$$

Il y a conservation du nombre de nucléons, donc  $Q$  peut s'exprimer à partir des énergies de liaison

$$Q \approx (B(3) + B(4)) - (B(1) + B(2))$$

Trois cas peuvent se produire :

1.  $Q = 0$  : c'est par exemple le cas si  $X_3 + X_4 = X_1 + X_2$ . On dit qu'on a une diffusion élastique
2.  $Q < 0$  : la réaction est **endoénergétique** ; elle n'est possible que si l'on apporte de l'énergie sous forme d'énergie cinétique. Dans le centre de masse, l'énergie minimum à mettre en jeu est égale à  $|Q|$ . L'énergie correspondante dans le laboratoire s'appelle **énergie de seuil** de la réaction.
3.  $Q > 0$  : la réaction est **exoénergétique**. Deux exemples importants : la **fission** d'un noyau lourd en deux noyaux plus légers et la **fusion** de deux noyaux légers.

Dans la fission de  ${}_{92}^{235}\text{U}$ , l'énergie moyenne par nucléon passe de  $B/A = 7,6$  MeV à  $B/A = 8,5$  MeV ; une telle fission libre donc  $\approx (8,5 - 7,6) \times 235 \approx 210$  MeV.

Quelques exemples de réaction de fusion de deux noyaux légers :

- (a)  $d + d \rightarrow {}_2^3\text{He} + n$  avec  $Q = 3,25$  MeV
- (b)  $d + d \rightarrow t + p$  avec  $Q = 4$  MeV
- (c)  $d + t \rightarrow {}_2^4\text{He} + n$  avec  $Q = 17,6$  MeV

La dernière réaction est particulièrement énergétique ; cela provient de la grande énergie de liaison du noyau  ${}_2^4\text{He}$  (également appelé particule  $\alpha$ ), qui correspond à un noyau magique ( $Z=N=2$ ).

### 4.3 Détermination de l'isobare le plus stable

Pour un nombre de masse donné, on peut se demander quel est l'isobare le plus stable. On l'obtiendra en minimisant la masse atomique  $M_{at}(Z, A)$  en fonction de  $Z$  (isobare =  $A$  constant). On doit donc calculer

$$\frac{\partial}{\partial Z} [M_{at}(Z, A)]_{A \text{ fixé}} = 0$$

d'après la formule de masse

$$-(m_n - m_p - m_e)c^2 - 4a_{sym} \frac{A - 2Z}{A} + 2a_c \frac{Z}{A^{1/3}} = 0$$

comme  $(m_n - m_p - m_e)c^2 \approx 0,78$  MeV  $\ll 4a_{sym} \approx 93,16$  MeV, on a donc pour le numéro atomique le plus stable l'entier le plus proche de

$$Z_0 \approx \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \frac{a_c}{4a_{sym}} A^{2/3}}$$

Avec les valeurs des paramètres  $a_c$  et  $a_{sym}$  données plus haut, et pour un noyau  $A = 208$ , on obtient  $Z_0 = 81,77$  : le noyau  ${}_{82}^{208}\text{Pb}$  est l'un des plus stables.

#### 4.4 Stabilité des noyaux

On appelle noyaux stables ceux qui ont une vie moyenne comparable à l'âge de l'univers, soit  $\sim 10^{10}$  ans. On en connaît environ 275. Les autres noyaux connus (plusieurs milliers) sont instables, produits par réaction nucléaire.

Si l'on représente chaque isotope par un point sur un diagramme  $(Z, N)$ , d'abscisse le nombre de protons  $Z$  et d'ordonnée le nombre de neutrons  $N$ , on obtient la figure 2.7.

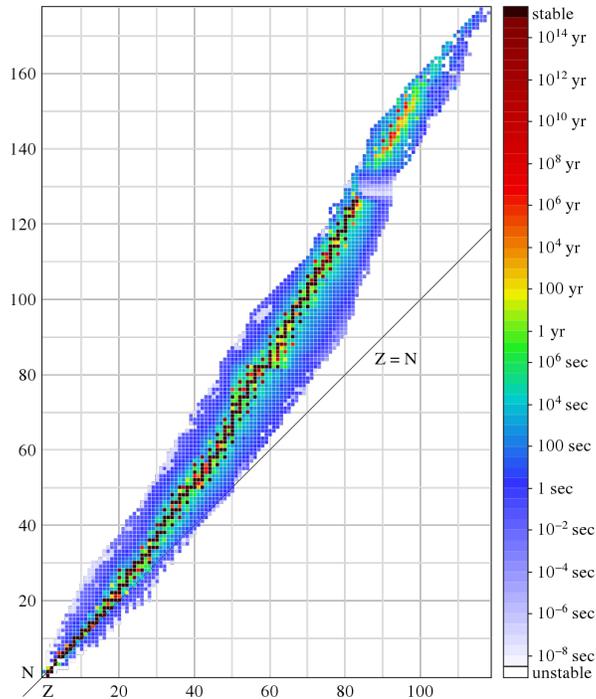


FIGURE 2.7

Les noyaux stables sont représentés par les carrés noirs. Ils se situent autour d'une ligne moyenne appelée ligne de stabilité; pour les noyaux légers, celle-ci se confond avec la bissectrice ( $N = Z$ ); pour les noyaux lourds apparaît un excès de neutrons de plus en plus marqué, ce dont on tient compte dans la formule de Bethe-Weizsäcker par le terme d'asymétrie.

Si on considère la fonction à deux variables  $M_{noy}(Z, N)$ , on peut la représenter comme une surface dans un espace où, perpendiculairement au plan  $(Z, N)$ , il existerait une troisième dimension où l'on porterait la valeur des masses de noyaux. La surface est appelée **surface d'énergie nucléaire**. Elle a la forme d'une vallée dont le fond est occupé par les noyaux stables. Les flancs correspondent à des noyaux instables, moins liés (pour  $N$  et  $Z$  donnés, si  $M_{noy}$  est plus grand,  $B$  est plus faible).

En réalisant une coupe de cette surface par un plan perpendiculaire à la feuille et d'équation  $A = N + Z = constante$ , on obtient les masses des différents isobares en fonction de leur numéro atomique  $Z$ . On voit par exemple que le  ${}^{59}_{27}\text{Co}$  ayant une masse plus petite que ses voisins est stable, contrairement aux autres qui peuvent se désintégrer par un processus radioactif (figure 4.2).



## Dimension des noyaux et densité nucléaire

### 1 Introduction

L'étude du noyau amène naturellement à se poser la question de la distribution de quantités physiques caractéristiques en son sein. On peut mesurer ces distributions, comme la distribution de charge, celle de magnétisme ainsi que l'extension spatiale du noyau par des expériences de diffusion de particules chargées. Historiquement, Rutherford et ses collaborateurs ont utilisé, vers 1910, la diffusion de particules  $\alpha$  (noyaux d'hélium) pour cerner l'extension spatiale, et fournir la preuve expérimentale de l'existence du noyau au sein de l'atome. Ceci a permis l'introduction du modèle atomique de Niels Bohr.

La diffusion d'électrons de grande énergie permet de sonder l'intérieur du noyau et de mesurer les distributions de charge et de magnétisme.

La relation de base reliant l'impulsion des particules sonde et leur longueur d'onde associée, qui nous intéresse ici, est la relation de De Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3.1)$$

Ordres de grandeur :

particule	énergie cinétique T	longueur d'onde associée $\lambda$
$\alpha$	8 MeV	5,1 fm
p	200 MeV	1,9 fm
p	500 GeV	$2,5 \times 10^{-3}$ fm
$e^-$	600 MeV	2 fm

Quelques rappels utiles de relativité restreinte :

$$T = (\gamma - 1)mc^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1 + \frac{T}{mc^2} \quad (3.2)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \quad (3.3)$$

$$pc = \gamma\beta mc^2 \quad (3.4)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2\pi \times 197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}}{pc} \quad (3.5)$$

## 2 Diffusion de Rutherford

Considérons une particule  $\alpha$ , de charge  $2e$  subissant une diffusion par un noyau de charge  $Ze$ . La diffusion a lieu sous l'effet du potentiel électrostatique

$$V = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

### 2.1 Diffusion d'une particule chargée par un noyau

L'interaction coulombienne est due à une force centrale, donc conservative. On a alors conservation de l'énergie et du moment cinétique.

En coordonnées polaires, cela donne :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} \\ L &= \mu r^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

où les quantités  $E$  et  $L$  sont des constantes du mouvement.

Rappel :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu\vec{v}, \text{ ce qui peut s'écrire en coordonnées cartésiennes } \vec{L} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \wedge \mu(v_x\vec{i} + v_y\vec{j})$$

Si  $v_0$  est la vitesse initiale de la particule  $\alpha$  à l'infini avant l'interaction et  $b$  le paramètre d'impact, on a

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu v_0^2 \\ L &= \mu b v_0 \end{aligned}$$

Initialement,  $v_x = v_0$  et  $v_y = 0$ . Donc

$$\vec{L} = \mu b v_0 \vec{j} \wedge \vec{i} = -\mu b v_0 \vec{k}$$

Pour calculer les caractéristiques de la trajectoire, utilisons la méthode du vecteur de Lenz (ou Laplace-Runge-Lenz). Ce vecteur est défini par

$$\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} - \alpha\mu\hat{r} \quad \text{avec le vecteur unitaire} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r \quad (3.6)$$

On va montrer que ce vecteur est constant dans notre cas. Dans un cas plus général, on montre que  $\vec{A}$  est constant dans tous les problèmes où deux corps interagissent par l'intermédiaire d'une force centrale qui varie comme le carré inverse de la distance. Ces problèmes sont appelés "problèmes de Kepler".

#### Invariance de $\vec{A}$

Dérivons  $\vec{A}$  par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{L} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{L}}{dt} - \alpha\mu \frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{L} - \alpha\mu\dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'invariance de  $\vec{L} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ .

par ailleurs

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r \wedge \mu r^2 \dot{\theta} \vec{k} - \alpha \mu \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ &= +\alpha \mu \dot{\theta} \vec{e}_\theta - \alpha \mu \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{A}$  est bien constant.

### Calcul de $A^2$ et $\vec{A} \cdot \vec{r}$

Nous aurons besoin de  $A^2$  et  $\vec{A} \cdot \vec{r}$  par la suite, mais ces deux quantités vont nous apprendre des choses sur la trajectoire.

Commençons par  $A^2$ .

$$\vec{A}^2 = (\vec{p} \wedge \vec{L})^2 + \alpha^2 \mu^2 - 2\alpha\mu(\vec{p} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{e}_r$$

Le produit mixte  $(\vec{p} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{e}_r$  est le déterminant :

$$(\vec{p} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{e}_r = (\vec{p}, \vec{L}, \vec{e}_r) = \begin{vmatrix} p_r & 0 & 1 \\ p_\theta & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \end{vmatrix} = p_\theta L = \mu r \dot{\theta} L = \frac{L^2}{r}$$

et  $(\vec{p} \wedge \vec{L})^2 = p^2 L^2$  car  $\vec{p}$  et  $\vec{L}$  sont orthogonaux.

On a donc

$$\vec{A}^2 = p^2 L^2 + \alpha^2 \mu^2 - 2\alpha\mu \frac{L^2}{r} = \alpha^2 \mu^2 + L^2 \left( p^2 - \frac{2\alpha\mu}{r} \right)$$

que l'on peut réécrire, en remarquant que l'énergie de la particule est égale à  $E = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r}$  :

$$\vec{A}^2 = \alpha^2 \mu^2 + 2\mu E L^2$$

Soit

$$\vec{A}^2 = \alpha^2 \mu^2 \left[ 1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2 \mu} \right] \quad (3.7)$$

d'où l'on déduit une contrainte sur l'énergie :

$$E \geq -\frac{\alpha^2 \mu}{2L^2} \quad (3.8)$$

Intéressons-nous maintenant à  $\vec{A} \cdot \vec{r}$ .

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (\vec{p} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{r} - \alpha\mu r$$

Cette expression contient encore un produit mixte :

$$(\vec{p} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{r} = (\vec{p}, \vec{L}, \vec{e}_r) = \begin{vmatrix} p_r & 0 & r \\ p_\theta & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \end{vmatrix} = rp_\theta L = \mu r^2 \dot{\theta} L = L^2$$

donc

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = L^2 - \alpha\mu r$$

Pour le moment, nous savons que le vecteur  $\vec{A}$  est constant, dans le plan perpendiculaire  $\vec{L}$ , c'est à dire le plan de la trajectoire. Choisissons comme axe ( $Ox$ ) la droite dirigée par  $\vec{A}$ . Dans ce cas,  $\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta$ , où  $\theta$ , l'angle entre  $\vec{A}$  et  $\vec{r}$  devient l'angle polaire. On peut alors écrire :

$$Ar \cos \theta + \alpha\mu r = L^2 = r(A \cos \theta + \alpha\mu)$$

ou encore

$$r = \frac{\frac{L^2}{\alpha\mu}}{1 + \frac{A}{\alpha\mu} \cos \theta}$$

ici,  $r$  a une forme bien reconnaissable, celle d'une conique de paramètre  $p$  et d'excentricité  $e$ , si on l'écrit

$$r = \frac{p^2}{1 + e \cos \theta} \quad (3.9)$$

avec

$$p^2 = \frac{L^2}{\alpha\mu} \quad (3.10)$$

$$e = \frac{A}{\alpha\mu} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2\mu}} \quad (3.11)$$

Dans ce cas, puisque l'énergie  $E$  est positive, on a  $e > 1$  et la conique est une hyperbole.

## 2.2 Angle de déflexion de la particule

La figure 3.1 illustre la diffusion d'une particule de vitesse initiale (à l'infini)  $\vec{v}_0$ , avec un paramètre d'impact  $b$ , sur un noyau  $N$ . Après la diffusion, la particule repart à l'infini dans la direction  $\Theta$ .

La conservation de l'énergie (classique) implique

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = \frac{1}{2}\mu v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = v_1$$

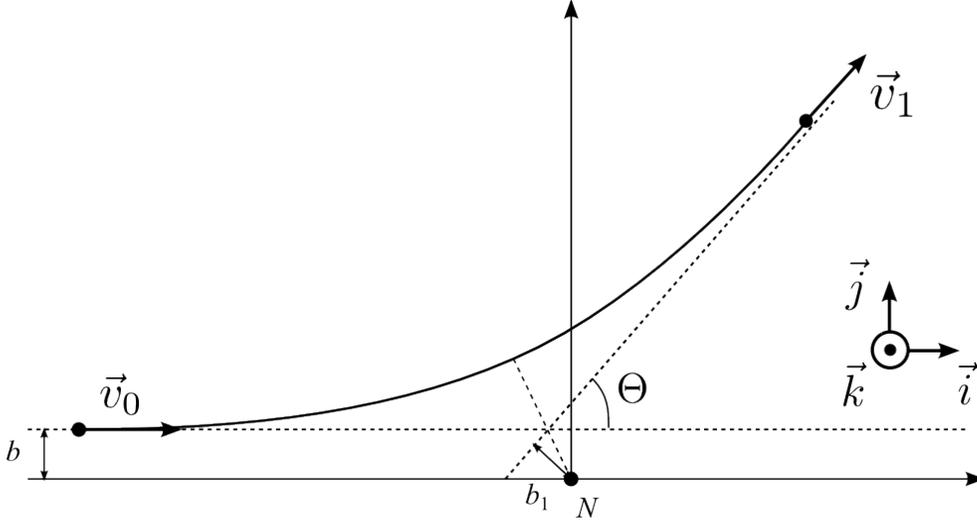


FIGURE 3.1

et celle du moment cinétique

$$\mu b v_0 = \mu b_1 v_1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b$$

Utilisons le fait que  $\vec{A}$  est un vecteur constant. Calculons  $\vec{A}$  à l'infini avant la diffusion. On a, dans la base cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :  $\vec{v} = v_0 \vec{i}$ ,  $\hat{r} = -\vec{i}$  et  $\vec{L} = -\mu v_0 b \vec{k}$ . On peut en déduire :

$$\vec{A} = (\mu v_0 \vec{i}) \wedge (-\mu v_0 b \vec{k}) + \alpha \mu \vec{i}$$

Et en se rappelant  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$  et  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ ,

$$\vec{A} = \mu^2 v_0^2 b \vec{j} + \alpha \mu \vec{i}$$

Calculons maintenant  $\vec{A}$  à l'infini après la diffusion. La vitesse est  $\vec{v}_1$  et s'écrit, avec  $\hat{r}$  :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_0 \cos \Theta \vec{i} + v_0 \sin \Theta \vec{j} \\ \hat{r} &= \cos \Theta \vec{i} + \sin \Theta \vec{j} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \mu v_0 (\cos \Theta \vec{i} + \sin \Theta \vec{j}) \wedge (-\mu v_0 b \vec{k}) - \alpha \mu (\cos \Theta \vec{i} + \sin \Theta \vec{j}) \\ &= -\mu^2 v_0^2 b (\cos \Theta \vec{i} \wedge \vec{k} + \sin \Theta \vec{j} \wedge \vec{k}) - \alpha \mu (\cos \Theta \vec{i} + \sin \Theta \vec{j}) \\ &= \vec{i} (-\mu^2 v_0^2 b \sin \Theta - \alpha \mu \cos \Theta) + \vec{j} (\mu^2 v_0^2 b \cos \Theta - \alpha \mu \sin \Theta) \end{aligned}$$

On identifie les deux expressions de  $\vec{A}$  avant et après la diffusion, puisque  $\vec{A}$  est constant. Les coefficients de  $\vec{i}$  donnent

$$\begin{aligned} \alpha \mu &= -\mu^2 v_0^2 b \sin \Theta - \alpha \mu \cos \Theta \\ \alpha \mu (1 + \cos \Theta) &= -\mu^2 v_0^2 b \sin \Theta \\ 2\alpha \mu \cos^2 \frac{\Theta}{2} &= -2\mu^2 v_0^2 b \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\tan \frac{\Theta}{2} = -\frac{\alpha}{\mu v_0^2 b} \quad (3.12)$$

(on obtient la même relation avec les coefficients de  $\vec{j}$ )

On peut réécrire ce résultat en fonction de la distance minimum d'approche  $D$  qui sera obtenue lorsque le paramètre d'impact est nul. La particule chargée repart alors vers l'infini selon l'axe ( $Ox$ ) et  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_0$ . En tenant compte du fait que l'énergie potentielle d'interaction est nulle à l'infini et du fait que la vitesse s'annule lorsque la particule fait demi-tour à la distance  $D$  du noyau, la conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 + 0 = 0 - \frac{\alpha}{D} \Rightarrow -\frac{\alpha}{\mu v_0^2} = \frac{D}{2}$$

et donc l'angle de diffusion peut s'écrire (traditionnellement, on écrit la cotangente)

$$\cot \frac{\Theta}{2} = -\frac{2b}{D} \quad (3.13)$$

### 3 Section efficace

#### 3.1 Probabilité de diffusion à un angle $\Theta$

Pour une énergie incidente donnée, soit  $D$  donné,  $\Theta$  dépend du paramètre d'impact  $b$ . Comme illustré sur la figure 3.2, si  $b$  est compris entre  $b$  et  $b + db$ ,  $\Theta$  sera compris entre  $\Theta$  et  $\Theta + d\Theta$ .

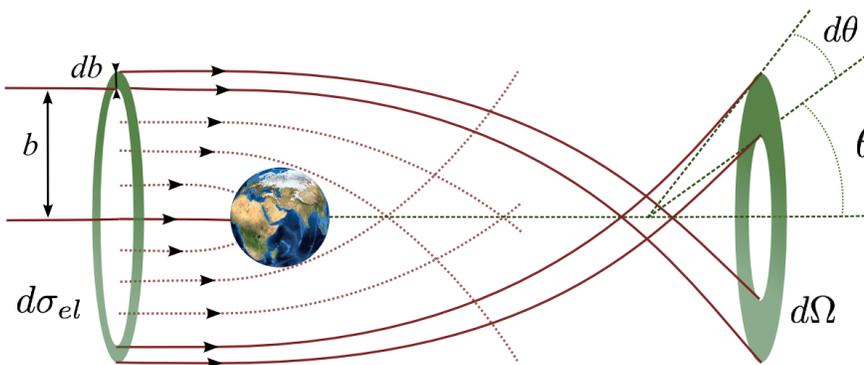


FIGURE 3.2

En différentiant l'équation 3.13, avec  $D$  constant, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d\Theta}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} &= 2 \frac{db}{D} \Rightarrow \\ db &= -\frac{D}{4} \frac{d\Theta}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dans certaines expériences de physique des particules ou de physique nucléaire, on envoie un faisceau de particules sur une cible. Celle-ci contient un grand nombre de centres diffuseurs. Soient  $S$  la surface de la cible,

$x$  son épaisseur et  $\rho$  la densité volumique de centres (le nombre de noyaux par unité de volume). Le nombre de centres diffuseurs est donc  $N_C = \rho \cdot S \cdot x$ .

Une donnée intéressante pour la suite est la probabilité qu'une particule incidente soit diffusée dans un angle compris entre  $\Theta$  et  $\Theta + d\Theta$ . Pour ce faire, il faut qu'elle arrive sur l'un des centres diffuseurs avec un paramètre d'impact compris entre  $b$  et  $b + db$ .

Supposons que toutes les particules soient envoyées uniformément sur la surface  $S$ . La probabilité de tomber sur un élément de surface quelconque  $d\sigma$  est alors simplement  $dP = \frac{d\sigma}{S}$ .

Si l'on considère la somme des surfaces de toutes les couronnes de rayon  $b$  à  $db$  près autour de chaque centre, et qu'on la note  $dS_b$ , la probabilité de diffusion est le rapport :

$$\begin{aligned} P(b)db &= \frac{dS_b}{S} \\ &= \frac{2\pi b \cdot db \cdot \rho x S}{S} \\ &= \rho x 2\pi b db \end{aligned}$$

Le nombre  $dn$  de particules diffusées par unité de temps dans l'intervalle  $[\Theta, \Theta + d\Theta]$  est

$$dn = N \cdot P(b) \cdot db = N \rho x 2\pi b db \quad (3.15)$$

où  $N$  est le nombre de particules incidentes par unité de temps.

On appelle section efficace différentielle  $d\sigma$  la probabilité pour qu'une seule particule soit diffusée par un seul centre diffuseur dans l'angle solide  $d\Omega$  autour d'un cône d'angle au sommet  $\Theta$  :

$$d\sigma = \frac{dn}{d\Omega} d\Omega = \frac{dn}{N \rho x} = 2\pi b db$$

Soit, en se rappelant que  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= 2\pi b \frac{db}{d\Omega} \\ &= 2\pi b \frac{db}{d\theta} \frac{d\theta}{d\Omega} \\ &= 2\pi \frac{D \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \frac{D}{4} \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2\pi \sin \theta d\theta} \end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (3.16)$$

## 3.2 Vérifications expérimentales

Geiger et Marsden (1911) : étude de la diffusion de particules  $\alpha$  d'énergie donnée par des feuilles métalliques (Ag, Au,...), vérification validité de l'expression 3.16 sur un grand intervalle angulaire (sauf  $\theta \rightarrow 0$ , alors  $d\sigma/d\Omega \rightarrow \infty$ ).

Si, à  $\theta = 180^\circ$ , on fait varier l'énergie cinétique des  $\alpha$ , donc la distance  $D$ , pour un couple cible-projectile donné, expérience en accord avec l'expression théorique tant que  $D$  est supérieur à une certaine valeur.

→ si  $D < r_{\text{fin}}$ , force coulombienne plus seule en jeu

→ permet d'appréhender le rayon du noyau et de vérifier la formule de Rutherford.

### 3.3 Généralisation de la notion de section efficace

On considère une expérience dans laquelle un faisceau de particules ( $\phi$  particules par seconde) bombarde une cible d'épaisseur  $e$  contenant  $N$  noyaux cibles par unité de volume (fig ...). Un détecteur sensible à un certain type de particules produites, caractéristiques d'une réaction nucléaire donnée, compte les particules ; le détecteur couvre un angle solide  $d\Omega$  dans la direction  $\theta$ . Le nombre de particules produites dans la réaction étudiée et détectées par seconde est

$$n = \phi \cdot Ne \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Cette relation définit la **section efficace différentielle**  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , caractéristique de la réaction considérée. Elle est homogène à une surface et l'unité utilisée est le barn :

1 barn =  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>, avec ses sous-multiples : mb,  $\mu$ b, nb, pb, etc...

Noter que le résultat est indépendant du faisceau, à condition que celui-ci tombe tout entier sur la cible.

On obtient la **section efficace totale** du processus par intégration de la section efficace différentielle sur toutes les directions possibles :

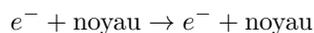
$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

si, bien sûr, la section efficace différentielle ne dépend pas de  $\varphi$  et qu'on a une symétrie de révolution.

## 4 Distribution de charge dans le noyau

Nous nous intéressons maintenant au caractère quantique du noyau. La position des nucléons individuels ne peut être définie avec une précision arbitraire, mais on peut étudier leur distribution, notamment par des expériences de diffusion d'électrons. Lorsque leur énergie est suffisante, de l'ordre de 500 MeV à 1 GeV, et que la longueur d'onde associée est de 3,4 à 1,2 fm, ils constituent une sonde permettant d'explorer l'intérieur du noyau. Nous allons donc étudier la diffusion d'électrons par le noyau. Ceux-ci ne sont pas sensibles à l'interaction forte liant les nucléons, mais à l'interaction électromagnétique, bien connue. Ceci permet d'appliquer la mécanique quantique à la Physique Nucléaire. On comparera alors la section efficace expérimentale à la valeur calculée théoriquement.

Expérimentalement, on étudie la réaction



qui est une diffusion élastique et dont on mesure la section efficace différentielle  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  à un angle  $\theta$  donné. (exemple d'appareillage expérimental : fig 3.3).

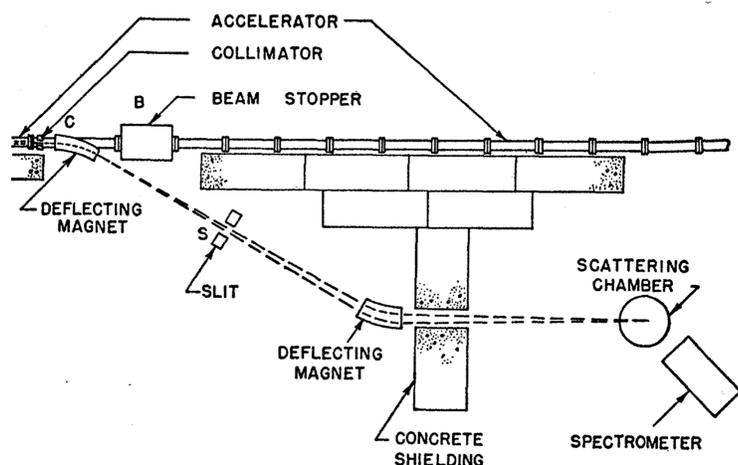


FIGURE 3.3

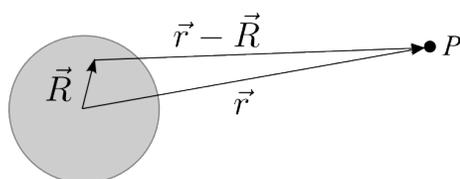


FIGURE 3.4

Du point de vue théorique, la fonction d'onde de l'électron incident et celle de l'électron diffusé peuvent être décrites par des ondes planes :

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \quad \psi_f = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} e^{i \frac{\vec{p}' \cdot \vec{r}}{\hbar}}$$

Ces fonctions d'onde ne sont pas de carré sommable, on limite le volume d'intégration à  $\mathcal{V}$ , volume de normalisation. On peut le choisir aussi grand que l'on veut, de façon à ce que le spectre d'énergie de l'électron soit aussi proche que possible d'un spectre continu ; on verra que le résultat est indépendant de  $\mathcal{V}$ .

La transition de l'état initial à l'état final est provoquée par le hamiltonien d'interaction représentant l'interaction électromagnétique entre l'électron incident et la distribution de charge du noyau. On va assimiler le noyau à une distribution de charge uniforme, celle des protons, dont l'intégrale vaut  $Ze$ , charge du noyau. Appelons  $\rho(\vec{R})$  la distribution de "centres chargés", qui sont les protons, telle que

$$Ze \int_0^\infty \rho(\vec{R}) d^3 \vec{R} = Ze$$

donc

$$\int_0^\infty \rho(\vec{R}) d^3 \vec{R} = 1$$

Le hamiltonien d'interaction, décrivant le potentiel électromagnétique, s'écrit alors

$$H_{int} = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3 \vec{R} \quad (3.17)$$

où  $\vec{R}$  est le vecteur position de l'élément de volume nucléaire chargé (dans le noyau) et  $\vec{r}$  le vecteur position du point auquel on considère le potentiel (fig. 3.4).

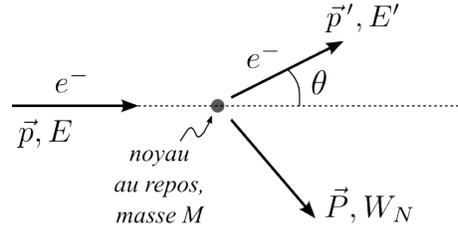


FIGURE 3.5

Le taux de transition par unité de temps est donné par la théorie des perturbations dépendante du temps sous la forme de la "règle d'or de Fermi" :

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn_f}{dE_f} \quad (3.18)$$

où  $\lambda_{if}$  est le taux de transition par unité de temps,  $\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle$  est l'élément de matrice de transition et  $\frac{dn_f}{dE_f}$  est la densité d'états finals. Nous allons calculer successivement chacun de ces éléments.

#### 4.1 Densité des états finals

La densité des états est celle de l'électron enfermé dans une boîte de volume  $\mathcal{V}$ . Pour une impulsion  $p_f$  (à  $dp_f$  près) et un électron partant à l'angle  $\theta$  dans l'angle solide  $d\Omega$ , le nombre d'états s'écrit :

$$dn_f = \frac{\text{volume d'espace de phase}}{\text{volume d'une cellule}} = \frac{\mathcal{V} d^3 \vec{p}_f}{h^3} = \frac{\mathcal{V} p_f^2 dp_f d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \quad (3.19)$$

et la densité d'états est

$$\rho_f = \frac{dn_f}{dE_f} = \frac{\mathcal{V} p_f^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp_f}{dE_f} d\Omega \quad (3.20)$$

Certains auteurs multiplient par 2 pour tenir compte des états de spin de l'électron ( $g = 2s + 1 = 2$ ).

#### 4.2 Un peu de cinématique

La figure 3.5 donne la configuration cinématique de la diffusion que nous étudions. On suppose l'électron relativiste, c'est à dire

$$m_e c^2 \ll E \text{ ou } E' \Rightarrow pc \approx E, \quad p'c \approx E'$$

$\vec{p}$  est la quantité de mouvement initiale,  $\vec{p}'$  la quantité de mouvement finale. On a alors conservation de  $(E, \vec{p})$  :

$$\begin{aligned} E_i &= pc + Mc^2 = E_f = p'c + W_N \\ \vec{p} &= \vec{p}' + \vec{P} \end{aligned}$$

d'où

$$E_f = p'c + \sqrt{P^2 c^2 + M^2 c^4} = p'c + \sqrt{(p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta) c^2 + M^2 c^4}$$

donc  $dE_f$  s'écrit :

$$\begin{aligned} dE_f &= c dp' + \frac{(2p' dp' - 2p \cos \theta)c}{2W_N} = c dp' \left[ 1 + \frac{(p' - p \cos \theta)c}{W_N} \right] \\ &= c dp' \left[ \frac{W_N + p'c - pc \cos \theta}{W_N} \right] = c dp' \left[ \frac{E_f - pc \cos \theta}{W_N} \right] \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\frac{dp'}{dE_f} \equiv \frac{dp'_f}{dE_f} = \frac{W_N}{c(E_f - pc \cos \theta)} \quad (3.21)$$

équation dont nous aurons besoin plus loin.

Par ailleurs

montrer en TD que

$$\frac{p'}{p} = \frac{Mc^2}{E_f - pc \cos \theta} \quad \frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)} \quad (3.22)$$

dont nous aurons aussi besoin.

### 4.3 Élément de matrice

L'élément de matrice peut s'écrire :

$$T_{fi} = \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}} \int e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{r}} H_{int} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \quad (3.23)$$

On pose  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$  :

$$T_{fi} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} H_{int} d^3 \vec{r}$$

En introduisant l'expression du hamiltonien d'interaction :

$$T_{fi} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\mathcal{V}} \iint \frac{\rho(\vec{R}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} d^3 \vec{R} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r} - \vec{R})}}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3 \vec{r}$$

où  $\rho(\vec{R})$  est la distribution spatiale de charge normalisée à 1 :  $\int \rho(\vec{R}) d^3 \vec{R} = 1$ . L'expression précédente peut se réécrire, en posant  $\vec{s} = \vec{r} - \vec{R}$  :

$$T_{fi} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\mathcal{V}} \int \rho(\vec{R}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} \left[ \int \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{s}}}{|\vec{s}|} d^3 \vec{s} \right] d^3 \vec{R} \quad (3.24)$$

On va noter  $I$  l'intégrale entre crochets. Si l'on se place dans un système de coordonnées sphériques  $(s, \alpha, \phi)$  de l'extrémité du vecteur  $\vec{s}$  avec un axe  $\vec{Oz} // \vec{q}$ , on a

$$d^3 \vec{s} = s^2 ds \sin \alpha d\alpha d\phi$$

et on peut exprimer cette intégrale  $I$  :

$$I = \int \frac{e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{s}}{\hbar}}}{s} d^3\vec{s} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} s ds \int_0^\pi e^{i\frac{qs\cos\alpha}{\hbar}} \sin\alpha d\alpha$$

Soit, en faisant le changement de variable  $u = \cos\alpha$  :

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_0^{+\infty} s ds \int_{-1}^1 e^{i\frac{qsu}{\hbar}} du \\ &= 4\pi \int_0^{+\infty} s ds \frac{\hbar \sin(\frac{qs}{\hbar})}{qs} \\ &= \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \int_0^\infty \sin\beta d\beta \end{aligned}$$

avec encore un changement de variable  $\beta = \frac{qs}{\hbar}$ . L'intégrale sur  $\sin\beta$  n'est pas définie. On lui donne un sens en la considérant comme

$$\int_0^\infty \sin\beta d\beta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon\beta} \sin\beta d\beta$$

or

$$\int_0^\infty e^{-\epsilon\beta} \sin\beta d\beta = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

ce qui se calcule en faisant deux intégrations par parties. Donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon\beta} \sin\beta d\beta = 1$$

et

$$I = \int \frac{e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{s}}{\hbar}}}{s} d^3\vec{s} = \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \quad (3.25)$$

Dans le calcul de  $T_{if}$ , l'autre intégrale  $\int \rho(\vec{R}) e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{R}}{\hbar}} d^3\vec{R}$  est la transformée de Fourier de la distribution de "charge" : on l'appelle le facteur de forme du noyau, noté  $F(\vec{q})$  :

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{R}) e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{R}}{\hbar}} d^3\vec{R} \quad (3.26)$$

Finalement, en utilisant l'expression  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$

$$T_{fi} = -\frac{Z\alpha\hbar c}{\mathcal{V}} \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} F(\vec{q}) \quad (3.27)$$

#### 4.4 Section efficace différentielle de diffusion élastique

La fonction d'onde associée à l'électron incident est

$$\varphi_e = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} e^{+i \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{r}}{\hbar}} \quad (3.28)$$

Le flux  $I$  de particules, c'est à dire le nombre de particules par unité de temps et de surface, est le produit de la densité volumique de ces particules par leur vitesse, soit :

$$I = (\varphi_e \varphi_e^*) c = \frac{c}{\mathcal{V}} \quad (3.29)$$

car les particules sont relativistes,  $v \approx c$ . La probabilité de diffusion par unité de temps et par noyau cible est :

$$\lambda_{if} = I \frac{d\sigma}{d\Omega} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda_{if} \cdot \mathcal{V}}{d\Omega c}$$

avec  $\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f}$  donné par la règle d'or de Fermi. L'expression de  $\frac{dn}{dE_f}$ , le nombre d'états par unité d'énergie finale est :

$$\frac{dn}{dE_f} = \frac{\mathcal{V} p_f^2 dp_f d\Omega}{(2\pi\hbar)^3 dE_f}$$

C'est ici qu'on a besoin de rappeler les equations 3.21 et 3.22 :

$$\frac{dp_f}{dE_f} = \frac{W_N}{c(E_f - pc \cos \theta)} = \frac{W_N p'}{p c M c^2} \quad (3.30)$$

Dans le cas où la masse du noyau  $M$  est beaucoup plus grande que l'énergie de l'électron incident :

$$M c^2 \gg E \text{ ou } E' \quad p' \approx p, \quad E' \approx E, \quad W_N \approx M c^2$$

$$\frac{dp_f}{dE_f} = \frac{1}{c} \quad p_f \equiv p' \approx \frac{E'}{c} \Rightarrow \frac{dn}{dE_f} = \frac{\mathcal{V} E'^2 d\Omega}{(2\pi\hbar)^3 c^3}$$

Donc la section efficace différentielle s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda_{if} \cdot \mathcal{V}}{d\Omega c} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \frac{\mathcal{V}^2 E'^2 d\Omega}{d\Omega (2\pi\hbar)^3 c^4}$$

Ce qui donne après substitution de  $T_{fi}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4(Z\alpha\hbar c)^2 E'^2}{q^4 c^4} |F(\vec{q})|^2 \quad (3.31)$$

On peut mettre cette expression sous une forme intéressante en reprenant les approximations précédentes :

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}', \quad q^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = \vec{p}^2 + \vec{p}'^2 - 2pp' \cos \theta$$

$$p \approx \frac{E}{c}, \quad p' \approx \frac{E'}{c}, \quad E \approx E'$$

donc

$$q^2 = 2E^2(1 - \cos \theta) = 4 \frac{E^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

et la section efficace différentielle devient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} |F(\vec{q})|^2 \quad (3.32)$$

On note le premier terme "section efficace de Rutherford" :

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} = \frac{(Z\alpha)^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (3.33)$$

Expression qui permet de retrouver la formule de Rutherford vue dans le cas classique non relativiste (à faire en TD).

Finalement

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} |F(\vec{q})|^2 \quad (3.34)$$

#### 4.5 Propriétés du facteur de forme

1.  $F(0) = \int \rho(\vec{R}) d^3\vec{R} = 1$
2. Si le transfert est petit ( $q \ll \hbar/R$ ), on peut faire un développement limité de l'exponentielle :

$$F(\vec{q}) = \int d^3\vec{R} \left( 1 + i \frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar} - \frac{1}{2!} \left( \frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar} \right)^2 + \dots \right) \rho(\vec{R})$$

Si la densité  $\rho(\vec{R})$  est à symétrie sphérique, ne dépend que de  $|\vec{R}|$ , on peut calculer les deux premiers termes du développement, en prenant  $\vec{q}/|\vec{Oz}| \Rightarrow i\vec{q} \cdot \vec{R} = iqR \cos \theta$  :

$$\int \left( i \frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar} \right) d^3\vec{R} = \int i \frac{qR \cos \theta}{\hbar} R^2 dR \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.35)$$

$$= i \frac{q}{\hbar} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty \rho(R) R^3 dR \quad (3.36)$$

$$= 0 \quad (3.37)$$

car l'intégrale sur  $\theta$  est nulle (intégrande impair).

$$\frac{1}{2} \int \left( \frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar} \right)^2 d^3\vec{R} = \frac{q^2}{2\hbar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^\infty \rho(R) R^4 dR \quad (3.38)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \frac{q^2}{2\hbar^2} \int_0^\infty \rho(R) R^4 dR \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

car l'intégrale sur  $\theta$  donne  $2/3$ .

On peut remarquer ici une chose. Si l'on calcule la valeur moyenne du carré du rayon :

$$\langle R^2 \rangle = \frac{\int R^2 \rho(\vec{R}) d^3 \vec{R}}{\int R^2 d^3 \vec{R}} \quad (3.41)$$

le dénominateur est égal à 1 (voir la définition de  $\rho$  plus haut). En passant en coordonnées sphériques :

$$\langle R^2 \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty \rho(R) R^4 dR \quad (3.42)$$

$$= 4\pi \int_0^\infty \rho(R) R^4 dR \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

donc le terme 3.38 peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2} \int \left( \frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar} \right)^2 d^3 \vec{R} = \frac{q^2}{6\hbar^2} \langle R^2 \rangle$$

On peut donc écrire le facteur de forme au deuxième ordre :

$$F(q) \approx 1 - \frac{q^2}{6\hbar^2} \langle R^2 \rangle \quad (3.45)$$

Ceci permet d'accéder au rayon quadratique moyen  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$ . En effet

$$\langle R^2 \rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dF(q)}{d(q^2)} \right|_{q^2=0} \quad (3.46)$$

On mesure expérimentalement le facteur de forme  $F(q)$  à petites valeurs de  $q^2$ , la pente de la tangente en  $q^2 = 0$  permet de déduire  $\langle R^2 \rangle$ .

3. Si la distribution de charge était ponctuelle ( $\rho(\vec{R}) = \delta(\vec{R})$ ), on aurait :

$$F_{pt}(\vec{q}) = \int e^{i\frac{\vec{q} \cdot \vec{R}}{\hbar}} \delta(\vec{R}) d^3 \vec{R} = 1 \quad (3.47)$$

## 4.6 Remarques sur la section efficace

### influence de la masse du noyau

Dans ce qui précède, on a fait l'approximation  $M \approx \infty$ . Si on veut tenir compte de la masse du noyau, il faut reprendre l'expression de  $\frac{dp_f}{dE_f} = \frac{W_N p'}{p c M c^2}$  que l'on avait approximé par  $1/c$ , avec  $p' = p$ . Si on tient compte de  $M$ ,  $p'$  est légèrement différent de  $p$  et

$$\frac{dp_f}{dE_f} \approx \frac{p'}{cp} = \frac{E'}{cE}$$

la section efficace est multipliée par  $E'/E$  :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} \left[ \frac{1}{1 + \frac{2E}{m_e c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right] |F(\vec{q})|^2 \quad (3.48)$$

### influence du spin de l'électron

Dans ce qui précède, on a "ignoré" le spin de l'électron. On pourrait voir que ceci modifie la section efficace (diffusion électron-nucléon) et prend la forme de la section efficace de Mott :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \times \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.49)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{pt}^{relat} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{1}{4} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 T_i}\right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (3.50)$$

### 4.7 Résultats expérimentaux

La détermination expérimentale de  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(e + \text{noyau} \rightarrow e + \text{noyau})$  permet de mesurer le facteur de forme  $F(q)$  et de remonter, par transformée de Fourier inverse à la distribution de charge  $\rho(r)$ . La figure 3.6 montre les résultats obtenus pour quelques noyaux magiques ayant une forme sphérique. Cette figure donne la distribution de charge radiale. L'épaisseur du trait représente l'incertitude des résultats. Ces courbes montrent qu'au moins pour des noyaux lourds, la distribution est presque constante au centre et dans une partie du noyau et décroît ensuite : la "surface" du noyau est une zone diffuse à laquelle on peut attribuer une certaine épaisseur. Une

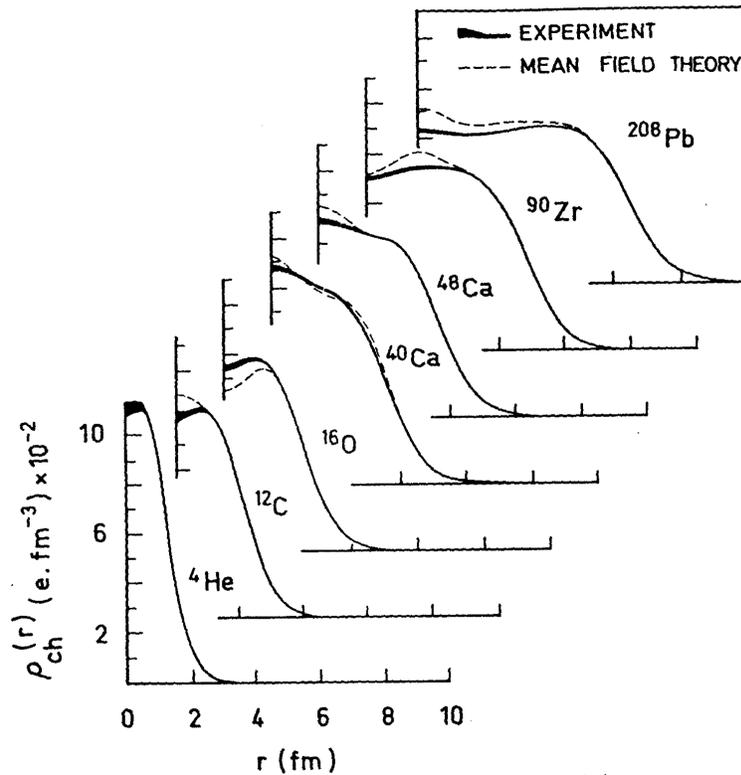


FIGURE 3.6: Distribution de densité de charge pour des noyaux à couches doublement fermées (B. Frois). L'épaisseur du trait représente l'incertitude expérimentale. Les courbes en pointillés sont les prédictions de modèles à champ moyen.

paramétrisation qui rend bien compte de cette distribution de charge est donnée par (fig 3.7) :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (3.51)$$

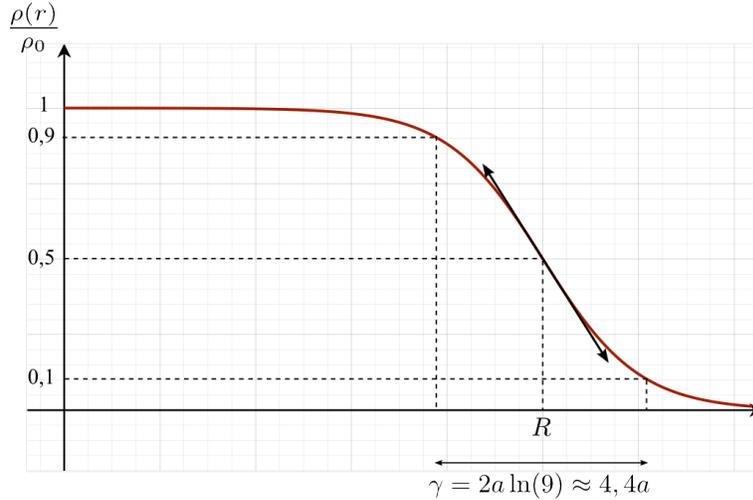


FIGURE 3.7

Le paramètre  $R$  est défini par  $\frac{\rho(R)}{\rho_0} = \frac{1}{2}$  ; le paramètre  $\rho_0$  est relié à  $R$  (rayon) et  $a$  (paramètre de diffusivité) par la condition de normalisation

$$4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr = Ze \quad (3.52)$$

l'ensemble des résultats pour les noyaux assez lourds ( $A \gtrsim 30$ ) s'accorde avec  $R = 1,07 \times A^{1/3}$  fm et  $a = 0,545$  fm.

La figure (...) compare les données de la diffusion  $e^- + \text{Au} \rightarrow e^- + \text{Au}$  à 153 MeV, avec les calculs obtenus en prenant  $\rho(r) = \delta(r)$ ,  $\rho = \text{cte}$  et  $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$ .

La figure 3.8 compare les données de la diffusion  $e^- + \text{Pb} \rightarrow e^- + \text{Pb}$ , avec les calculs obtenus dans un modèle de champ moyen.

## 4.8 Densité nucléaire

La distribution des protons au sein des noyaux est donc maintenant connue. Celle des neutrons a été également mesurée. Les mesures sont moins précises mais on observe qu'elles diffèrent assez peu de celle des protons. L'expression précédente peut donc être considérée comme une bonne représentation de la distribution des nucléons dans le noyau. La densité de nucléons au centre du noyau est :

$$\rho_{nucleon} \approx \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \approx 0,14 \text{ nucléon/fm}^3 \text{ ou } 10^{14} \text{ g/cm}^3 \quad (3.53)$$

L'indépendance de ce résultat vis à vis de  $A$  traduit la saturation des forces nucléaires.

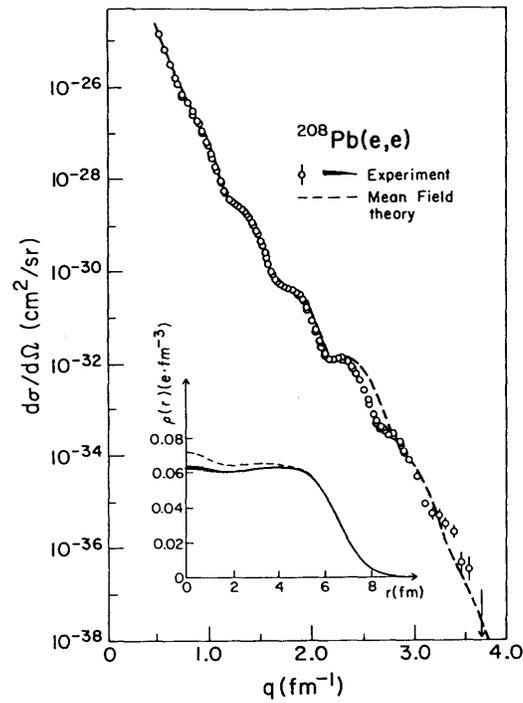


FIGURE 3.8: Section efficace de diffusion élastique électron sur Pb.

**Remarque :** ce qui a été fait jusqu'ici pourrait laisser penser que les noyaux ont toujours une forme sphérique. Il n'en est rien. Même dans l'état fondamental, ils peuvent avoir des formes ellipsoïdales (quadripolaire) ou "en poire" (octupolaire), ou autres. Quand le noyau a une forme voisine de la sphère, il est dit "normalement déformé" ; mais il peut être "superdéformé" voire "hyperdéformé" (voir le chapitre 6 sur les modèles nucléaires).

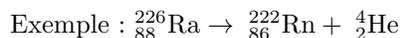
## Radioactivité : généralités

Nous avons parlé de la stabilité des noyaux, ce qui suppose que certains noyaux sont plus stables que d'autres. Ceux qui sont instables se transforment spontanément en d'autres noyaux (on dit qu'ils se **desintègrent**) en émettant simultanément des particules. Les désintégrations radioactives sont les premières réactions nucléaires étudiées, elles ont permis la découverte du noyau atomique et l'étude de certaines de ses propriétés.

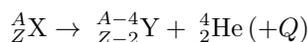
On observe trois types de particules émises, ou rayonnement, appelés  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  et classés alphabétiquement selon leur pouvoir de pénétration dans la matière. Le rayonnement  $\alpha$  est le moins pénétrant, arrêté par une feuille de papier, le rayonnement  $\gamma$  le plus pénétrant, nécessitant plusieurs cm de plomb.

### 1 Radioactivité $\alpha$

C'est le processus par lequel un noyau  ${}^A_Z X$  se transforme en un noyau  ${}^{A-4}_{Z-2} Y$  en émettant un noyau  ${}^4_2 \text{He}$  ou particule  $\alpha$ .



et de façon générale



#### 1.1 Condition énergétique

Regardons les conditions énergétiques qui rendent ces réactions possibles. Si  $X$  est au repos, la conservation de l'énergie donne :

$$M_{at}(X)c^2 = M_{at}(Y)c^2 + M_{at}(\text{He})c^2 + T_Y + T_\alpha$$

où  $T_Y$  et  $T_\alpha$  sont les énergies cinétiques (positives) de l'atome  $Y$  et de l'atome d'He. La valeur de  $Q$  pour la réaction est

$$Q = T_Y + T_\alpha = [M_{at}(X) - M_{at}(Y) - M_{at}(\text{He})]c^2 > 0$$

La condition  $Q > 0$  est également vraie pour les masses nucléaires et se traduit donc par

$$M(Z, A) > M(Z - 2, A - 4) + M(\text{He})$$

Cette condition peut se réexprimer avec les énergies de liaison :

$$Q = B(A - 4, Z - 2) + B({}_2^4\text{He}) - B(A, Z) > 0$$

Pour quels noyaux cette condition est-elle vérifiée ? Pour  $Z > 50$ , on a une relation à peu près linéaire entre  $B/A$  et  $A$  :

$$\frac{B(Z, A)}{A} = f(Z, A) = aA + b$$

avec  $a \approx -7,59 \times 10^{-3}$  MeV et  $b \approx 9,40$  MeV.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} B(A, Z) - B(A - 4, Z - 2) &\approx Af(Z, A) - (A - 4)f(Z - 2, A - 4) \\ &\approx A(aA + b) - (A - 4)(a(A - 4) + b) \\ &= a(A^2 - (A - 4)^2) + 4b \\ &= 8aA + 4(b - 4a) \end{aligned}$$

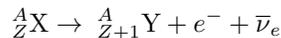
On constate que la relation  $B(A, Z) - B(A - 4, Z - 2) < B({}_2^4\text{He})$  avec  $B({}_2^4\text{He}) = 28,3$  MeV est à priori vérifiée pour  $A \gtrsim 230$ . Expérimentalement, on observe la radioactivité  $\alpha$  pour  $A \geq 200$ .

Pour  $Z \lesssim 50$ , le passage de  $(A, Z)$  à  $(A - 4, Z - 2)$  est impossible car un raisonnement similaire donne une valeur de  $A$  négative... (raisonnement laissé aux bons soins du lecteur).

## 2 Radioactivité $\beta$

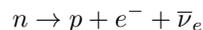
Au cours d'une désintégration  $\beta$ , un  $e^-$  ou un  $e^+$  est émis et le noyau change de nature chimique, sans changer le nombre de nucléons.

### 2.1 Radioactivité $\beta^-$

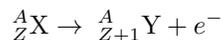


Par exemple  ${}_{82}^{212}\text{Pb} \rightarrow {}_{83}^{212}\text{Bi} + e^- + \bar{\nu}_e$

Cette réaction résulte de la transformation d'un neutron en proton :



Le neutrino produit est une particule très difficile à observer. Jusque vers 1930, on pensait que la réaction était :



Le noyau  $X$  étant au repos, nous allons montrer que la quantité de mouvement de l'électron serait alors fixée. En effet, écrivons les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\begin{aligned}\vec{p}_Y + \vec{p}_e &= 0 \\ M_X c^2 &= E_Y + E_e\end{aligned}$$

avec, en relativité

$$\begin{aligned}E_Y^2 &= M_Y^2 c^4 + p_Y^2 c^2 \\ E_e^2 &= m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\left[ M_X c^2 - (m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2)^{1/2} \right]^2 &= M_Y^2 c^4 + p_Y^2 c^2 \\ \Rightarrow M_X^2 c^4 + m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2 - 2M_X c^2 \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} &= M_Y^2 c^4 + p_Y^2 c^2\end{aligned}$$

et puisque  $p_Y^2 c^2 = p_e^2 c^2$

$$\Rightarrow (m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2)^{1/2} = \frac{1}{2M_X} (M_X^2 + m_e^2 - M_Y^2) c^2$$

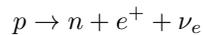
Donc  $p_e$  est fixé. Or on constate expérimentalement que  $p_e$  varie de façon continue de 0 à une valeur  $p_{e_{max}}$ . Il fallait donc soit renoncer à la conservation de l'énergie soit introduire une troisième particule. C'est cette deuxième solution que proposa Pauli en 1930. Il postule l'existence d'une particule neutre, très légère (voire de masse nulle) : le neutrino. Il sera mis en évidence expérimentalement en 1957.

## 2.2 Radioactivité $\beta^+$



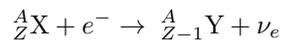
Par exemple  ${}^{11}_6 \text{C} \rightarrow {}^{11}_5 \text{B} + e^+ + \nu_e$

Cette réaction résulte de la transformation d'un proton en neutron :

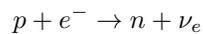


## 2.3 Capture électronique

On a observé des transformations dans lesquelles  $Z$  diminue d'une unité et  $A$  est conservé sans émission de positron. Ce type de radioactivité est appelé **capture électronique** (noté C.E. dans la suite) et est dû à l'absorption d'un électron du cortège électronique de l'atome  ${}^A_Z X$  qui devient  ${}^A_{Z-1} Y$  :



Cette réaction résulte de :



Exemple :  ${}^7_4 \text{Be} + e^- \rightarrow {}^7_3 \text{Li} + \nu_e$ .

L'électron capturé laisse un trou dans le cortège électronique, trou rempli lors de la désexcitation de l'atome. Il y a alors émission de rayons X, photons dûs au réarrangement du cortège.

## 2.4 Conditions énergétiques

Comme tout type de transformation, la radioactivité  $\beta$  ou C.E. ne peut se produire que si certaines conditions énergétiques sont satisfaites.

### Radioactivité $\beta^-$

On néglige la masse du  $\nu$ , dont on sait qu'elle est très faible. L'équation de contrainte énergétique s'écrit :

$$M_{noy}(A, Z) > M_{noy}(A, Z + 1) + m_e$$

avec  $m_e$  la masse de l'électron. En écrivant les masses atomiques, c'est à dire en ajoutant  $Zm_e$  aux deux membres, et en négligeant l'énergie de liaison des électrons :

$$M_{at}(A, Z) > M_{at}(A, Z + 1)$$

On représente traditionnellement les transitions radioactives sur un schéma où l'axe vertical représente l'énergie, l'état fondamental du noyau fils correspondant au zéro. Le noyau père est placé à une énergie égale à l'énergie disponible, où  $Q$  de la réaction (différence de masses atomiques  $Q = M_{at}(A, Z) - M_{at}(A, Z + 1)$ ). L'axe horizontal représente une variable discriminante des noyaux en jeu, très souvent la valeur de  $Z$ . La figure 4.1 illustre quelques exemples.

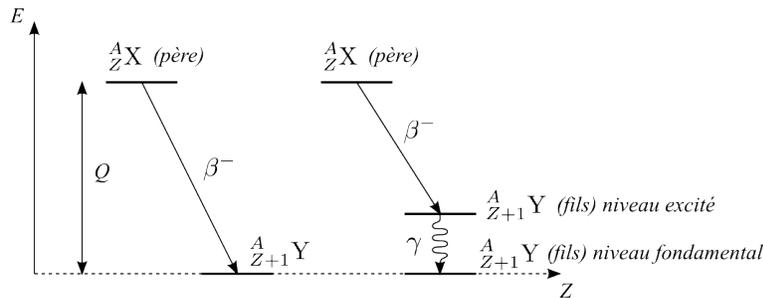


FIGURE 4.1: Exemples de diagramme d'énergie de transitions radioactives.

### Radioactivité $\beta^+$

On néglige pareillement la masse du  $\nu$ .

$$M_{noy}(A, Z) > M_{noy}(A, Z - 1) + m_e$$

En écrivant les masses atomiques, c'est à dire en ajoutant  $Zm_e$  aux deux membres, et en négligeant l'énergie de liaison des électrons :

$$M_{at}(A, Z) > M_{at}(A, Z - 1) + 2m_e$$

### Capture électronique

Toujours en négligeant la masse du  $\nu$ .

$$M_{noy}(A, Z) + m_e > M_{noy}(A, Z - 1)$$

(Rappel : la C.E. est une réaction  $\frac{A}{Z}X + e^- \rightarrow \frac{A}{Z-1}Y + \nu_e$ ) En écrivant les masses atomiques, c'est à dire en ajoutant  $(Z - 1)m_e$  aux deux membres, et en négligeant l'énergie de liaison des électrons :

$$M_{at}(A, Z) > M_{at}(A, Z - 1)$$

La capture électronique "concurrence" la désintégration  $\beta^+$  lorsque celle-ci est énergétiquement possible.

## 2.5 Parabole de masse

Pour un nombre de masse  $A$  donné, on peut écrire la formule de Bethe-Weizsäcker sous la forme d'un polynôme du second degré en  $Z$ .

$$M_{noyau}(Z, A)c^2 = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - a_v A + a_{surf} A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \delta(Z, N) \quad (4.1)$$

Que l'on peut réécrire

$$M_{noyau}(Z, A)c^2 = \left( Am_n c^2 - a_v A + a_{surf} A^{2/3} + a_{sym} A \right) - (4a_{sym} + (m_n - m_p)c^2) Z + \left( \frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{4a_{sym}}{A} \right) Z^2 - \delta(A, Z) \quad (4.2)$$

Soit

$$M_{noyau}(Z, A)c^2 = \alpha + \beta Z + \gamma Z^2 - \delta(A, Z) \quad (4.3)$$

avec

$$\alpha = Am_n c^2 - a_v A + a_{surf} A^{2/3} + a_{sym} A \quad (4.4)$$

$$\beta = (m_p - m_n)c^2 - 4a_{sym} \quad (4.5)$$

$$\gamma = \frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{4a_{sym}}{A} \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

et, d'après l'expression de la formule de BW :

$$\delta = \begin{cases} \Delta(A) & \text{si } N \text{ et } Z \text{ sont pairs} \\ 0 & \text{si } A \text{ est impair} \\ -\Delta(A) & \text{si } N \text{ et } Z \text{ sont impairs} \end{cases}$$

Le terme  $\delta$  impose de distinguer deux cas.

### A impair

Dans ce cas,  $\delta = 0$  et on a une seule parabole (fig. 4.2). Un noyau sur la branche de droite se désintègre par émission  $\beta^+$  et/ou C.E. puisqu'on a diminution de  $Z$ ; sur la branche de gauche, la désintégration se fait par émission  $\beta^-$ . Il y a un seul isobare stable, celui d'énergie de liaison maximale, c'est à dire de masse minimale.

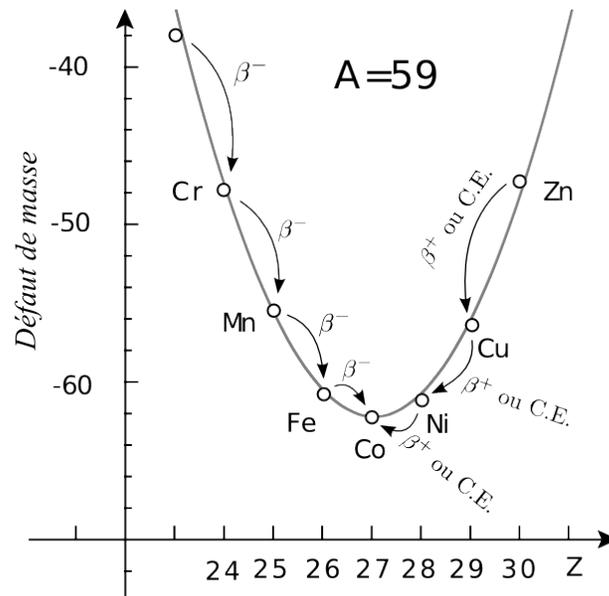


FIGURE 4.2

### A pair

$\delta$  peut prendre deux valeurs opposées, il y a deux paraboles de masse suivant son signe (fig.4.3). La parabole supérieure correspond aux noyaux impair-impair, la parabole inférieure aux noyaux pair-pair.

On voit que les isobares impair-impair sont tous instables vis à vis des noyaux pair-pair voisins. Dans la nature, seuls 4 noyaux impair-impair sont stables :  ${}^2_1\text{H}$ ,  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$  qui sont des éléments légers avec  $N = Z$  et pour lesquels le modèle de la goutte liquide n'est pas adapté.

On voit par exemple que le  ${}^{64}_{29}\text{Cu}$  peut se désintégrer par désintégration  $\beta^+$ ,  $\beta^-$  ou C.E.. Par ailleurs, deux noyaux pair-pair ( $A - Z$ ) et ( $A, Z - 2$ ) peuvent éventuellement être stables si les conditions énergétiques sont satisfaites. C'est le cas sur la figure 4.3 pour  ${}^{64}_{28}\text{Ni}$  et  ${}^{64}_{30}\text{Zn}$ .

## 3 Radioactivité $\gamma$

Lorsqu'un noyau se désexcitant passe d'un état d'énergie donnée (appelé état excité) à un autre état d'énergie moindre, voire à l'état fondamental qui est l'état d'énergie la plus basse, il émet un photon. C'est la **radioactivité  $\gamma$** .

Dans ce cas, ni  $A$ , ni  $Z$  ne changent. La désexcitation d'un noyau par émission  $\gamma$  est parfois en compétition avec le phénomène de **conversion interne** dans lequel le noyau transfère son excès d'énergie directement à un électron du cortège électronique, qui est alors éjecté de l'atome. Il ne s'agit pas de l'interaction d'un photon avec un électron, mais bien d'un transfert direct (par l'intermédiaire d'un **photon virtuel**). La conversion interne ne doit pas non plus être confondue avec la radioactivité  $\beta^-$  dans laquelle l'électron qui sort de l'atome est créé au sein du noyau, qui change de nature chimique.

D'autres types de radioactivité ont été également observés, tels que la **fission** qui est une fragmentation d'un noyau lourd en deux autres avec émission de neutrons, ou bien l'émission spontanée de neutrons ou de protons.

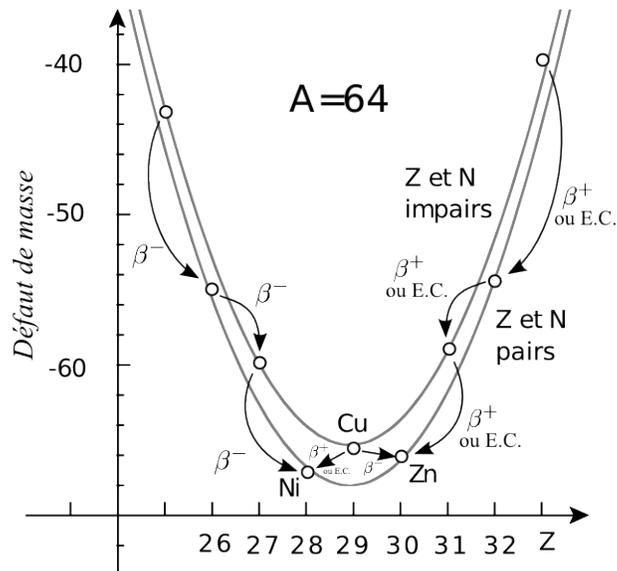


FIGURE 4.3

## 4 Loi de la radioactivité

La loi régissant les désintégrations radioactives est indépendante du mécanisme de transformation.

### 4.1 Loi fondamentale de la radioactivité

Considérons un nombre donné (grand) d'atomes radioactifs tous de même espèce. La désintégration de ces atomes ne se fera pas simultanément mais progressivement au cours du temps suivant la loi de décroissance radioactive :

$$\Delta N(t) = -\lambda N(t) \Delta t$$

où

- $N(t)$  est le nombre de noyaux radioactifs de l'espèce initiale existant à l'instant  $t$ . On suppose qu'il ne varie que très peu dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ .
- $\Delta N(t)$  est le nombre de noyaux qui se transforment pendant l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ .
- $\lambda$  est une constante de proportionnalité ayant les dimensions de l'inverse d'un temps, appelés **constante radioactive**.

Puisque  $N$  est grand, de l'ordre de grandeur du nombre d'Avogadro, on peut assimiler  $N(t)$  à une variable continue et écrire

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

ce qui donne la loi de désintégration radioactive :

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad (4.8)$$

où  $N(0)$  est le nombre d'atomes à un instant initial  $t = 0$ .

Interprétation physique de  $\lambda$  :

$$\lambda = -\frac{\frac{dN(t)}{dt}}{N(t)} = \frac{-dN(t)}{N(t) dt}$$

$(-dN(t))/N(t)$  est le rapport entre le nombre d'atomes ( $-dN$ ) se désintégrant pendant l'intervalle de temps  $dt$  au nombre d'atomes disponibles à l'instant  $t$ , c'est à dire la probabilité de désintégration pendant le temps  $dt$ . Si on divise ce nombre par  $dt$ , on obtient une probabilité de désintégration par unité de temps.

*La constante radioactive  $\lambda$  est la probabilité de désintégration par unité de temps. La probabilité pour qu'un noyau radioactif subsiste à l'instant  $t$  est :  $e^{-\lambda t}$ .*

A noter : la désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. On ne sait pas provoquer la désintégration d'un noyau individuel, ni prévoir l'instant précis où elle se produira. On ne peut que calculer des probabilités de désintégration.

### Modes de désintégration

Un noyau peut avoir plusieurs modes de désintégration, comme par exemple l'isotope  ${}_{29}^{64}\text{Cu}$  qui peut se désintégrer par désintégration  $\beta^+$  ou C.E. en  ${}_{29}^{64}\text{Ni}$  ou bien par désintégration  $\beta^-$  en  ${}_{30}^{64}\text{Zn}$ .

La loi exponentielle reste vraie dans ce cas et l'on peut écrire pour chaque mode de désintégration le nombre de désintégrations dans l'état final  $f_a$  :  $dN_a = -N\lambda_a dt$ , où  $\lambda_a$  sera la constante partielle de désintégration du mode  $a$ .

Le nombre total de désintégrations dans tous les modes est alors

$$dN = \sum_a dN_a = -N\lambda dt \quad (4.9)$$

avec  $\lambda = \sum_a \lambda_a$ . Par exemple  $\lambda = \lambda_{\beta^+} + \lambda_{\text{C.E.}} + \lambda_{\beta^-}$ .

Et l'on a donc une loi unique, quel que soit le mode choisi, car on part d'un ensemble unique de particules. Une particule qui se désintègre dans le mode  $f_a$  n'est plus disponible pour les autres modes.

## 4.2 Activité

L'activité d'un échantillon est le nombre de désintégrations par unité de temps. Elle se calcule simplement :

$$A(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N(0)e^{-\lambda t} \quad (4.10)$$

$$A(t) = \lambda N(t) \quad (4.11)$$

### Unités d'activité

- le Becquerel, symbole Bq. 1 Bq = 1 désintégration/seconde
- le Curie, symbole Ci unité ancienne dont l'emploi n'est plus officiel, mais que vous rencontrerez sans doute. 1 Ci =  $3,7 \times 10^{10}$  désintégrations/seconde. Ceci correspond à l'activité de 1 g de  ${}^{226}\text{Ra}$  de période  $T = 1620$  ans.

### 4.3 Période et vie moyenne

**Période**  $T$  ou  $t_{1/2}$  = temps au bout duquel le nombre de noyaux de la source est réduit d'un facteur 2. Le lien avec la constante radioactive s'établit simplement :

$$N_0 e^{-\lambda T} = N_0/2 \quad \Rightarrow \quad \lambda T = \ln 2$$

donc

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

La **vie moyenne** est la moyenne des temps de vie des noyaux radioactifs d'une espèce donnée. Elle est notée  $\tau$  et se calcule aisément avec la loi de probabilité :

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt}$$

Soit, après calcul

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{0,693}$$

### 4.4 Largeur de raie

Du point de vue de la mécanique quantique, les noyaux radioactifs ne sont pas dans un état stationnaire ; leur énergie n'est pas définie avec une précision infinie et l'on a la relation d'incertitude :

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

où  $\Delta e$  est l'incertitude sur l'énergie  $E$  mesurée pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ . Comme  $\Delta t$  ne peut pas être plus long que la durée de vie  $\tau$  du noyau, ce qui s'écrit  $(\Delta t)_{max} \approx \tau$ , on en déduit l'incertitude minimum sur l'énergie :

$$(\Delta E)_{min} = \frac{\hbar}{\tau}$$

Cette incertitude minimum est appelée **largeur naturelle** de l'état et on la désigne par la lettre  $\Gamma$ .

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

On appelle aussi cette quantité **largeur de raie** parce que l'énergie de l'état se répercute sur l'énergie des rayonnements (particules émises) que l'on observe souvent sous forme de raies dans les spectrographes.

### Ordres de grandeur

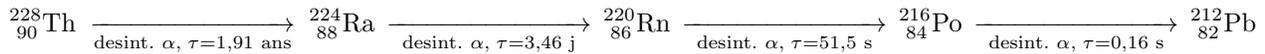
En utilisant  $\hbar c = 197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$  et  $c = 3 \times 10^{23} \text{ fm}\cdot\text{s}^{-1}$ , on peut exprimer  $\Gamma$  en MeV :

$$\Gamma = \frac{0,657 \times 10^{-21}}{\tau}$$

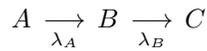
$$\begin{aligned}\tau = 10^{-11} \text{ s} &\Rightarrow \Gamma \approx 10^{-10} \text{ MeV} = 10^{-4} \text{ eV} \\ \tau = 10^{-16} \text{ s} &\Rightarrow \Gamma \approx 10^{-5} \text{ MeV} = 10 \text{ eV} \\ \tau = 10^{-22} \text{ s} &\Rightarrow \Gamma \approx 10 \text{ MeV}\end{aligned}$$

#### 4.5 Filiations radioactives

Il est fréquent qu'un noyau  $A$  se désintègre vers un noyau  $B$  lui-même radioactif, et ainsi de suite pour arriver à un noyau stable. On parle de **famille radioactive**. Par exemple



Illustrons le calcul de filiation, c'est à dire celui du nombre de noyaux  $B$  présents à un instant  $t$ . Pour ce faire, nous supposons que  $B$  se désintègre en un noyau  $C$  stable :



où  $\lambda_A$  et  $\lambda_B$  sont les constantes radioactives de  $A$  et  $B$ .

Au départ, le nombre de noyaux  $B$  est nul,  $N_B(0) = 0$ . La loi fondamentale donne pour la désintégration de  $A$  :

$$\frac{dN_A(t)}{dt} = -\lambda_A N_A(t)$$

A chaque instant, les noyaux  $A$  qui se sont désintégrés ont donné des noyaux  $B$ . Pendant un intervalle de temps  $dt$ , si  $dN_A = \lambda_A N_A(t) dt$  noyaux se sont désintégrés, il est apparu le même nombre de noyaux  $B$ . Mais ces noyaux se désintègrent et il disparaît  $\lambda_B N_B(t) dt$  noyaux  $B$  pendant le même intervalle de temps  $dt$ . Au total, la variation du nombre de noyaux  $B$  par unité de temps est donnée par :

$$\frac{dN_B(t)}{dt} = \lambda_A N_A(t) - \lambda_B N_B(t)$$

Le calcul de  $N_A(t)$  se fait en tenant compte de la condition initiale,  $N_A(t) = N_A(0)e^{-\lambda_A t}$  et donne l'équation :

$$\frac{dN_B(t)}{dt} + \lambda_B N_B(t) = \lambda_A N_A(0)e^{-\lambda_A t}$$

Cette équation différentielle se résout classiquement en recherchant d'abord la solution générale de l'équation sans second membre, qui est  $N'_B(t) = \alpha e^{-\lambda_B t}$ .

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre. On essaye une forme similaire au second membre :  $N''_B(t) = K e^{-\lambda_A t}$ . Ceci implique

$$\frac{dN''_B(t)}{dt} = -\lambda_A K e^{-\lambda_A t}$$

et en portant cette expression dans l'équation :

$$(-\lambda_A + \lambda_B)K e^{-\lambda_A t} = \lambda_A N_A(0)e^{-\lambda_A t} \Rightarrow K = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0)$$

la solution particulière s'écrit :

$$N_B''(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0) e^{-\lambda_A t}$$

La solution de l'équation est la somme

$$N_B(t) = N_B'(t) + N_B''(t) = \alpha e^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0) e^{-\lambda_A t}$$

La constante  $\alpha$  est déterminée grâce à la condition initiale  $N_B(0) = 0$  et l'on obtient finalement

$$N_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0) [e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}]$$

### Cas particuliers

–  $\tau_A \ll \tau_B$  (ou  $\lambda_A \gg \lambda_B$ ), le noyau père  $A$  a une durée de vie courte devant celle de son noyau fils  $B$ .

On peut écrire  $\lambda_A - \lambda_B \approx \lambda_A$  et

$$N_B(t) \approx N_A(0) e^{-\lambda_B t} [1 - e^{-\lambda_A t}]$$

et on peut encore faire une approximation lorsque  $t \gg \tau_A$  :  $N_B(t) \approx N_A(0) e^{-\lambda_B t}$ .

Les noyaux fils n'ont pratiquement pas commencé à se désintégrer lorsque les noyaux père se sont eux presque tous déjà désintégrés. Les noyaux fils suivent alors leur propre loi de désintégration.

–  $\tau_A \gg \tau_B$  (ou  $\lambda_A \ll \lambda_B$ ), le noyau père  $A$  a une durée de vie longue devant celle de son noyau fils  $B$ .

On peut écrire  $\lambda_B - \lambda_A \approx \lambda_B$  et

$$N_B(t) \approx \frac{\lambda_A}{\lambda_B} N_A(0) e^{-\lambda_A t} [1 - e^{-\lambda_B t}]$$

et on peut encore faire une approximation lorsque  $t \gg \tau_B$  :  $N_B(t) \approx \frac{\lambda_A}{\lambda_B} N_A(0) e^{-\lambda_A t}$ .

Le noyau fils se désintègre avec une période apparente qui est celle du père. Les noyaux fils ne peuvent se désintégrer plus vite qu'ils ne sont produits.

**Remarque :** si l'on regarde les activités  $A_A(t) = \lambda_A N_A(t) = \lambda_A N_A(0) e^{-\lambda_A t}$  est l'activité de  $A$ . L'activité de  $B$  s'écrit  $A_B(t) = \lambda_B N_B(t)$ . Donc quand  $t \gg \tau_B$ , on a

$$A_A(t) = A_B(t)$$

Les activités sont les mêmes. On parle **d'équilibre séculaire**.

## 4.6 Radioactivité naturelle et familles radioactives

Les noyaux radioactifs se désintégrant produisent des descendants qui peuvent être eux-mêmes radioactifs, se désintégrant ainsi de père en fils jusqu'à atteindre la vallée de stabilité. La plupart des radionucléides primordiaux (ceux présents lors de la formation de la Terre) atteignent la vallée de stabilité en un petit nombre de désintégrations.

Comment expliquer que l'on n'observe dans la nature qu'un petit nombre (une soixantaine) de noyaux radioactifs, alors que l'on peut en produire plusieurs milliers en laboratoire ? Si l'on suppose que tous ces isotopes existaient lors de la formation de la Terre, leur absence dans la nature vient de ce que leur temps de vie est bien inférieur à l'âge du système solaire, estimé à  $\approx 4,5 \times 10^9$  années. D'ailleurs, cette absence permet d'estimer l'âge de la Terre. Il ne reste donc que les nucléides dont la période a un ordre de grandeur de  $10^9$  ans, ou ceux qui sont continuellement produits par des parents ayant de très longues périodes.

La plupart des noyaux naturellement radioactifs ont un nombre de protons  $Z$  compris entre 81 et 92. Ils sont caractérisés par un excès de neutrons, mais la présence d'un grand nombre de protons entraîne une forte répulsion coulombienne et donc une instabilité. De tels noyaux peuvent se désintégrer par émission de particules  $\alpha$ , ce qui augmente le rapport neutrons/protons, ou par radioactivité  $\beta^-$ , ce qui le diminue, en laissant le nombre de nucléons intact. Une chaîne de désintégrations  $\alpha$  et  $\beta$  successives se produit amenant le noyau résultant dans la région de stabilité.

Comme l'émission d'une particule  $\alpha$  produit un chagement du nombre de masse de 4 et celui d'une particule  $\beta$  laisse le nombre de masse inchangé, la chaîne de désintégrations définit une série radioactive avec des nombres de masse différents de 4 unités. On a donc 4 séries radioactives :

- $A = 4n$  famille du Thorium, car l'élément naturel à très longue durée de vie est le  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  avec  $t_{1/2} = 1,4 \times 10^{10}$  ans.
- $A = 4n + 1$  famille du Neptunium, car l'élément à longue durée de vie est le  ${}^{237}_{93}\text{Np}$  avec  $t_{1/2} = 2,1 \times 10^6$  ans. Cette famille est artificielle, l'élément parent n'ayant pas une durée de vie suffisante pour subsister depuis l'époque de la formation de la Terre.
- $A = 4n + 2$  famille de l'Uranium-Radium, car l'élément naturel à très longue durée de vie est le  ${}^{238}_{92}\text{U}$  avec  $t_{1/2} = 4,47 \times 10^9$  ans.
- $A = 4n + 3$  famille de l'Uranium-Actinium, car l'élément naturel à très longue durée de vie est le  ${}^{235}_{92}\text{U}$  avec  $t_{1/2} = 7,04 \times 10^8$  ans.

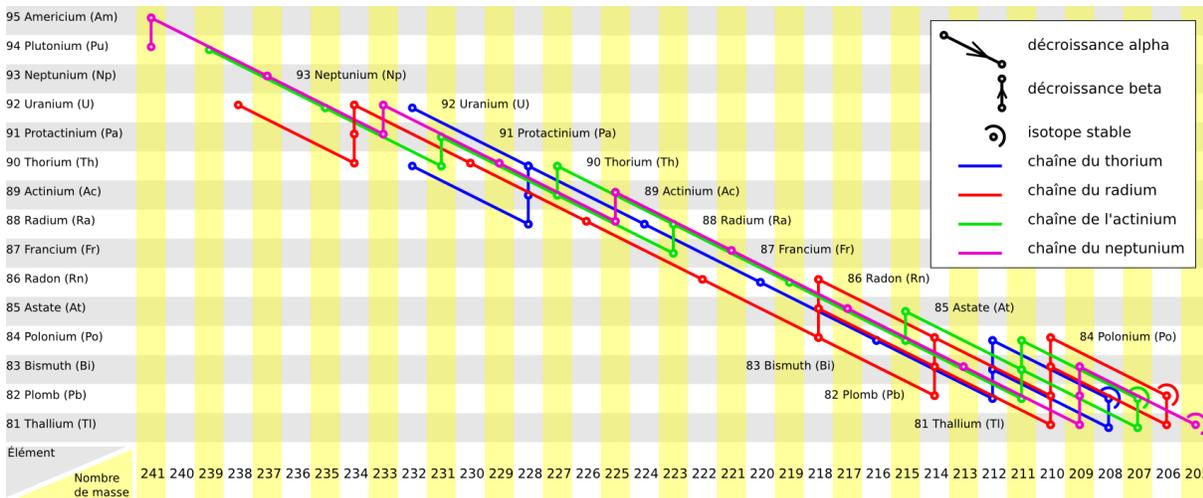


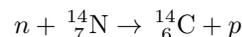
FIGURE 4.4

A ces trois familles s'ajoutent quelques radionucléides de période longue, sans filiation tels que  ${}^{40}_{19}\text{K}$  de  $t_{1/2} = 1,3$  Gan (Giga-an),  ${}^{115}_{49}\text{In}$  de  $t_{1/2} = 5 \times 10^{14}$  années,  ${}^{87}\text{Rb}$ ,  ${}^{144}\text{Nd}$ , etc...

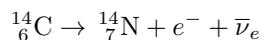
## 5 Applications de la radioactivité

### 5.1 Datation au ${}^{14}\text{C}$

Le rayonnement cosmique est constitué, à la latitude de  $40^\circ$ , de 86% de p, 12% d' ${}^4_2\text{He}$  et 2% de noyaux plus lourds. Ces particules ont un spectre d'énergie très étendu et elles interagissent dans la partie supérieure de l'atmosphère avec les noyaux de N, O ou C présents. Y sont créés des noyaux radioactifs et des particules secondaires qui à leur tour interagissent. Un neutron lent ainsi produit peut interagir avec un noyau d'azote :



Le  $^{14}\text{C}$  est radioactif avec une période de 5730 ans, par désintégration  $\beta^-$  :



A un instant donné, l'atmosphère contient une proportion  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  qui est à peu près constante, si l'on suppose que le flux de rayons cosmiques est constant, et donc également la production de  $^{14}\text{C}$ . Les deux formes  $^{14}\text{C}$  et  $^{12}\text{C}$  peuvent former des molécules de dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$ . Les organismes vivants, par exemple les plantes, consomment du  $\text{CO}_2$  et donc contiennent les deux isotopes en proportion constante. A la mort de l'organisme, l'absorption de  $\text{CO}_2$  s'arrête, le  $^{14}\text{C}$  radioactif continue de se désintégrer, tandis que la quantité de  $^{12}\text{C}$  reste stable. La concentration relative des deux isotopes change au cours du temps.

Donc en comparant l'activité du  $^{14}\text{C}$  dans un fossile à celle de l'organisme vivant correspondant, on peut estimer l'âge du fossile. Cette méthode de datation au  $^{14}\text{C}$  a été proposée par W. Libby en 1947 (prix Nobel de chimie 1960).

### Exemple

Résidu osseux d'activité  $^{14}\text{C} = 90$  Bq. Suppose qu'elle était initialement de 300 Bq.

$$A(t) = A(0)e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A(0)}{A(t)}$$

soit numériquement

$$t = \frac{5730}{0,693} \ln \frac{300}{90} \approx 9970 \text{ans}$$

La méthode permet de remonter jusqu'à 30000 ans environ. On peut aujourd'hui utiliser la spectrométrie de masse pour mesurer directement la concentration et le rapport  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ .

### Influence de la variation de production du $^{14}\text{C}$

L'hypothèse que la production de  $^{14}\text{C}$  est constante sur de longues périodes est très approximative. Les variations de concentration sont estimées directement grâce à la "dendro-chronologie" jusqu'à 5000 ans. Il s'agit de comparer les concentrations de  $^{14}\text{C}$  dans les anneaux annuels résiduels d'arbres qui peuvent vivre très vieux, tels "pinus aristata" en Californie.

Pour des périodes plus anciennes, on peut reconstituer la variation du champ magnétique terrestre. Lorsque l'intensité du champ baisse, l'intensité du rayonnement cosmique (qui est moins dévié) augmente et donc également le nombre de neutrons produits, d'où une production plus importante de  $^{14}\text{C}$ . La prise en compte de ces effets peut amener une correction dépassant 10%.

Dans l'avenir, l'utilisation de cette méthode de datation sera compliquée par les activités humaines actuelles : combustion intensive de carbone fossile (sans  $^{14}\text{C}$ ), essais nucléaires dans l'atmosphère des années 50 et 60, qui ont modifié la proportion de  $^{14}\text{C}$  dans l'atmosphère.

## 5.2 Datation de roches et de météorites

Pour établir l'âge des roches les plus anciennes sur Terre ou dans le système solaire (météorites), il faut utiliser des radionucléides de périodes beaucoup plus longue, comme le  $^{40}\text{K}$ , le  $^{87}\text{Rb}$  ou  $^{238}\text{U}$ . La méthode consiste à utiliser des couples de noyaux père-fils dont le fils est stable.

### Exemple

Lors de la formation des roches, par exemple à partir du magma d'une éruption volcanique, il arrive que du  $^{87}\text{Rb}$  soit présent. Cet isotope se désintègre avec une période de  $T_{Rb} = 4,8 \times 10^{10}$  années en  $^{87}\text{Sr}$  (stable). Sont également présents du  $^{87}\text{Sr}$  et  $^{86}\text{Sr}$ , tous deux stables. Du point de vue de la chimie, le  $^{87}\text{Sr}$  et  $^{86}\text{Sr}$  se comportent de la même manière, et le rapport initial  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  resterait stable pour un système clos, c'est à dire un système dans lequel on n'apporterait aucun de ces deux isotopes de l'extérieur. Pour un ensemble de roches formées à partir du même magma, il peut y avoir des différences dans la concentration de  $^{86}\text{Sr}$ , mais pas dans le rapport  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  qui reste le même.

Au cours du temps, on a une diminution du nombre d'atomes de  $^{87}\text{Rb}$  puisqu'ils se désintègrent en  $^{87}\text{Sr}$ , et par conséquent une augmentation du même nombre d'atomes de  $^{87}\text{Sr}$ , de sorte que si l'on compare le nombre d'atomes au temps  $t_0$  et celui au temps  $t_1$  :

$$n(^{87}\text{Sr})(t_0) + n(^{87}\text{Rb})(t_0) = n(^{87}\text{Sr})(t_1) + n(^{87}\text{Rb})(t_1)$$

où l'on note  $n(X)(t)$  le nombre d'atomes de l'espèce  $X$  au temps  $t$ .

Puisque  $n(^{87}\text{Rb})(t_1) = n(^{87}\text{Rb})(t_0)e^{-\lambda(t_1-t_0)}$  avec  $\lambda = \ln(2)/T_{Rb}$ ,

$$n(^{87}\text{Sr})(t_1) = n(^{87}\text{Rb})(t_1) \left( e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1 \right) + n(^{87}\text{Sr})(t_0)$$

Bien sûr, si on peut mesurer une concentration de  $^{87}\text{Sr}$  et de  $^{87}\text{Rb}$  dans un échantillon aujourd'hui (c'est à dire au temps  $t_1$ ) on ne connaît par le nombre d'atomes initial. Si on a deux échantillons, les nombres peuvent varier et rendre les mesures difficiles, d'autant plus qu'on ne connaît pas le nombre de  $^{87}\text{Sr}$  initial.

Mais si l'on divise toute l'équation par  $n(^{86}\text{Sr})$ , qui est, comme nous l'avons vu, un nombre constant au cours du temps si le système est clos, on obtient des rapports. Nous avons également noté ci-dessus que le rapport  $n(^{87}\text{Sr})(t_0)/n(^{86}\text{Sr})$  initial était le même pour toutes les roches ayant la même origine. En réalisant des mesures sur plusieurs échantillons, on obtient donc une droite dans le plan  $n(^{87}\text{Sr})/n(^{86}\text{Sr})$  versus  $n(^{87}\text{Rb})/n(^{86}\text{Sr})$ , où toutes les valeurs correspondent au temps  $t_1$ , c'est à dire aujourd'hui.

La pente de cette droite est  $p = (e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1)$ . On peut donc en déduire l'époque de formation des roches, ou si l'on veut leur âge :

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln(p + 1)$$

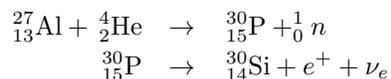
### Age de la Terre et du système solaire

Les âges des plus anciennes roches sont plutôt mesurées à l'aide d'isotopes d'U, de Th et/ou de Pb, qui permettent de mesurer également l'âge des plus anciennes météorites, contemporaines de la formation du système solaire. Ces mesures donnent un âge du système solaire  $t_1 - t_0 \approx 4,5 \times 10^9$  années.

## 6 Radioactivité artificielle

La radioactivité artificielle a été découverte par Frédéric et Irène Joliot-Curie en 1934 (ils auront ensemble un prix Nobel en 1935). Ils bombardaient une cible d'Al avec des particules  $\alpha$  provenant d'une source de  $^{210}\text{Po}$  (5,3 MeV). Ils remarquèrent que la cible émettait des positrons dont l'intensité diminuait de moitié en 3 mn 15 s : le faisceau de particules  $\alpha$  avait activé la cible.

Leur interprétation de l'émission différée de positrons était qu'un radionucléide était formé par capture des particules  $\alpha$  et émission d'un neutron :



Ils confirmèrent peu de temps après la découverte du "radiophosphore" en dissolvant l'Al irradié dans l'acide chlorhydrique et en entraînant le produit volatil formé dans un courant de  $\text{PH}_3$ , ils séparèrent le  ${}_{15}^{30}\text{P}$  de l'aluminium.

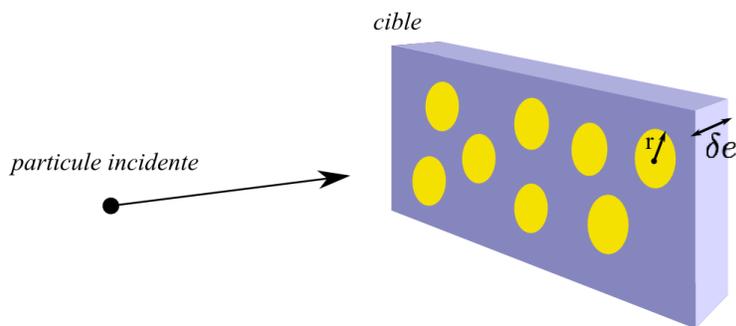
Les radioéléments qui n'existent plus dans la nature ( $T \ll$  âge de la Terre) sont obtenus à partir d'isotopes stables par réaction nucléaire : il y a eu **activation**.

## 6.1 Notion de section efficace

Que ce soit pour produire des éléments radioactifs ou pour étudier l'interaction entre les particules et la matière, la notion de section efficace est importante car elle traduit la probabilité d'interaction entre les particules ou noyaux d'un faisceau et la matière qui compose une cible.

### Définition

Modèle des sphères dures : Probabilité de collision :



$$\delta P_{int} = \frac{\text{surface des sphères projetée}}{\text{surface totale}} = \delta N \frac{\pi r^2}{S} = n \cdot \delta e \cdot \pi r^2 \quad (4.12)$$

avec  $\delta N$  le nombre de boules vues pour une surface  $S$ .  $n$  est la densité volumique de sphères et  $\delta e$  l'épaisseur de la cible.  $n \cdot \delta e$  est la densité surfacique de sites.

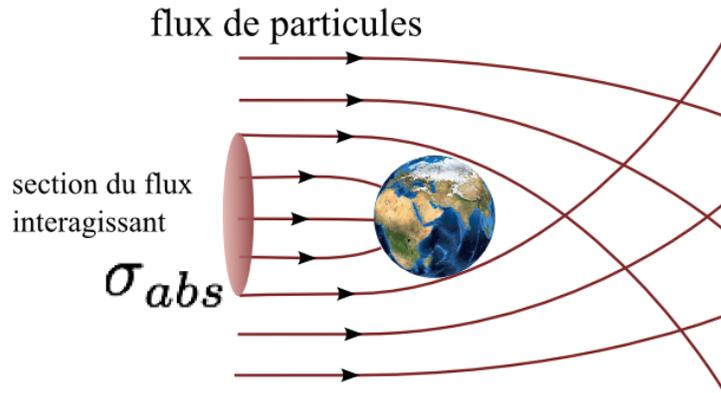
$\sigma = \pi r^2$  est la section efficace géométrique.

Exemple de la section efficace "gravitationnelle", pour montrer le rôle du champ de force :

Si  $N$  particules incidentes et  $dN$  interactions pour une cible d'épaisseur  $dx$ , définition de  $\sigma$  :

$$dN = -N n \sigma dx \quad (4.13)$$

$\sigma$  mesurée en  $\text{cm}^2$  ou en "barn"



$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$$

sous multiples : millibarn = mb, microbarn =  $\mu\text{b}$ , etc...

Exemples :

proton +	air	H <sub>2</sub> liq	béton	Fe	W	Pb
$\lambda/\text{cm}$	68600	717	40	17	10	17
$\sigma/\text{mb}$	265	33	390	700	1650	1770

- La section efficace ne dépend que du projectile et de la cible élémentaire.
- $\sigma \sim 100 \text{ mb} \rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \sim 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$  : taille typique des nucléons.
- Explique que  $\sigma(p + \text{noyau}) \propto A^{2/3}$  car rayon du noyau  $\propto A^{1/3}$ .

### Section efficace différentielle

La section efficace (probabilité d'interaction) dépend des paramètres géométriques : Flux  $\Phi = \frac{d^2N}{dt ds}$  de particules uniforme dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Nombre de particules diffusées par unité de temps et par unité d'angle solide dans la direction  $(\theta, \theta + d\theta)$  :

$$\frac{d^2N}{dt d\Omega} = \frac{d^2N}{dt d\sigma_{el}} \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \Phi \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \quad (4.14)$$

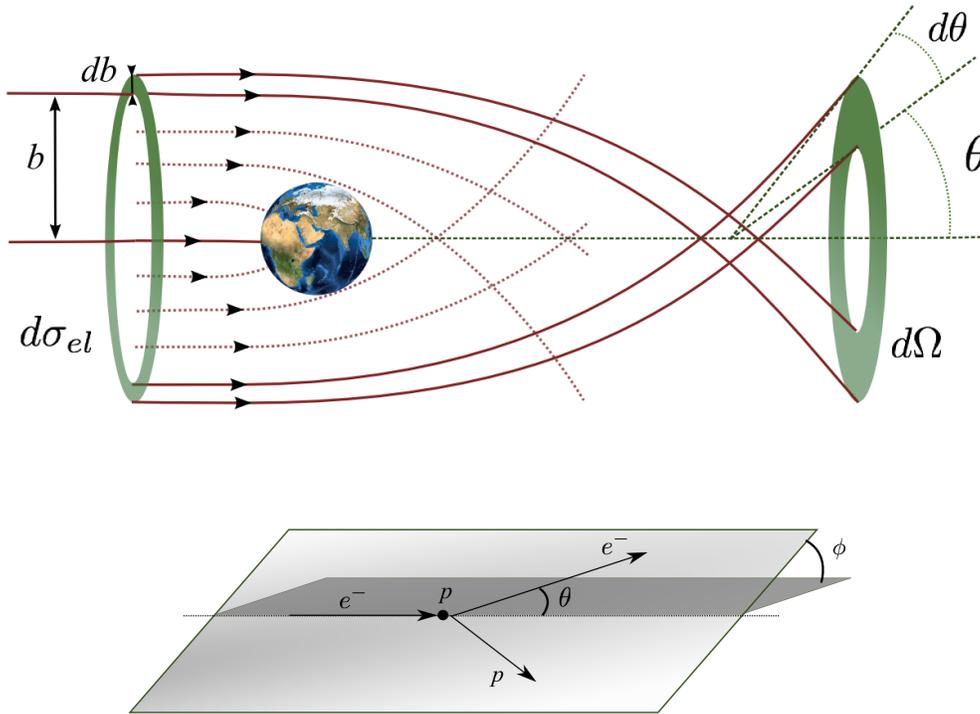
On peut aussi écrire dans le cas de la figure ci-dessus  $\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin \theta d\theta}$ . Information expérimentale la plus complète

Exemple :  $e^- p \rightarrow e^- p$

$e^-$  incident et  $(e^-, p)$  finals coplanaires.

Conservation énergie-impulsion : 6 inconnues  $(\mathbf{p}', \mathbf{p}_p)$  - 4 lois de conservation = 2 variables arbitraires.

- $\phi$  = angle autour de  $\mathbf{p}$



–  $\theta$  (par exemple)

Mesure du nombre d'électrons à  $\theta$  fixé  $\rightarrow$

$$dN = N_0 n dx \cdot d\Omega \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (4.15)$$

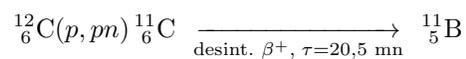
**Attention** :  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  n'est pas la dérivée d'une fonction  $\sigma(\Omega)$  (qu'on pourrait définir, mais...non!). Juste une notation.

On a :

$$\int \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega = \sigma_{tot} \quad (4.16)$$

## 6.2 Production de noyaux radioactifs

Pour produire des noyaux radioactifs, on envoie un faisceau de particules (protons, neutrons, particules  $\alpha$ ,...) sur une cible contenant des noyaux le plus souvent stables. Soit par exemple la réaction :



On forme le  ${}^{11}_6\text{C}$  en bombardant une cible de  ${}^{12}_6\text{C}$  par des protons. Pour calculer le nombre d'atomes formés dans l'intervalle de temps  $dt$ , nous avons besoin de

- $\phi$  l'intensité du faisceau en nombre de particules par seconde
- $N$  la densité volumique de noyaux de  ${}^{12}_6\text{C}$  (le nombre de noyaux par unité de volume de la cible)

- $e$  l'épaisseur de la cible
- $\sigma$  la section efficace de la réaction

Le nombre de noyaux de  $^{11}_6\text{C}$  formés pendant l'intervalle de temps  $dt$  est

$$dn = \sigma \cdot \phi \cdot N \cdot e \cdot dt$$

mais ces noyaux peuvent, même pendant l'irradiation, se désintégrer avec une constante radioactive  $\lambda$ , l'équation différentielle qui régit la variation du nombre  $n$  de noyaux est :

$$dn = \underbrace{\sigma\phi N e dt}_{\text{formation}} - \underbrace{\lambda N dt}_{\text{désintégration}}$$

Ce qui donne :

$$\frac{dn}{dt} + \lambda n = \sigma\phi N e \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\sigma\phi N e}{\lambda} + K e^{-\lambda t}$$

la constante étant déterminée par les conditions initiales (à  $t = 0$ ,  $n = 0 \Rightarrow K = -\frac{\sigma\phi N e}{\lambda}$ ) :

$$n = \frac{\sigma\phi N e}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.17)$$

Calcul analogue à celui d'une filiation à deux corps, où la première désintégration est remplacée par une réaction nucléaire.

On voit déjà qu'il n'y a aucun intérêt à irradier la cible pendant plus de 4 à 5 fois la période du noyau à produire puisqu'on a alors atteint à quelques % près la valeur de saturation.

Si l'on procède à une activation durant un temps  $\theta$ , le nombre de noyaux présents à l'instant  $t > \theta$  est

$$n(t > \theta) = \frac{\sigma\phi N e}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) e^{-\lambda(t-\theta)}$$

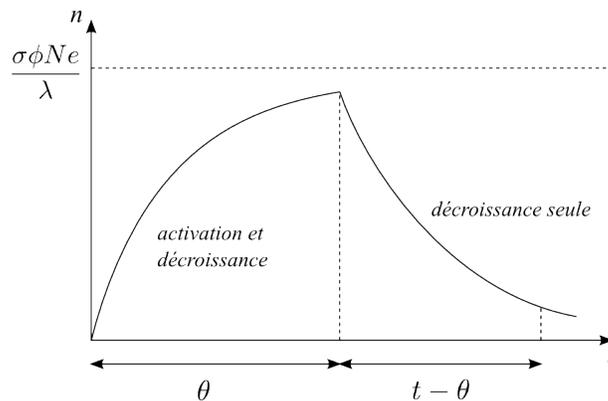


FIGURE 4.5

La fabrication de radioéléments a de nombreuses applications

- médicales
- marquage de molécules en chimie ou biologie

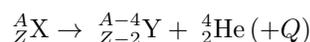
- mesure de flux (neutronique, accélérateurs)
- mesure de sections efficaces
- ...



## Radioactivité : approche théorique

### 1 Radioactivité $\alpha$

Dans une désintégration  $\alpha$



l'énergie des particules  $\alpha$  varie faiblement, de 4 à 9 MeV, alors que les périodes varient considérablement, de  $10^{-7}$  s à  $10^{10}$  années.

Exemples :

${}^{238}_{92} \text{U} \rightarrow {}^{234}_{90} \text{Th} + {}^4_2 \text{He}$  donne une énergie  $E_\alpha = 4,27$  MeV et une période  $T = 4,5 \times 10^9$  années.

${}^{212}_{84} \text{Po} \rightarrow {}^{208}_{82} \text{Pb} + {}^4_2 \text{He}$  donne une énergie  $E_\alpha = 8,78$  MeV et une période  $T = 3 \times 10^{-7}$  s.

Etude de la radioactivité  $\rightarrow$  loi de Geiger et Nuttall (1911) empirique. Si  $R$  est le parcours de la particule  $\alpha$  dans un gaz à pression et température définie, on a :

$$\log(T) = A - B \log(R) \quad (5.1)$$

Par ailleurs, parcours  $R$  *dans l'air* lié à  $E_\alpha$  (notée  $T_\alpha$ ) de la particule  $\alpha$  par  $R = 0,325 \times T_\alpha$ , avec  $T_\alpha$  en MeV et  $R$  en cm), et ceci pour  $T_\alpha \in [3; 8]$  MeV. Ceci donne :

$$\log(T) = C - D \log(T_\alpha) \quad (5.2)$$

Le fait que les énergies des  $\alpha$  soient du même ordre de grandeur alors que les périodes diffèrent de 23 ordres de grandeur demande une explication. Elle est donnée par l'effet tunnel.

#### 1.1 Approximation semi-classique WKB

WKB = Wentzel, Kramers et Brillouin

Méthode pour trouver des solutions approchées aux équations différentielles linéaires dont les coefficients ont une variation spatiale. Lorsque la méthode est appliquée aux systèmes quantiques, on réalise un développement de la solution en puissances de  $\hbar$ .

Dans notre cas, on part de l'équation de Schrödinger à une dimension notée  $x$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi$$

Considère successivement deux cas :

**cas  $E > V(x)$**

Cherche à priori une solution de la forme :  $\psi(x) = U(x)e^{i\phi(x)}$ . Dérivons deux fois cette fonction :

$$\psi' = (U' + i\phi'U)e^{i\phi} \quad (5.3)$$

$$\psi'' = [U'' + i(\phi'U' + \phi''U) + i\phi'(U' + i\phi'U)]e^{i\phi} \quad (5.4)$$

$$= [U'' - U\phi'^2 + i(2\phi'U' + \phi''U)]e^{i\phi} \quad (5.5)$$

L'équation de Schrödinger devient alors

$$U'' - U\phi'^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)U + i(2\phi'U' + \phi''U) = 0 \quad (5.6)$$

L'approximation WKB consiste à négliger le terme en  $U''$ , c'est à dire à considérer que  $U(x)$  varie lentement avec  $x$ . Dans ce cas, en séparant l'équation en partie réelle et partie imaginaire, on obtient pour la partie réelle :

$$\phi'(x) = \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar} = \frac{p(x)}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.7)$$

et pour la partie imaginaire

$$2\phi'U' + \phi''U = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U'}{U} = -\frac{1}{2}\frac{\phi''}{\phi'} \quad \Rightarrow \quad U = Cte \times (\phi')^{-1/2} \quad (5.8)$$

ce qui donne, en reportant la solution pour  $\phi'$  :

$$U = Cte \times (E - V)^{-1/4} \quad (5.9)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar} \int_0^x p(x')dx' \quad (5.10)$$

et finalement la fonction d'onde approchée

$$\psi(x) = Cte \times (E - V)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^x p(x')dx'\right) \quad (5.11)$$

**cas  $E < V(x)$**

Les solutions cherchées sont de la forme  $\psi(x) = U(x)e^{-\phi(x)}$ . Avec la même démarche, en négligeant  $U''$  et en imposant la condition  $2\phi'U' + \phi''U = 0$ , on obtient :

$$\psi(x) = Cte \times (V - E)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^x \sqrt{2m(V(x') - E)}dx'\right) \quad (5.12)$$

### Transparence d'une barrière de potentiel

La transparence d'une barrière de potentiel est définie comme

$$\mathcal{T} = \left| \frac{\psi(x_2)}{\psi(x_1)} \right|^2$$

où  $x_1$  et  $x_2$  désignent les points tels que  $V(x_1) = V(x_2) = E$ .

D'après les expressions précédentes, en prenant l'origine en  $x_1$  par exemple :

$$\mathcal{T} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x') - E)} dx'\right) \quad (5.13)$$

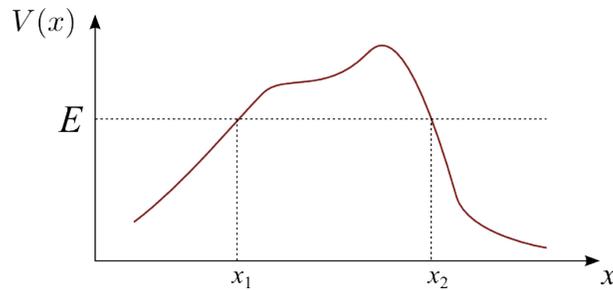


FIGURE 5.1: Calcul de la transparence d'une barrière de potentiel  $V(x)$  pour une particule d'énergie  $E$ .

### 1.2 Autre méthode de calcul

Soit une barrière de potentiel rectangulaire, de largeur  $a$ , de hauteur  $V_0$  ; dans le cas où  $E < V_0$ , le coefficient de transmission est (exercice de mécanique quantique...) :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0}{E} \frac{1 - \frac{E}{V_0}}{1 - \frac{E}{V_0}} \text{sh}^2(k'a)} \quad (5.14)$$

avec  $k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$ . Dans le cas d'une barrière épaisse, c'est à dire lorsque la "longueur d'onde"  $\lambda = 1/k'$  de la fonction d'onde est beaucoup plus petite que la largeur  $a$  de la barrière (ou encore  $k'a \gg 1$ ), le sinus hyperbolique se simplifie :

$$\text{sh}(k'a) = \frac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{2} \approx \frac{e^{k'a}}{2}$$

et  $T$  est approximé par :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0}{E} \frac{1 - \frac{E}{V_0}}{1 - \frac{E}{V_0}} \frac{e^{2k'a}}{4}} \approx 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2k'a} \quad (5.15)$$

La parabole  $16x(1-x)$  varie entre 0 et 4 lorsque  $x$  varie de 0 à 1. Le maximum de 4 est atteint pour  $x = 1/2$ . On peut donc écrire à l'ordre de grandeur :

$$T \approx e^{-2k'a}$$

Une barrière de forme quelconque peut être approximée par une succession de barrières élémentaires d'épaisseur  $\Delta x$  de hauteur  $V(x)$ . Calculons la probabilité qu'a une particule de franchir la barrière.

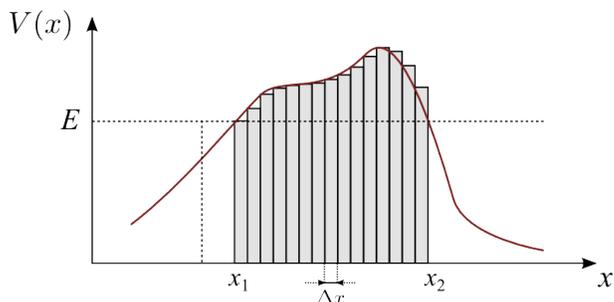


FIGURE 5.2: Calcul de la transparence d'une barrière de potentiel  $V(x)$  pour une particule d'énergie  $E$ .

Soit  $\mathcal{P}(x)$  la probabilité de trouver la particule en  $x$ . La probabilité de franchir la barrière de  $x$  à  $x + \Delta x$  est

$$\mathcal{P}(x + \Delta x) = \mathcal{P}(x)e^{-2k'\Delta x}$$

Si on fait tendre  $\Delta x$  vers une valeur infinitésimale  $dx$ , cette expression se développe au premier ordre

$$\mathcal{P}(x + dx) = \mathcal{P}(x)(1 - 2k'dx)$$

donc

$$d\mathcal{P} = \mathcal{P}(x + dx) - \mathcal{P}(x) = -2k'\mathcal{P}(x)dx$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{\mathcal{P}(x)} = -2k' \Rightarrow \mathcal{P}(x) = Cte \times \exp\left(\int_0^x -2k'dx\right)$$

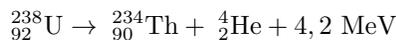
et puisque le coefficient de transmission total est par définition  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(x_2)/\mathcal{P}(x_1)$ , on obtient le même résultat que dans l'approximation WKB ci-dessus :

$$\mathcal{T} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x) - E)}dx\right)$$

### 1.3 Théorie de Gamow de la radioactivité $\alpha$

Pour expliquer la loi de Geiger-Nuttal, Gamow et indépendamment Condon et Gurney ont développé, en 1929, la théorie quantique de l'effet tunnel d'une particule  $\alpha$  à travers une barrière de potentiel coulombien.

Considérons la désintégration



Supposons que la particule  $\alpha$  existe à l'intérieur du noyau. Elle est liée au noyau par l'interaction forte de courte portée; le potentiel peut être schématiquement représenté par la figure 5.3

et par

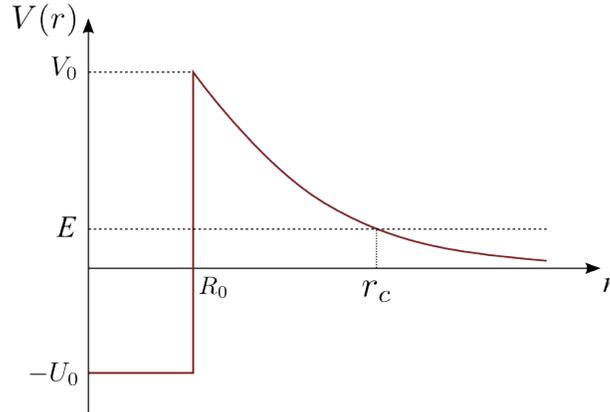


FIGURE 5.3

$$\begin{array}{lll} r < R_0, & V = -U_0 & \text{région d'interaction forte} \\ r > R_0, & V = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{région d'interaction coulombienne} \end{array}$$

où  $Z$  est le numéro atomique du noyau fils. Pour l'Uranium, on obtient les valeurs numériques suivantes :

$$R_0 = 1,1 \left[ (234)^{1/3} + 4^{1/3} \right] = 8,5 \text{ fm}$$

$$V_0 = \frac{2Z}{R_0} \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 30,5 \text{ MeV}$$

$$r_c = \frac{2Z}{E} \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 61,7 \text{ fm}$$

où l'on a utilisé le fait que la constante de structure fine s'écrit  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137$  et donc  $e^2/(4\pi\epsilon_0) = (197 \text{ MeV}\cdot\text{fm})/137 = 1,44 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$ .

On voit que  $E \ll V_0$ .

Une particule  $\alpha$  de masse  $m$ , de vitesse  $v_\alpha$ , à l'intérieur du noyau de rayon  $R_0$  se heurte en moyenne  $v_\alpha/(2R_0)$  fois par seconde à la barrière de potentiel.  $v_\alpha$  peut être estimée en supposant une vitesse non relativiste (ce qui est vrai si l'on compare  $E_\alpha = 4,2 \text{ MeV}$  à l'énergie de masse de la particule  $\alpha$  qui est d'environ  $4 \text{ GeV}$ ).

$$E_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m_\alpha c^2}}c$$

Ce qui donne le taux de collision avec la barrière :

$$\frac{v_\alpha}{2R_0} \approx 3 \times 10^{21} \frac{\sqrt{E_\alpha}}{A^{1/3}} \approx 10^{21} \text{ collisions par seconde}$$

La probabilité de désintégration du noyau,  $\lambda$  est donc le produit du nombre de collisions par seconde et de la probabilité qu'une collision permette à la particule de traverser la barrière. Cette dernière est simplement le coefficient de transmission  $\mathcal{T}$  calculé précédemment. Donc :

$$\lambda = \frac{v_\alpha}{2R_0} e^{-G} \quad (5.16)$$

où  $G = \frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{r_c} \sqrt{2m(V(r) - E)} dr$  est le “facteur de Gamow”.

### Calcul du facteur de Gamow $G$

Le calcul complet du facteur de Gamow se fera en TD. On part de

$$G = 2\sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2}} \int_{R_0}^{r_c} \sqrt{\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_\alpha} dr = 2\sqrt{\frac{2m_\alpha E_\alpha}{\hbar^2}} \int_{R_0}^{r_c} \left(\frac{r_c}{r} - 1\right)^{1/2} dr$$

en posant  $r = r_c \cos \theta$  et  $\theta_c = \text{Arccos} \sqrt{\frac{R_0}{r_c}}$ , et en se mettant dans l’approximation de faible énergie  $r_c \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$G \approx \frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \left[ \frac{\pi}{2} r_c \sqrt{E_\alpha} - \sqrt{R_0 r_c E_\alpha} \right] \quad (5.17)$$

le terme  $r_c \sqrt{E_\alpha}$  est proportionnel à  $Z/\sqrt{E_\alpha}$  et  $\sqrt{R_0 r_c E_\alpha} \propto \sqrt{R_0 Z}$ . Donc

$$G \approx K_1 \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} - K_2 \sqrt{R_0 Z} \quad (5.18)$$

Pour  $Z$  variant de 82 à 92,  $\sqrt{Z}$  varie de 8%, donc est à peu près constant et  $G \approx K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K'_1$ . Le lien entre période  $T$  et énergie  $E_\alpha$  de la particule  $\alpha$  s’établit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 e^{-G} \\ \log_{10} \lambda &= \log_{10} \lambda_0 - \frac{G}{\ln(10)} \\ \log_{10} T &= \log_{10} \frac{\ln(2)}{\lambda} = \log_{10}(\ln(2)) - \log_{10}(\lambda_0) + \frac{G}{\ln(10)} \end{aligned}$$

d’où :

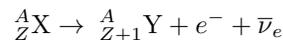
$$\log_{10} T \approx C_1 \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} + C_2 \quad (5.19)$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  des constantes. L’accord entre le modèle et l’expérience est remarquable pour la très grande majorité des noyaux, compte tenu de la simplicité du modèle. Le désaccord le plus important se produit pour le  ${}^{210}_{84}\text{Po}$ , ceci est probablement dû à la couche fermée  $N = 126$  (magique) de cet isotope, qui est plus stable que prévu par le modèle de la goutte liquide.

## 2 Théorie de Fermi de la radioactivité $\beta$

Théorie proposée par Fermi en 1934. Ne prend pas en compte la violation de la parité (découverte en 1957) mais décrit correctement les spectres de désintégration  $\beta^+$  et  $\beta^-$  et donne les ordres de grandeur corrects des périodes.

Rappelons ce qu’est une désintégration  $\beta^-$  :



un neutron se transforme en proton avec émission de  $e^-$  et  $\bar{\nu}_e$ , soit  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ .

Soit  $\psi_i$  l'état initial du système,  $\psi_i = \psi_n(\vec{r}_n)$

Soit  $\psi_f$  l'état final du système,  $\psi_f = \psi_p(\vec{r}_p)\psi_e(\vec{r}_e)\psi_\nu(\vec{r}_\nu)$

la proba de transition par unité de temps est donnée par la règle d'or de Fermi :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}| \rho(E_f)$$

où  $V_{fi}$  est l'élément de matrice du Hamiltonien perturbateur et  $\rho(E_f)$  la densité d'états finals.

## 2.1 Élément de matrice

Fermi a fait l'hypothèse que l'interaction responsable de la désintégration  $\beta$  est ponctuelle. On verra que ça a été justifié par la suite, l'interaction en question étant à très courte portée (son médiateur, le boson  $W^\pm$  a une masse de l'ordre de 80 GeV). Il en résulte que le hamiltonien de perturbation peut être approximé par une constante, nommée  $G_F$ , appelée constante de Fermi et mesurant l'intensité de la réaction, de sorte que

$$V_{fi} = \int \psi_p^*(\vec{r}_p)\psi_e^*(\vec{r}_e)\psi_\nu^*(\vec{r}_\nu) H \psi_n(\vec{r}_n) d\vec{r}_n d\vec{r}_p d\vec{r}_e d\vec{r}_\nu$$

peut s'écrire sous la forme

$$V_{fi} = G_F \int \psi_p^*(\vec{r})\psi_e^*(\vec{r})\psi_\nu^*(\vec{r})\psi_n(\vec{r}) d\vec{r}$$

L'électron et le neutrino se propageant à l'extérieur du noyau, nous pouvons prendre pour eux des ondes planes normalisées à un volume  $V$  arbitraire :

$$\psi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \quad \psi_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}}$$

avec  $\vec{k}_i = \vec{p}_i/\hbar$ .

On a alors

$$V_{fi} = \frac{G_F}{V} \int \psi_p^*(\vec{r})\psi_n(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}_e + \vec{k}_\nu) \cdot \vec{r}} d\vec{r}$$

Si l'on remarque que l'énergie mise en jeu dans une désintégration  $\beta$  est de l'ordre du MeV, de sorte que  $|\vec{k}_e|$  et  $|\vec{k}_\nu|$  sont de l'ordre de  $1 \text{ MeV}/(\hbar c) \approx 10^{-3} \text{ fm}^{-1}$ , on a  $(\vec{k}_e + \vec{k}_\nu) \cdot \vec{r} \ll 1$ . On peut donc développer l'exponentielle :

$$V_{fi} = \frac{G_F}{V} \int \psi_p^*(\vec{r})\psi_n(\vec{r}) d\vec{r} - i \frac{G_F}{V} (\vec{k}_e + \vec{k}_\nu) \int \psi_p^*(\vec{r})\psi_n(\vec{r}) d\vec{r} + \dots$$

et on ne gardera que le premier terme non nul.

Une désintégration est dite permise si le premier terme est non nul, elle est dite première interdite si le premier terme est nul mais pas le second, etc...

La diversité des périodes est en grande partie expliquée par le degré "d'interdiction" de la transition. La discussion portera maintenant en grande partie sur les transitions de Fermi permises, celles pour lesquelles le premier terme est non nul. Dans ce cas :

$$V_{fi} = \frac{G_F}{V} M_{fi}$$

où  $M_{fi} = \int \psi_p^*(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) d\vec{r}$  est à peu-près égal à 1. En effet le nucléon a à peu près la même fonction d'onde dans l'état initial et dans l'état final et on considère ces fonction d'onde comme normalisées, donc  $M_{fi} \approx 1$ .

## 2.2 Spectre d'une transition permise

Dans une transition permise, on constate que l'élément de matrice de transition est indépendant des impulsions des particules émises. C'est donc l'élément d'espace de phase  $\rho(E_f)$  qui gouverne la forme du spectre.

Expérimentalement, lorsqu'on étudie un échantillon radioactif, on utilise un détecteur d'électrons, fixe dans l'espace, qui délimite un angle solide  $\Delta\Omega_e$  et qui identifie pendant le durée  $\Delta t$  de la mesure, les électrons dont l'énergie cinétique est comprise entre  $T_e$  et  $T_e + \Delta T_e$ , ou une impulsion comprise entre  $p_e$  et  $p_e + \Delta p_e$ . En passant aux différentielles :

$$n_e = \frac{d^3 N}{dt d\Omega_e dT_e}$$

On en déduit la probabilité de transition par unité de temps, d'angle solide et d'énergie :  $\frac{d^2 \lambda}{d\Omega_e dT_e}$ , où  $\lambda$  est la probabilité de transition par unité de temps (intégrée sur les énergies possibles et l'angle solide. Ceci est un résultat expérimental qui doit être comparé à l'expression théorique :

$$\frac{d^2 \lambda}{d\Omega_e dT_e} = \frac{2\pi G_F^2}{\hbar V^2} |M_{fi}| \frac{d^2 \rho(E_f)}{d\Omega_e dT_e}$$

Comme vu précédemment,  $\rho(E_f)$  est la densité d'états finals autour de l'énergie  $E_f$ , c'est à dire  $\rho(E_f) = dn/dE_f$ , avec  $n$  le nombre d'états dans l'intervalle  $[E_f; E_f + dE_f]$ . On peut donc écrire :

$$\frac{d^2 \rho(E_f)}{d\Omega_e dT_e} = \frac{d^3 n}{dE_f d\Omega_e dT_e} \quad (5.20)$$

où  $d^3 n$  peut être interprété comme le nombre d'états finals dans l'intervalle d'énergie  $dE_f$ , dans l'intervalle d'angle solide  $d\Omega_e$  et dans l'intervalle d'énergie  $dT_e$ .

Calculons ces quantités. Le nombres d'électrons d'état de spin donné que l'on peut disposer dans une boîte de volume  $V$  avec une quantité de mouvement comprise entre  $p_e$  et  $p_e + dp_e$ , dirigée vers l'angle solide compris entre  $\Omega_e$  et  $\Omega_e + d\Omega_e$  est :

$$d^2 n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} (p_e^2 dp_e d\Omega_e V)$$

De même pour les neutrinos. Si l'on tient compte de ceux-ci également, le nombre d'états possibles dans une désintégration où l'électron pointe dans l'intervalle d'angle solide  $[\Omega_e; \Omega_e + d\Omega_e]$ , a une impulsion dans l'intervalle  $[p_e; p_e + dp_e]$  et le neutrino pointe vers  $[\Omega_\nu; \Omega_\nu + d\Omega_\nu]$  et a une impulsion dans l'intervalle  $[p_\nu; p_\nu + dp_\nu]$  est

$$d^4 n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} (p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_e d\Omega_\nu V^2)$$

Exprimons les quantités intéressantes en fonction de  $E_e$  l'énergie de l'électron. En tenant compte de  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ , on a

$$E \cdot dE = c^2 p \cdot dp \quad (5.21)$$

et donc

$$\begin{cases} p_e^2 dp_e &= \frac{1}{c^3} E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} dE_e \\ p_\nu^2 dp_\nu &= \frac{1}{c^3} E_\nu \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} dE_\nu \end{cases}$$

La probabilité de transition s'écrit en fonction de l'énergie cinétique de l'électron. On remarque que, puisque  $E = mc^2 + T$ , on a  $dE = dT$  et donc

$$\frac{d^4 n}{d\Omega_e d\Omega_\nu dE_e dE_\nu} = V^2 \frac{E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} E_\nu \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4}}{(2\pi\hbar)^6 c^6} \quad (5.22)$$

L'énergie de recul dans la désintégration  $\beta$  étant négligeable, l'énergie disponible dans l'état final est  $E_f \approx E_\nu + E_e$ . On rappelle qu'on veut exprimer la densité d'états finals (equation 5.20). Si l'on enregistre les électrons d'énergie  $E_e$  fixée (à  $dE_e$  près), alors  $dE_e = dE_f$  et on peut écrire

$$\frac{d^4 n}{d\Omega_e d\Omega_\nu dE_e dE_\nu} = \frac{d}{d\Omega_\nu} \left( \frac{d^3 n}{d\Omega_e dT_e dE_f} \right)$$

Si l'on admet qu'il n'y a pas de corrélations angulaires entre l'électron et le neutrino, on peut intégrer sur l'angle solide, ce qui donne un facteur  $4\pi$  :

$$\frac{d^2 \rho(E_f)}{d\Omega_e dT_e} = \frac{d^3 n}{d\Omega_e dT_e dE_f} = 4\pi V^2 \frac{E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} (E_f - E_e) \sqrt{(E_f - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4}}{(2\pi\hbar)^6 c^6}$$

Sachant que  $\frac{E_e}{c^2} dE_e = p_e dp_e$ , on peut aussi écrire

$$\frac{d^2 \rho(E_f)}{d\Omega_e dp_e} = 4\pi V^2 \frac{p_e^2 (E_f - E_e) \sqrt{(E_f - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4}}{(2\pi\hbar)^6 c^3}$$

et donc

$$\frac{d^2 \lambda}{d\Omega_e dp_e} = \frac{G_F^2 |M_{fi}|^2}{8\pi^4 \hbar^7 c^3} p_e^2 (E_f - E_e)^2 \sqrt{1 - \frac{m_\nu^2 c^4}{(E_f - E_e)^2}} \quad (5.23)$$

Jusqu'ici, nous avons utilisé pour l'électron une onde plane, qui donne la même forme du spectre pour les désintégrations  $\beta^-$  et  $\beta^+$ . En fait, la charge positive du noyau attire l'électron et repousse le positron, ce qui entraîne une différence entre les spectres  $\beta^+$  et  $\beta^-$ . Cet effet coulombien est pris en compte dans un facteur de correction  $F(Z, p_e)$  (appelé "fonction de Fermi") où  $Z$  est le nombre de protons du noyau fils, c'est à dire qu'on aura  $F(0, p_e) = 1$  (voir courbe).

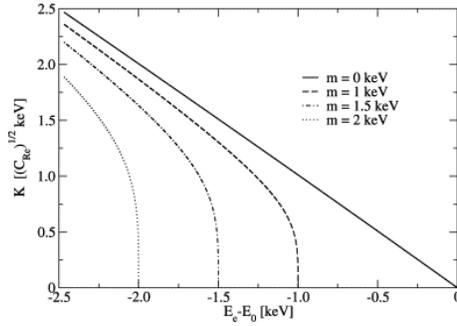
Finalement, en intégrant sur l'angle solide de l'électron, on obtient de nouveau un facteur  $4\pi$  :

$$\frac{d\lambda}{dp_e} = \frac{G_F^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} F(Z, p_e) p_e^2 (E - E_e)^2 \sqrt{1 - \frac{m_\nu^2 c^4}{(E - E_e)^2}} \quad (5.24)$$

cette expression montre que si  $m_\nu = 0$ , en portant en ordonnée la quantité

$$\sqrt{\frac{N(p_e)}{p_e^2 F(Z, p_e)}}$$

en fonction de  $(E_f - E_e)$ , on doit obtenir une droite : la droite de Kurie. Une déviation en fin de spectre par rapport à une droite donnerait l'indication de  $m_\nu \neq 0$ .

FIGURE 5.4: Diagramme de Kurie pour la désintégration  $\beta$  du  $^{187}\text{Re}$ . (Nuclear Physics B, Volume 866, issue 2, p. 177)

En désignant par  $E$  l'énergie maximale de l'électron ( $E = \sqrt{p_{e\max}^2 c^2 + m_e^2 c^4}$ ) et en prenant  $m_\nu = 0$ , on peut intégrer sur  $p_e$  :

$$\lambda = \frac{G_F^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{e\max}} F(Z, p_e) p_e^2 (E - E_e)^2 dp_e \quad (5.25)$$

Il est commode d'introduire les variables sans dimension  $p' = p_e/(m_e c)$ ,  $E' = E/(m_e c^2)$  et  $E'_e = E_e/(m_e c^2)$ . On définit alors la quantité

$$F(Z, E) = \int_0^{p_{e\max}} F(Z, p_e) p_e'^2 m^2 c^2 (E' - E'_e)^2 m^2 c^4 mc dp' \quad (5.26)$$

$$= m^5 c^7 \int_0^{p_{e\max}} F(Z, p_e) p_e'^2 (E' - E'_e)^2 dp' \quad (5.27)$$

où l'intégrale sans dimension est appelée intégrale de Fermi et notée  $f$ . La probabilité de transition par unité de temps s'écrit alors

$$\lambda = \frac{G_F^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} m^5 c^7 f \quad (5.28)$$

or  $\lambda = \ln(2)/t_{1/2}$  et on note traditionnellement le produit  $ft_{1/2}$  :

$$ft_{1/2} = \ln(2) \frac{2\pi^3 \hbar^7}{G_F^2 m^5 c^4 |M_{fi}|^2} \quad (5.29)$$

Ce produit est constant pour un élément de matrice donné. Plus cet élément de matrice est grand, c'est à dire plus la probabilité de transition est grande, plus le produit  $ft$  est petit.

On remarque que dans le cas d'électrons relativistes  $E_e \approx p_e c$  et

$$\lambda \propto \int_0^{E_f} E_e^2 (E_f - E_e)^2 dE_e = \frac{E^5}{30} \quad (5.30)$$

C'est la loi de Sargent.

la figure 5.5 montre le nombre d'émetteurs  $\beta$  en fonction de  $\log(ft)$ . Ceci permet de comprendre la classification des transitions  $\beta$ .

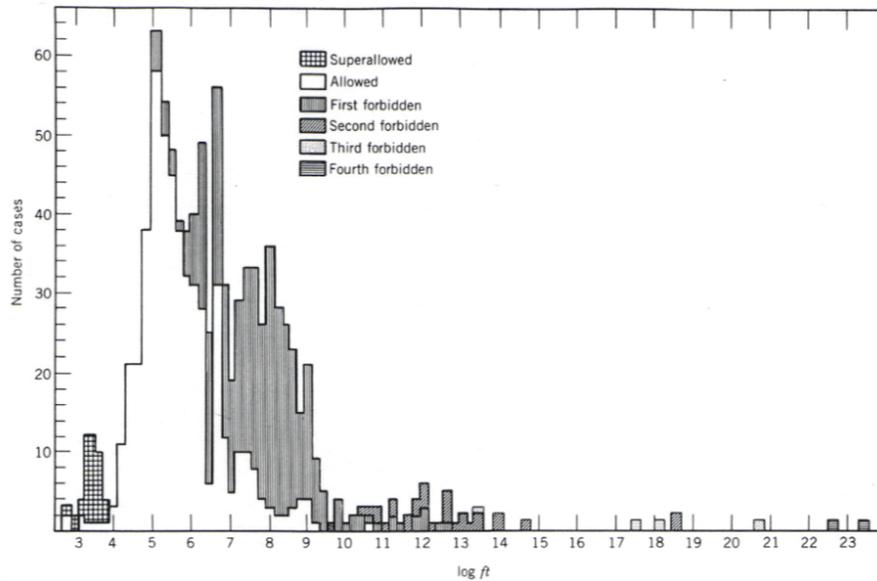


FIGURE 5.5: Distribution des valeurs expérimentales de  $\log(ft)$  dans les désintégrations  $\beta$ . D'après W. Meyerhof, Elements of Nuclear Physics (New York : McGraw-Hill, 1967)

### 2.3 Classification des transitions $\beta$

Nous avons supposé l'élément de matrice connu et constant, mais sa valeur n'est pas triviale à calculer. Elle dépend en particulier de l'orientation des spins respectifs des particules de l'état final, du moment angulaire orbital emporté par ces mêmes particules et de lois de conservation (en particulier la conservation de la parité) que nous étudierons plus en détail dans le cours de physique des particules.

Lorsqu'on mesure la distribution des valeurs de  $\log(ft)$  (figure 5.5), on constate des regroupements par valeurs. On les nomme de la façon suivante :

Type de transition $\beta$	$\log(ft_{1/2})$
super-permises	$\sim 3.5$
permises	3 à 6
interdites du premier ordre	6 à 9
interdites du second ordre	$\sim 12$
interdites du troisième ordre	$\sim 16$

Pour expliquer cette classification, il faut se rappeler que les spins de l'électron et du neutrino peuvent s'aligner de deux manières : ils peuvent être soit antiparallèles, auquel cas le spin total est  $S = 0$ , soit parallèles, donnant un état triplet de spin total  $S = 1$ .

Les transitions  $S = 0$  s'appellent **transitions de Fermi**, celles de  $S = 1$  sont des **transitions de Gamow-Teller**. Nous allons maintenant appliquer les lois de conservation des moment angulaire et parité pour une transition  $\beta$  donnée. On appelle  $J_i$  le moment angulaire initial et  $J_f$  le moment angulaire final du noyau. On a donc  $J_i = J_f + L$  pour les transitions de Fermi (où  $S = 0$ ) et  $J_i = J_f + L + 1$  pour les transitions de Gamow-Teller où  $S = 1$ . Le changement de parité dans la transition ne dépend que du moment angulaire emporté et est égal à  $\Delta\pi = \pi_i\pi_f = (-1)^L$ . Lorsque  $\Delta\pi = 1$ , il n'y a pas de changement de parité, alors qu'il y en a un lorsque  $\Delta\pi = -1$ .

Ces préliminaires étant posés, voyons les caractéristiques des différents types de transitions :

### Transitions permises

Les transitions permises sont les transitions pour lesquelles  $L = 0$ .

Soit  $S = 0$  (Fermi) et  $\Delta J = |J_i - J_f| = 0$ ,  $\Delta\pi = \pi_i\pi_f = 1$

Soit  $S = 1$  (Gamow-Teller) et  $\Delta J = |J_i - J_f| = 0$  ou  $\pm 1$ ,  $\Delta\pi = \pi_i\pi_f = 1$ . Dans ce dernier cas, une transition où l'on aurait  $J_i = J_f = 0$  est interdite car aucun moment angulaire ne pourrait être emporté.

### Transitions interdites

Dans ce cas,  $L \neq 0$ . Lorsque nous avons développé l'exponentielle  $e^{-i(\vec{k}_e + \vec{k}_\nu) \cdot \vec{r}}$  dans l'expression de l'élément de matrice  $V_{fi}$ , nous n'avons au départ gardé que le premier terme. Celui-ci étant une constante, il ne permet pas de décrire l'emport de moment angulaire. Nous sommes alors dans le cas d'une transition permise. Lorsque ce premier terme est très petit, il faut tenir compte des termes suivants qui seront de la forme  $(\vec{k} \cdot \vec{r})^n$  où  $n$  est l'ordre de développement. On peut montrer que ces termes conduisent à des harmoniques sphériques  $Y_L^M$  où  $L$  est le moment angulaire et donc représentent des transitions interdites d'ordre  $L$ .

**Transitions interdites du premier ordre,  $L = +1$**  Soit  $S = 0$  (Fermi) et  $\Delta J = 0, \pm 1$ ,  $\Delta\pi = -1$ , sauf, comme plus haut, dans le cas où  $J_i = J_f = 0$ . Ces transitions correspondent au premier ordre de développement de l'exponentielle  $e^{-i(\vec{k}_e + \vec{k}_\nu) \cdot \vec{r}}$ .

Soit  $S = 1$  (Gamow-Teller) et  $\Delta J = 0, \pm 1, \pm 2$ ,  $\Delta\pi = -1$

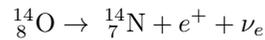
**Transitions interdites du second ordre,  $L = +2$  ...**

### Transitions super-permises

Ce sont des transitions où les états initial et final sont des noyaux miroirs, comme  $t \rightarrow {}^3\text{He}$  ou  ${}^{17}\text{F} \rightarrow {}^{17}\text{O}$ . Les fonctions d'onde sont alors très proches et leur recouvrement (calcul de l'élément de matrice) donne une grande probabilité de transition.

## 2.4 Détermination de la constante de Fermi $G_F$

Pour déterminer numériquement la constante de Fermi, considérons une transition particulière :



qui est une transition de Fermi pure  $0^+ \rightarrow 0^+$  et où l'on mesure  $ft = 3100$  s. L'oxygène est formé d'un coeur de  ${}^{12}_6\text{C}$  et 2 protons dans l'état  $1p_{1/2}$ . Chacun des protons peut se désintégrer en neutron et  $|M_{fi}| = 2$ . On a donc :

$$G_F = \left( \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln(2)}{m_e^5 c^4 \times 2 \times ft} \right)^{1/2} = \left( \frac{2\pi^3 (\hbar c)^7 \ln(2)}{(m_e c^2)^5 \times 2 \times ft c} \right)^{1/2}$$

Ce qui donne, en prenant  $c$  en  $\text{fm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\hbar c$  en  $\text{MeV} \cdot \text{fm}$  et  $m_e c^2$  en  $\text{MeV}$  :

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1,15 \text{ GeV}^{-2} \quad (5.31)$$

## 2.5 Double désintégration $\beta$



## Modèles nucléaires

Etudier un noyau  ${}^A_Z X$  revient à étudier un système quantique de  $A$  nucléons en interaction. Cette étude passe par la résolution de l'équation de Schrödinger :

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

où  $\psi$  est la fonction d'onde du noyau qui dépend des coordonnées d'espace, de spin et d'isospin (voir le cours de physique des particules pour la définition de l'isospin) des  $A$  nucléons et du temps.

Le hamiltonien  $\hat{H}$  s'écrit

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

où  $T_i$  est le terme d'énergie cinétique des nucléons et  $V_{ij}$  l'énergie potentielle d'interaction, prenant en compte l'énergie d'interaction coulombienne et l'énergie d'interaction forte.

Si l'on s'intéresse aux états stationnaires, dont on écrira la fonction d'onde  $\psi = \phi(\vec{r}_i, \vec{\sigma}_i, \vec{t}_i) \times \exp(-i\omega t)$ , l'équation de Schrödinger devient :

$$\hat{H}\phi = \left( \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i \neq j} V_{ij} \right) \phi = E\phi$$

où  $E = \hbar\omega$  représente l'énergie des états stationnaires dans lesquels peut se trouver le noyau.

Un tel problème ne peut être complètement résolu analytiquement à cause de la connaissance imparfaite de l'interaction nucléaire, c'est à dire de  $V_{ij}$  et de l'impossibilité de prendre en compte les termes de rediffusion des nucléons deux à deux en interaction dans le noyau (on ne sait traiter ce problème que pour 3 corps ; au delà, les calculs analytiques sont impraticables).

Dans ce genre de situation, on a recours à des **modèles**, qui sont des approximations d'une théorie exacte, s'appuyant sur des simplifications. Les hypothèses simplificatrices sont suggérées par les données expérimentales. On examinera ici deux types de modèles :

- **les modèles à particules indépendantes** rendant compte des propriétés individuelles des nucléons. On considère que les nucléons se déplacent dans un potentiel "moyen", indépendamment des autres nucléons.
- **les modèles collectifs** rendant compte de propriétés dites "collectives" du noyau, par exemple le déplacement d'un ensemble de nucléons, qui peut englober la totalité du noyau.

## 1 Modèles à particules indépendantes

Dans le modèle en couches, qui est le plus représentatif de cette catégorie de modèles, on substitue au problème initial à  $A$  corps, un problème à 1 corps. Plus exactement, le modèle en couches est celui de  $A$  particules se déplaçant dans un potentiel moyen, sans interaction entre elles (du moins au premier ordre). On peut faire une analogie avec le cas du potentiel coulombien auquel sont soumis les électrons atomiques. Cette hypothèse du potentiel moyen revient à simplifier considérablement le problème puisqu'on remplace le hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

par un hamiltonien approché

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^A \hat{h}_i = \sum_{i=1}^A (T_i + V_i)$$

où  $V_i$  est le potentiel moyen.

On sait que si l'on connaît les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$\hat{h}_i \varphi_i = \epsilon_i \varphi_i$$

avec  $\varphi_i$  la fonction d'onde de l'état occupé par le nucléon numéro  $i$  dans le potentiel moyen et  $\epsilon_i$  l'énergie de cet état, les valeurs propres de  $\hat{H}_0$  (énergie totale approchée) sont de la forme  $E = \sum_{i=1}^A \epsilon_i$ .

Les particules étant indépendantes, la fonction d'onde  $\Phi$  du noyau s'obtient par factorisation des fonctions d'onde individuelles  $\varphi_i$  :

$$\Phi = \varphi_{n_1}(1) \varphi_{n_2}(2) \dots \varphi_{n_A}(A)$$

expression dans laquelle le nombre entre parenthèse repère le nucléon et l'indice repère l'état. Cependant, d'après le principe d'exclusion de Pauli (puisque les nucléons sont des fermions) la fonction d'onde doit être antisymétrique dans l'échange des coordonnées  $(\vec{r}, \vec{\sigma}, \vec{\tau})$  de deux nucléons ( $\sigma$  et  $\tau$  représentent respectivement les états de spin et d'isospin). On doit donc antisymétriser la fonction d'onde sous la forme suivante :

$$\Phi_a = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_p (-1)^p \mathcal{P}(\varphi_{n_1}(1) \varphi_{n_2}(2) \dots \varphi_{n_A}(A))$$

où  $\mathcal{P}(\varphi_{n_1}(1) \varphi_{n_2}(2) \dots \varphi_{n_A}(A))$  est le résultat d'une permutation des  $A$  nucléons dans les  $A$  états qu'ils occupent et  $(-1)^p$  est égal à  $+1$  si la permutation est paire et  $-1$  si la permutation est impaire. Le facteur  $1/\sqrt{A!}$  est un facteur de normalisation choisi de façon que  $\Phi_a$  soit normalisé lorsque les  $\varphi_{n_i}(i)$  le sont.

Pour  $A = 2$  cela donne :

$$\Phi_a(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{n_1}(1) \varphi_{n_2}(2) - \varphi_{n_1}(2) \varphi_{n_2}(1))$$

Une représentation commode fut proposée par John Clarke Slater en 1929 pour représenter un atome à plusieurs électrons, que nous pouvons reprendre ici. La fonction d'onde s'écrit à l'aide du **déterminant de Slater** :

$$\Phi_a = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi_{n_1}(1) & \varphi_{n_2}(1) & \dots & \varphi_{n_A}(1) \\ \varphi_{n_1}(2) & \varphi_{n_2}(2) & \dots & \varphi_{n_A}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n_1}(A) & \varphi_{n_2}(A) & \dots & \varphi_{n_A}(A) \end{vmatrix} \quad (6.1)$$

Les modèles à particules indépendantes fournissent une représentation approximative des noyaux. La qualité de celle-ci dépend fortement du choix du potentiel moyen  $U_i$ . Si  $U_i$  est une bonne représentation des interactions nucléon-nucléon dans le noyau, on peut espérer que la différence entre les hamiltoniens  $\hat{H}$  et  $\hat{H}_0$

$$\hat{H} - \hat{H}_0 = \sum_{i \neq j} V_{ij} - \sum_i U_i$$

soit petite, c'est à dire susceptible d'être traitée par la théorie des perturbations. Cette différence s'appelle **l'interaction résiduelle**.

## 1.1 Modèle de Fermi

C'est le plus simple des modèles à particules indépendantes ; on suppose que le potentiel moyen  $U$  confine les nucléons à l'intérieur d'une sphère de rayon  $R = r_0 A^{1/3}$ . C'est un puits de potentiel sphérique infini de rayon  $R$ . Ceci revient à considérer que les nucléons sont enfermés dans une boîte sphérique de volume  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$ .

Les énergies cinétiques sont alors quantifiées et l'énergie cinétique totale est de la forme

$$T = \sum_{j=1}^A \frac{p_j^2}{2m}$$

où  $m$  est la masse du nucléon (avec  $m = m_n = m_p$  et  $p_j$  est la quantité de mouvement, quantifiée).

Les considérations statistiques simples qui en découlent fournissent les ordres de grandeur des valeurs de certaines caractéristiques du noyau. Si le volume de la boîte (ici le noyau) est grand, et on supposera  $A$  grand, l'espacement des niveaux individuels est assez petit pour remplacer la somme par une intégrale en comptant le nombre d'états quantiques.

### Moment et énergie de Fermi

La somme porte sur tous les états de quantité de mouvement  $\vec{p}$  occupés suivant le principe d'exclusion de Pauli. Dans la boîte de volume  $\mathcal{V}$ , qui est le volume du noyau, le nombre d'états de quantité de mouvement comprise entre  $\vec{p}$  et  $\vec{p} + d\vec{p}$  est :

$$dn = \frac{4\mathcal{V}d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

le facteur 4 venant de la prise en compte des deux états de spin et des deux états d'isospin (pour la notion d'isospin, voir le cours de physique des particules). En notant  $d\Omega$  l'élément d'angle solide et  $p = |\vec{p}|$  la norme de  $\vec{p}$ , on peut réécrire cette quantité :

$$dn = \frac{4\mathcal{V}p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}$$

L'état de plus basse énergie du noyau est obtenu en occupant tous les états quantiques de quantité de mouvement inférieure à une valeur maximum  $p_F$  appelée "moment de Fermi". L'énergie individuelle d'un nucléon qui y correspond est  $E_F = p_F^2/(2m)$  et est appelée énergie de Fermi.

Le remplissage des états jusqu'à la quantité de mouvement maximum  $p_F$  implique une relation entre cette quantité et  $A$  le nombre de nucléons, puisqu'on doit avoir

$$A = \int_0^{p_F} dn = \frac{4\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3} \iint_{(4\pi)} d\Omega \int_0^{p_F} p^2 dp \quad (6.2)$$

$$= \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \left( \frac{4\pi}{3} R^3 \right) (4\pi) \frac{p_F^3}{3} \quad (6.3)$$

$$= \frac{8}{\pi\hbar^3} \frac{r_0^3 A}{9} p_F^3 \quad (6.4)$$

$$(6.5)$$

Ce qui donne en inversant

$$p_F = \frac{\hbar}{2r_0} \sqrt[3]{9\pi} \quad (6.6)$$

qui ne dépend plus directement de  $A$  dans ce modèle simple. En exprimant  $r_0$  en fm, on a

$$p_F = \frac{300 \text{ MeV}/c}{r_0 \text{ (fm)}} \quad (6.7)$$

Si l'on choisit pour  $r_0$  la valeur donnée par les expériences de diffusion d'électrons ( $r_0 \approx 1,2$  fm), on obtient  $p_F \approx 270$  MeV/c). On a aussi l'énergie de Fermi :

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{(9\pi)^{2/3} \hbar^2}{8mr_0} \quad (6.8)$$

avec  $r_0 \approx 1,2$  fm, on obtient  $E_F \approx 37$  MeV.

### Energie cinétique et profondeur du puits de potentiel

L'énergie cinétique totale est

$$T = \int_0^{p_F} \frac{p_F^2}{2m} dn \quad (6.9)$$

et donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{4\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2m} \iint_{(4\pi)} d\Omega \int_0^{p_F} p^4 dp \\ &= \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \left( \frac{4\pi}{3} r_0^3 A \right) \left( \frac{4\pi}{3} p_F^3 \right) \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} \\ T &= \frac{3}{5} A \frac{p_F^2}{2m} \end{aligned}$$

où l'on a repris l'expression 6.4 pour simplifier cette dernière égalité. Donc :

$$T = \frac{3}{5} A E_F \quad (6.10)$$

L'énergie cinétique moyenne par nucléon est

$$\langle T \rangle = \frac{T}{A} = \frac{3}{5} E_F \approx 22 \text{ MeV} \quad (6.11)$$

On peut estimer la profondeur du puits de potentiel sachant que l'énergie du nucléon le moins lié est situé 37 MeV au dessus du fond du puits et que, pour l'arracher, il faut fournir une énergie égale à l'énergie de séparation,  $S \approx 8 \text{ MeV}$ . d'où

$$V_0 = S + E_F \approx 37 + 8 \text{ MeV} = 45 \text{ MeV} \quad (6.12)$$

Exercice à faire en TD : Calculer la contribution de l'énergie cinétique au terme d'asymétrie dans la formule de Bethe-Weiszäcker.

## 1.2 Modèle en couches

Bien que ce soit moins frappant que pour les atomes, un certain nombre de faits expérimentaux suggèrent que les noyaux ayant un certain nombre de nucléons possèdent une stabilité plus grande. Nous allons étudier ici le modèle développé en 1948-49 par Mayer, Haxel, Jansen et Suess (Maria Goeppert-Mayer et J.H.D. Janssen ont eu le prix Nobel en 1963 avec E. Wigner).

On a vu que l'on pouvait écrire un hamiltonien approché  $\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^A \hat{h}_i = \sum_{i=1}^A (T_i + V_i)$  où  $V_i$  désigne un "potentiel moyen". Une forme souvent utilisée est celle de Saxon-Woods (fig 6.1) :

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (6.13)$$

dépendant de trois paramètres :  $V_0$ , la profondeur,  $R$  le rayon et  $a$  la diffusivité.

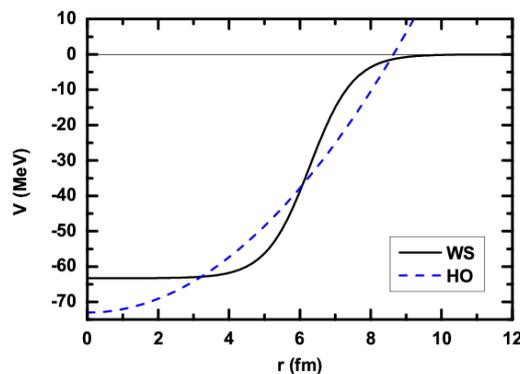


FIGURE 6.1

Ce potentiel trouve sa justification dans le fait que la même variation en  $r$  fournit une excellente approximation de la répartition radiale de la matière nucléaire (cf le chapitre sur la diffusion des électrons).

Le potentiel de Saxon-Woods, malgré sa simplicité, ne se prête pas à la recherche de solutions analytiques de l'équation de Schrödinger. L'approximation qui est la plus commode et la plus réaliste pour l'étude de l'état fondamental et des niveaux excités les plus bas est le potentiel de l'oscillateur harmonique (encore lui...) isotrope à trois dimensions. La figure 6.1 montre les deux potentiels superposés. On montre que, pour les états excités les plus bas, les fonctions d'onde radiales sont très proches.

### Oscillateur harmonique isotrope à 3 dimensions

**Forme du potentiel et quantum d'énergie** Soit  $\hat{H}_0 = \hat{T} + \hat{V}(r)$  avec le potentiel harmonique

$$\hat{V}(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$$

Si l'on admet que ce potentiel s'annule à la surface du noyau, soit en  $r = R = r_0 A^{1/3}$ , on obtient une relation entre la profondeur  $V_0$  et le quantum d'énergie  $\hbar\omega_0$  de l'oscillateur harmonique. En effet :

$$\hat{V}(r) = -V_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

d'où

$$\frac{1}{2}m\omega_0^2 = \frac{V_0}{R^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{2V_0}{mr_0^2 A^{2/3}}$$

et

$$\hbar\omega_0 = \sqrt{\frac{2V_0}{m}} \frac{\hbar}{r_0} A^{-1/3} \quad (6.14)$$

en prenant une valeur réaliste (d'après le modèle de Fermi)  $V_0 = 50$  MeV, on obtient

$$\hbar\omega_0 \approx 50 A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (6.15)$$

**Valeurs propres et fonctions propres de  $\hat{H}_0$**  La résolution de l'équation de Schrödinger dans ce cas est un problème classique en mécanique quantique. Pour la fonction d'espace  $\varphi(\vec{r})$  on a :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 \right) \varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \quad (6.16)$$

la fonction d'onde individuelle étant  $\phi(\vec{r}, s, t) = \varphi(\vec{r})\chi_\sigma(s)\theta_\tau(t)$ , où  $\chi_\sigma(s)$  et  $\theta_\tau(t)$  sont les fonctions d'onde de spin et d'isospin.

Comme le potentiel moyen  $V(r)$  est indépendant du spin et de l'isospin, l'énergie  $E$  ne dépendra que des nombres quantiques attachés à  $\varphi(\vec{r})$ . On a les relations de commutation :

$$\left[ \hat{H}_0, \hat{l}^2 \right] = \left[ \hat{H}_0, \hat{l}_z \right] = \left[ \hat{l}^2, \hat{l}_z \right]$$

On recherche les fonctions propres de l'équation  $\hat{H}_0\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$  sous la forme

$$\varphi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_n^l(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

on s'est placé en coordonnées sphériques et l'on rappelle que l'opérateur Laplacien s'y écrit

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{l}^2}{\hbar^2 r^2}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{l}^2 Y_l^m(\theta, \phi) &= \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \\ \hat{l}_z Y_l^m(\theta, \phi) &= m \hbar Y_l^m(\theta, \phi) \end{aligned}$$

La partie radiale de la fonction d'onde est solution de

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_n^l(r) + (V - E) R_n^l(r) = 0$$

d'où, puisque  $R_n^l(r)$  ne dépend que de  $r$  :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (V - E) \right] R_n^l(r) = 0 \quad (6.17)$$

Pour étudier cette équation, posons

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad \alpha^4 = \frac{mK}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{2} K r^2 \quad \text{avec} \quad K = m\omega_0^2$$

et  $R_n^l(r) = r^l F(r)$

On a alors

$$\frac{2mV}{\hbar^2} = \frac{mK r^2}{\hbar^2} = \alpha^4 r^2$$

et on peut exprimer  $R'$  et  $R''$  :

$$\begin{aligned} R' &= r^l F' + l r^{l-1} F \\ R'' &= r^l F'' + 2l r^{l-1} F' + l(l-1) r^{l-2} F \end{aligned}$$

que l'on porte dans l'équation radiale :

$$r^l F'' + 2l r^{l-1} F' + l(l-1) r^{l-2} F + \frac{2}{r} (r^l F' + l r^{l-1} F) - l(l+1) r^{l-2} F + (-\alpha^4 r^2 + k^2) r^l F = 0$$

que l'on peut simplifier en divisant par  $r^l$  :

$$F'' + \frac{2}{r} (l+1) F' + F (2l r^{-2} + l(l-1) r^{-2} - l(l+1) r^{-2}) + (-\alpha^4 r^2 + k^2) F = 0$$

le terme en facteur de  $Fr^{-2}$  a le bon goût de s'annuler et

$$\Rightarrow F'' + \frac{2}{r}(l+1)F' + (-\alpha^4 r^2 + k^2)F = 0$$

Faisons encore un changement de variable en notant  $\rho = \alpha^2 r^2$  et donc

$$F'_r = F'_\rho \times 2\alpha^2 r$$

et

$$\begin{aligned} F''_r &= \frac{d}{dr}(F'_r) = \frac{d}{dr}(F'_\rho 2\alpha^2 r) = 2\alpha^2 (F'_\rho + rF''_\rho 2\alpha^2 r) \\ &= 2\alpha^2 (F'_\rho + 2\alpha^2 r^2 F''_\rho) \end{aligned}$$

l'équation radiale se réécrit :

$$2\alpha^2 (F'_\rho + 2\alpha^2 r^2 F''_\rho) + \frac{2}{r}(l+1)2\alpha^2 r F'_\rho + (k^2 - \alpha^4 r^2) F_\rho = 0$$

ce qui donne, en regroupant et divisant par  $4\alpha^2$  :

$$\alpha^2 r^2 F''_\rho + \left(\frac{1}{2} + l + 1\right) F'_\rho + \left(\frac{k^2}{4\alpha^2} - \frac{\alpha^2 r^2}{4}\right) F_\rho = 0$$

en posant  $\lambda = k^2/(4\alpha^2)$  :

$$\rho F''_\rho + \left(l + \frac{3}{2}\right) F'_\rho + \left(\lambda - \frac{\rho}{4}\right) F_\rho = 0 \quad (6.18)$$

Cette équation dépend explicitement de  $\rho$  et nous ne chercherons pas à la résoudre analytiquement. On peut tout de même dire avoir une idée de la forme des solutions lorsque  $\rho \rightarrow \infty$ . L'équation s'écrit alors

$$\rho F''_\rho - \frac{F}{4} = 0$$

et les solutions asymptotiques sont de la forme  $F_\rho \propto e^{-\rho/2}$ . Posons

$$F_\rho = e^{-\rho/2} L(\rho)$$

où  $L(\rho)$  est une fonction quelconque de  $\rho$ . Les dérivées de  $F_\rho$  sont :

$$\begin{aligned} F'_\rho &= \left(-\frac{L}{2} + L'\right) e^{-\rho/2} \\ F''_\rho &= \left(-\frac{L}{4} - L' + L''\right) e^{-\rho/2} \end{aligned}$$

et l'équation s'écrit :

$$\rho \left( -\frac{L}{4} - L' + L'' \right) + \left( -\frac{L}{2} + L' \right) \left( l + \frac{3}{2} \right) + \left( \lambda - \frac{\rho}{4} \right) L = 0$$

en regroupant les termes :

$$\rho L'' + L' \left( l + \frac{3}{2} - \rho \right) + \left( \lambda - \frac{1}{2} \left( l + \frac{3}{2} \right) \right) L = 0$$

encore sans chercher à résoudre complètement, développons en série, c'est à dire posons

$$L = \sum_n a_n \rho^n$$

les dérivées

$$\begin{aligned} L' &= \sum_n n a_n \rho^{n-1} \\ L'' &= \sum_n n(n-1) a_n \rho^{n-2} \end{aligned}$$

peuvent être portées dans l'équation. Si on ne note que les termes d'ordre  $n$ , c'est à dire ceux correspondant à  $\rho^n$ , on peut écrire

$$n(n+1)a_{n+1}\rho^n - na_n\rho^n + (n+1)a_{n+1} \left( l + \frac{3}{2} \right) \rho^n + \left( \lambda - \frac{1}{2} \left( l + \frac{3}{2} \right) \right) a_n \rho^n = 0$$

ce qui se simplifie en regroupant les termes en  $a_{n+1}$  et  $a_n$  :

$$a_{n+1} \left( n(n+1) + (n+1) \left( l + \frac{3}{2} \right) \right) - a_n \left( n + \frac{1}{2} \left( l + \frac{3}{2} \right) - \lambda \right) = 0$$

Ceci nous donne une relation entre les coefficients :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n - \lambda + \frac{1}{2} \left( l + \frac{3}{2} \right)}{(n+1) \left( n + l + \frac{3}{2} \right)} \quad (6.19)$$

on remarque tout de suite que lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1/n$ , donc  $a_{n+1}/a_0 \rightarrow 1/(n!)$  et

$$L_n(\rho) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum \frac{\rho^n}{n!} = e^\rho$$

qui diverge, ce qui est impossible pour une fonction d'onde. La série doit donc être tronquée, c'est à dire qu'à partir d'un certain rang, les coefficients sont nuls :  $a_n \neq 0$  et  $a_{n+1} = 0$ . Et comme on a un lien (equation 6.19) entre  $a_{n+1}$  et  $a_{n+2}$ , tous les coefficients seront nuls à partir de là.

D'où :  $2\lambda = 2n + l + \frac{3}{2}$ . Or

$$2\lambda = \frac{k^2}{2\alpha^2} = \frac{2mE}{\hbar^2} \times \frac{\hbar}{2\sqrt{mK}} = \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{E}{\hbar\omega_0}$$

Donc

$$E = \hbar\omega_0 \left( 2n + l + \frac{3}{2} \right)$$

avec  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Mais traditionnellement, on préfère définir  $n$  à partir de 1 :

$$E = \hbar\omega_0 \left( 2(n-1) + l + \frac{3}{2} \right)$$

où  $n = 1, 2, 3, \dots$  est le nombre quantique radial, c'est aussi le nombre de noeuds de la fonction d'onde radiale qui compte  $(n-1)$  zéros.

En coordonnées cartésiennes, on aurait obtenu

$$\hat{H}_0\varphi = \hbar\omega_0 \left( N + \frac{3}{2} \right) \varphi = \hbar\omega_0 \left( n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \varphi$$

avec  $\varphi = \varphi_x(x)\varphi_y(y)\varphi_z(z)$ , chaque fonction d'onde étant associée à  $n_i + \frac{1}{2}$ . Finalement

$$E = \hbar\omega_0 \left( N + \frac{3}{2} \right) = \hbar\omega_0 \left( 2(n-1) + l + \frac{3}{2} \right) \quad (6.20)$$

$N = 0, 1, 2, \dots$  est le nombre quantique principal,  $l = 0, 1, 2, \dots$  le nombre quantique orbital. Les fonctions  $L(\rho)$  dépendent de  $n$  et de  $l$ , sont appelés polynômes de Laguerre généralisés et sont tabulés. Quelques exemples de fonctions d'onde normalisées :

Etat $n, l$	$N, n, l$	$f(x)$
1s	0,1,0	$\sqrt{\frac{4}{\sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2}$
1p	1,1,1	$\sqrt{\frac{8}{3\sqrt{\pi}}} x e^{-x^2/2}$
2s	2,2,0	$\sqrt{\frac{6}{\sqrt{\pi}}} \left( 1 - \frac{2}{3}x^2 \right) e^{-x^2/2}$
1d	2,1,2	$\sqrt{\frac{16}{15\sqrt{\pi}}} x^2 e^{-x^2/2}$

**Degré de dégénérescence des états** En raison de l'invariance par rotation du potentiel, l'énergie de chacun des états propres de  $\hat{H}_0$  ne dépend pas du nombre quantique magnétique  $m$  et chaque niveau d'énergie est donc  $(2l+1)$  fois dégénéré. Par ailleurs, chaque valeur de  $N = 2(n-1) + l$  correspond à la même énergie, bien que les états puissent être différents puisqu'ils ont des nombres quantiques  $n$  et  $l$  différents. Enfin, il y a un facteur 2 de dégénérescence dû au spin.

Au total, le degré de dégénérescence pour un type de nucléon, sans prendre en compte le spin, est  $g = \sum_{l=0}^N (2l + 1)$  où l'on compte tous les  $l$  pour lesquels il existe un  $n$  tel que  $N = 2(n - 1) + l$ . Réalisons ce comptage.

On remarque que  $l$  a la même parité que  $N$ . Si  $N$  est pair,  $l$  est pair, si  $N$  est impair,  $l$  l'est aussi. On a donc deux cas à traiter :

1. **N pair.** On note  $l = 2k$  et on ne compte que les  $l$  pairs :

$$\begin{aligned} g &= \sum_{l=0, l \text{ pair}}^N (2l + 1) = \sum_{k=0}^{N/2} 4k + 1 \\ &= 4 \frac{1}{2} \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} + 1 \right) + \left( \frac{N}{2} + 1 \right) \\ &= \left( \frac{N}{2} + 1 \right) (N + 1) = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2} \end{aligned}$$

2. **N impair.** On note  $l = 2k + 1$  et on ne compte que les  $l$  impairs :

$$\begin{aligned} g &= \sum_{l=1, l \text{ impair}}^N (2l + 1) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} 2(2k + 1) + 1 + \sum_{k=0}^{(N-1)/2} 4k + 3 \\ &= 4 \frac{1}{2} \frac{N-1}{2} \left( \frac{N-1}{2} + 1 \right) + 3 \left( \frac{N-1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{N+1}{2} (N-1) + 3 \frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{2} (N-1 + 3) \\ &= \frac{(N+1)(N+2)}{2} \end{aligned}$$

Le degré de dégénérescence est donc dans les deux cas  $g = (N + 1)(N + 2)/2$ . On peut donc en déduire la séquence des premiers niveaux et le nombre de nucléons que l'on peut mettre sur chaque (figure 6.2) : on voit qu'on retrouve les 3 premiers nombres magiques.

$N=4$	<u>3s   2d   1g</u>	30	70
$N=3$	<u>2p   1f</u>	20	40
$N=2$	<u>2s   1d</u>	12	20
$N=1$	<u>1p</u>	6	8
$N=0$	<u>1s</u>	2	2
	$(N + 1)(N + 2)$		$N_i$

FIGURE 6.2: Les nombres indiqués sont 1) le degré de dégénérescence, ou nombre de nucléons d'un type donné possible sur le niveau correspondant, en tenant compte du spin et 2)  $N_i$  le nombre total maximum de nucléons d'un type donné sur le niveau correspondant et l'ensemble de ceux situés en dessous.

### Effet de bord

La dégénérescence en  $l$  est une dégénérescence accidentelle due au potentiel d'oscillateur harmonique, qui n'existe pas si l'on considère un potentiel de Saxon-Woods. Dans ce cas, la dégénérescence est levée et cette levée est due à l'aplatissement du fond du puits de potentiel moyen qui fournit d'avantage d'énergie aux nucléons situés vers l'extérieur, possédant donc des  $l$  plus élevés : d'où le nom d'effet de bord.

on peut simuler cet effet en introduisant un terme de la forme  $-Dl^2$  avec  $D > 0$ . Ce terme commute avec  $\hat{H}_0$  et garde les mêmes nombres quantiques. Au premier ordre des perturbations, il modifie l'énergie de chaque état, en gardant la même fonction d'onde :

$$\Delta E_b = \langle \phi | -Dl^2 | \phi \rangle = -D\hbar^2 l(l+1)$$

Ce terme lève la dégénérescence en  $l$ , en abaissant d'autant plus l'énergie d'un état que  $l$  est plus élevé. Mais on ne retrouve toujours que les trois premiers nombres magiques.

### Terme spin-orbite

C'est en introduisant un potentiel moyen dépendant du spin qu'on peut reproduire les nombres magiques. On verra que ce terme est beaucoup plus important en physique nucléaire qu'en physique atomique. Il a été introduit phénoménologiquement mais vient de la dépendance en spin des forces nucléaires. On le prend égal à

$$\hat{V}_{so} = -a\vec{l} \cdot \vec{s} \quad (6.21)$$

Le moment cinétique d'un nucléon est  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  et l'on remarque que  $[\hat{H}_0, \hat{j}^2] = [\hat{H}_0, \hat{j}_z] = 0$ , donc  $j$  et  $m_j$  sont de bons nombres quantiques. On peut caractériser un état par la fonction d'onde

$$\Psi_{n,l,s,j,m_j}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{j}^2 \Psi_{n,l,s,j,m_j} &= j(j+1)\hbar^2 \Psi_{n,l,s,j,m_j} \\ \hat{j}_z \Psi_{n,l,s,j,m_j} &= m_j \hbar \Psi_{n,l,s,j,m_j} \end{aligned}$$

Cette fonction d'onde se construit à partir des fonctions propres de  $\hat{H}_0$  suivant les règles de la mécanique quantique :

$$\Psi_{n,l,s,j,m_j} = \sum_{m_l, m_s} \langle l \frac{1}{2} m_l m_s | j m_j \rangle \phi_{nlm_l} \chi_{s=\frac{1}{2}, m_s}$$

où les  $\langle l \frac{1}{2} m_l m_s | j m_j \rangle$  sont les coefficients de Clebsch-Gordan,  $\phi$  est la fonction d'onde propre de  $\hat{H}_0$ , c'est à dire la fonction d'onde spatiale, et  $\chi$  celle de spin.

Déterminons maintenant l'effet du terme spin-orbite sur les niveaux d'énergie. On peut écrire

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} (\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2)$$

ce qui donne, lorsqu'on applique  $V_{so} = -a\vec{l} \cdot \vec{s}$  sur  $\Psi$ , la valeur propre  $-\frac{a}{2} (j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}) \hbar^2$ .

Pour  $l$  donné, il y a deux valeurs de  $j$  :  $j = l + 1/2$  et  $j = l - 1/2$ . Les valeurs propres de  $V_{so}$  sont :

$$\begin{aligned} - \text{pour } j = l + \frac{1}{2} : & -\frac{a}{2} \left( \left( l + \frac{1}{2} \right) \left( l + \frac{3}{2} \right) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) = -\frac{a}{2} l \\ - \text{pour } j = l - \frac{1}{2} : & -\frac{a}{2} \left( \left( l - \frac{1}{2} \right) \left( l + \frac{1}{2} \right) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) = -\frac{a}{2} (l+1) \end{aligned}$$

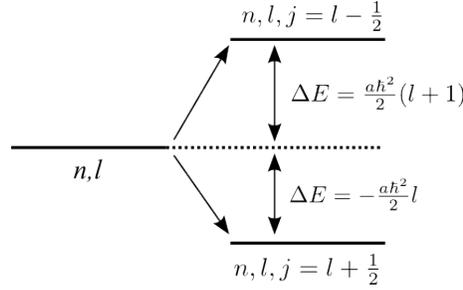


FIGURE 6.3

La figure 6.3 illustre l'effet du terme spin-orbite. L'écart entre les deux membres du doublet est :

$$\Delta E_{l,j} = (2l+1) \frac{a\hbar^2}{2}$$

le niveau de  $j$  le plus élevé se trouve abaissé, et ce d'autant plus que  $l$  est grand. La figure 6.4 montre la séquence d'états qui en résulte. La suite de nombres magiques est reproduite. La couche de  $N$  donné est, à partir de  $N = 3$  et grâce à l'effet du terme spin-orbite, complétée par la sous-couche de plus haut moment angulaire qui aurait, sans cet effet, appartenu à la couche suivante.

En résumé :

Le hamiltonien

$$\hat{h} = T - V_0 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 - Dl^2 - a\vec{l} \cdot \vec{s} \quad (6.22)$$

a les valeurs propres (énergies) suivantes :

$$\epsilon_{n,l,j=l-\frac{1}{2}} = (2(n-1)+l)\hbar\omega_0 - Dl(l+1)\hbar^2 + \frac{a}{2}(l+1)\hbar^2 \quad (6.23)$$

$$\epsilon_{n,l,j=l+\frac{1}{2}} = (2(n-1)+l)\hbar\omega_0 - Dl(l+1)\hbar^2 - \frac{a}{2}l\hbar^2 \quad (6.24)$$

$$(6.25)$$

### 1.3 Applications du modèle en couches

L'état fondamental d'un noyau s'obtient en remplissant les états individuels en tenant compte du principe d'exclusion séparément pour les neutrons et les protons.

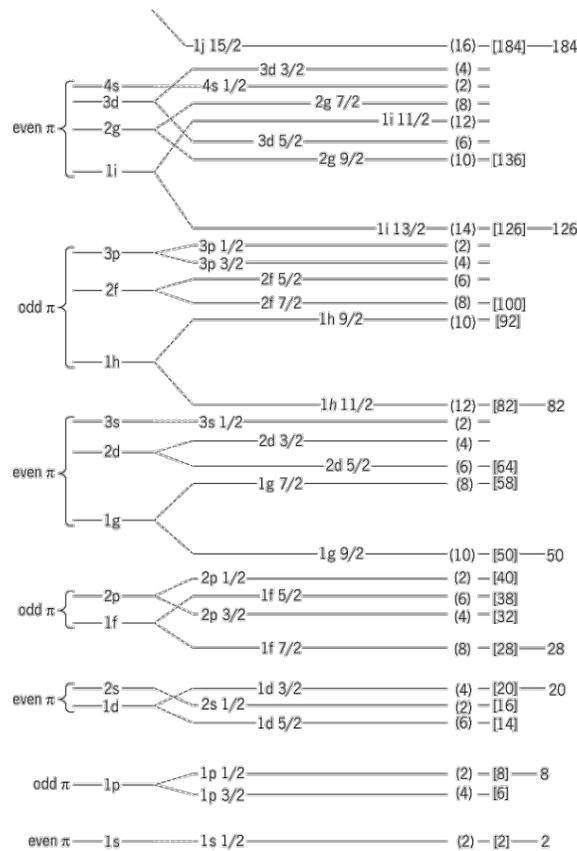


FIGURE 6.4: Représentation des niveaux du modèle en couches. les groupes de niveaux marqués "odd" et "even" correspondent schématiquement aux niveaux de l'oscillateur harmonique. La dégénérescence de ceux-ci est d'abord levée par le terme d'effet de bord  $-Dl^2$ , ce qui est illustré par les niveaux "nl", par exemple "2p". L'influence du terme de couplage spin-orbite est illustrée par les niveaux notés "nlj", par exemple "2p<sub>3/2</sub>". Les nombres entre parenthèse indiquent le nombre maximum de nucléons d'une espèce qu'on peut placer dans la sous-couche concernée ; les nombres entre crochets sont les nombres totaux de nucléons d'une espèce remplissant toutes les sous-couches, y compris la sous-couche concernée. Enfin, les nombres magiques sont indiqués dans la dernière colonne à droite.

### Règle d'appariement

Une orbitale de moment angulaire  $j$  possède  $(2j + 1)$  états dégénérés de nombre quantique  $m_j$ , ( $-j \leq m_j \leq j$ ). Si l'orbitale est pleine, le moment angulaire résultant a pour projection, sur tout axe de quantification

$$\sum_{m_j=-j}^{m_j=+j} m_j = 0$$

Ceci est vrai lorsque plusieurs orbitales sont pleines. En particulier, les noyaux doublement magiques, comme  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  ont une couche fermée en protons et en neutrons. Leur moment angulaire et leur parité, dans l'état fondamental, sont  $I^\pi = 0^+$ .

Lorsque le nombre de nucléons n'est pas suffisant pour remplir une sous-couche, l'état fondamental obtenu est dégénéré ; une règle empirique, suggérée par les résultats expérimentaux, a été énoncée :

Les nucléons d'une même espèce occupant une sous-couche donnée, se couplent par paire de moment cinétique total nul, c'est à dire que les deux nombres quantiques  $m_j$  prennent une valeur opposée.

Ceci a plusieurs conséquences pour les noyaux dans leur état fondamental :

- Si une orbitale contient un nombre pair de nucléons, tous ces nucléons sont appariés et leur moment angulaire résultant est nul.
- Un noyau pair-pair dans son état fondamental ne contient que des nucléons appariés : son moment angulaire et sa parité sont alors  $I^\pi = 0^+$ .
- Un noyau pair-impair possède un nucléon célibataire. Les autres sont appariés et ont un moment angulaire total nul. C'est le nucléon célibataire qui gouverne le moment angulaire total  $I$  et la parité de la fonction d'onde du noyau. Si ce nucléon occupe un état de moment angulaire total  $j$  et de moment orbital  $l$ , on a :

$$I = j \quad \text{et} \quad P = (-1)^l \quad (6.26)$$

**Rappel :** La parité des harmoniques sphériques est  $(-1)^l$ . En effet,  $P$  transforme  $\vec{r}$  en  $-\vec{r}$ , donc, les coordonnées sphériques se transforment comme :

$$\begin{aligned} r &\rightarrow r \\ \theta &\rightarrow \pi - \theta \\ \varphi &\rightarrow \varphi + \pi \end{aligned}$$

$$\text{or } Y_l^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi)$$

**Exemple.** Considérons les 3 isotopes  $^{16}_8\text{O}$ ,  $^{17}_8\text{O}$  et  $^{17}_9\text{F}$ .

$^{16}_8\text{O}$  est doublement magique. Les couches  $N = 0$  et  $N = 1$  sont pleines,  $I^\pi = 0^+$ .

$^{17}_8\text{O}$  et  $^{17}_9\text{F}$  ont respectivement un neutron en plus et un proton en plus situé dans la première orbitale libre  $N = 2$ . Cette orbitale est l'orbitale  $1d_{5/2}$ , l'état fondamental a donc pour ces noyaux  $I = 5/2$  et leur parité est  $P = (-1)^2 = 1$  ( $l = 2$  pour une couche "d").

**Exercice :** représenter graphiquement le remplissage des premières sous-couches pour ces trois noyaux.

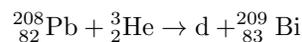
### Réactions de transfert de nucléons

On s'intéresse à des processus inélastiques dans lesquels un ou plusieurs nucléons sont transférés d'un noyau à un autre. Exemples :

$^{208}_{82}\text{Pb}({}^3_2\text{He}, d){}^{209}_{83}\text{Bi}$ . Dans cette réaction, l' ${}^3_2\text{He}$  cède un proton au Pb : c'est une réaction de "**stripping**".

$^{208}_{82}\text{Pb}({}^3_2\text{He}, {}^4_2\text{He}){}^{207}_{82}\text{Pb}$ . Dans cette réaction, l' ${}^3_2\text{He}$  arrache un neutron au Pb : c'est une réaction de "**pick-up**".

Considérons la première réaction :



avec les variables cinématiques angulaires suivantes :

et  $E_0$ , l'énergie de  ${}^3_2\text{He}$  fixée, l'énergie du Bi et son angle  $\phi$  sont libres. Il y a donc trois équations : 1 de conservation de l'énergie et 2 de conservation du moment (en projection sur deux axes orthogonaux) et il y a trois inconnues :  $p_d$ ,  $p_{\text{Bi}}$  et  $\phi$ .

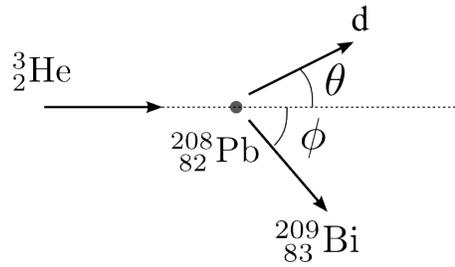


FIGURE 6.5

Si le Bi est produit dans l'état fondamental, l'énergie du deuteron s'écrit

$$E_d = E_0 + [\mathcal{M}(^{208}_{82}\text{Pb}) + \mathcal{M}(^3_2\text{He}) - \mathcal{M}(d) - \mathcal{M}(^{209}_{83}\text{Bi})] c^2 - E_R$$

où  $E_R$  est l'énergie de recul du Bi.

$$\Rightarrow E_d + E_R = E_0 + (\Delta M)c^2$$

Si le Bi est produit dans un état excité d'énergie  $E_f$  :

$$\begin{aligned} E'_d &= E_0 + (\Delta M)c^2 - E_R - E_f \\ \Rightarrow E'_d &= E_d - E_f - (E'_R - E_R) \end{aligned}$$

avec  $E'_d < E_d$  puisqu'une partie de l'énergie est utilisée pour exciter le noyau.

L'expérience est faite avec des émulsions à  $E_0$  et  $\theta$  fixés. Le parcours des  $d$  dans les émulsions est directement relié à leur énergie. La figure 6.6 fait apparaître les différents niveaux excités du Bi depuis le fondamental (état  $h_{9/2}$ ) à droite jusqu'au  $g_{9/2}$  appartenant à la couche  $N = 6$ . On constate un accord avec le modèle en couches.

## Moments magnétiques

### Moment quadripolaire électrique

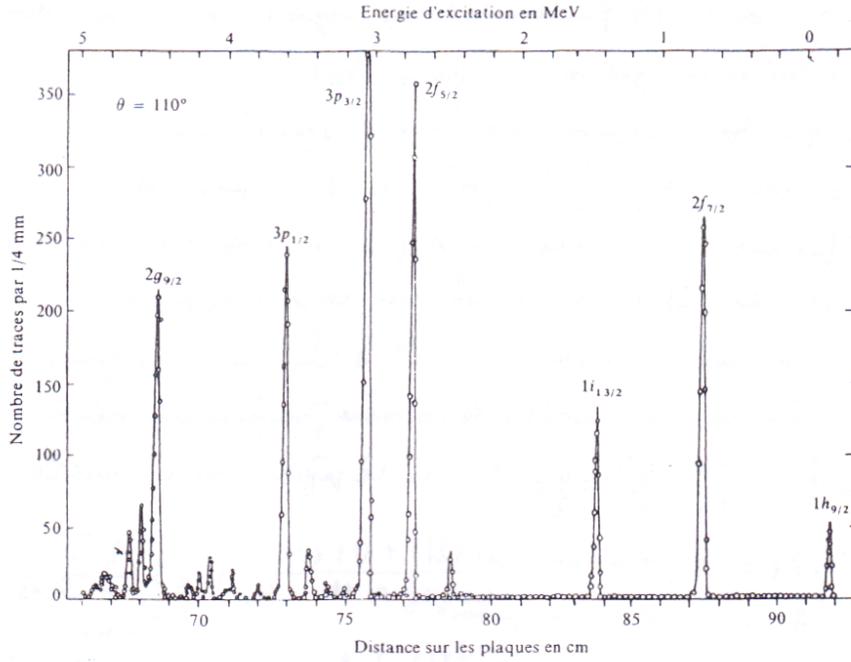
La mesure du moment quadripolaire électrique a permis de mettre en évidence la déformation des noyaux par rapport à la forme sphérique.

Commençons par le calcul classique. Soit un système d'axes  $Oxyz$  ; on considère un noyau avec une distribution de charge  $\rho(x, y, z)$ , l'origine des coordonnées étant au centre du noyau. L'élément de volume  $d\mathcal{V}$  a une charge  $dq = \rho d\mathcal{V}$ .

Soit  $V(x, y, z)$  le potentiel électrique. L'énergie d'interaction entre la distribution de charge et le potentiel est :

$$W = \iiint V(x, y, z) dq \quad (6.27)$$

développons  $V$  au voisinage de l'origine :



La réaction  $^{208}\text{Pb}(^3\text{He}, d)^{209}\text{Bi}$  peuple de façon privilégiée les états individuels à un proton de  $^{209}\text{Bi}$ . A l'angle choisi, l'état fondamental  $h_{9/2}$  est moins peuplé que les états excités, mais à d'autres angles la situation est inversée. L'énergie des  $^3\text{He}$  incidents est ici de 20,3 MeV.

FIGURE 6.6

$$V(x, y, z) = V(0) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 z + \dots$$

L'énergie d'interaction s'écrit :

$$\begin{aligned} W = & V(0) \iiint dq + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 \iiint x \cdot dq + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 \iiint y \cdot dq + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 \iiint z \cdot dq \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 \iiint x^2 \cdot dq + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 \iiint y^2 \cdot dq + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 \iiint z^2 \cdot dq \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_0 \iiint xy \cdot dq + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\right)_0 \iiint xz \cdot dq + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right)_0 \iiint yz \cdot dq \right] + \dots \end{aligned}$$

Le premier terme représente l'énergie d'une charge  $q = \iiint dq$  dans le potentiel  $V_0$ . Les dérivées premières donnent l'énergie du dipôle dans le champ électrique dérivant du potentiel  $V$  (moment dipolaire  $\iiint \vec{r} dq$ ). Les deux lignes contenant des dérivées secondes de  $W$  traduisent l'interaction due au moment quadripolaire du noyau.

Pour simplifier le problème, considérons le cas d'un ellipsoïde de révolution d'axe  $Oz$ . Par raison de symétrie, les intégrales où interviennent  $xy$ ,  $xz$  et  $yz$  s'annulent. L'intégrale en  $x^2$  est égale à celle en  $y^2$  et on a donc

$$W_Q = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0 \right] \iiint \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dq + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_0 \iiint z^2 \cdot dq$$

d'après l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_0 = 0$$

donc

$$W_Q = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_0 \iiint [2z^2 - (x^2 + y^2)] dq$$

et avec  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  :

$$W_Q = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_0 \iiint [3z^2 - r^2] dq$$

On définit

$$Q_z = \frac{1}{e} \iiint [3z^2 - r^2] \rho dV \quad (6.28)$$

et

$$W_Q = \frac{e}{4} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) Q_z \quad (6.29)$$

pour une sphère, on a  $Q_z = 0$ . Pour un ellipsoïde de révolution de demi-grand axe  $c$  (selon  $Oz$ ) et demi-petit axe  $a$  (selon  $Ox$  et  $Oy$ ) :  $Q_z = \frac{2}{5} Z(c^2 - a^2)$  ou encore

$$Q_z = \frac{4}{5} R^2 Z \eta$$

où  $R^2$  est le rayon carré moyen :  $R^2 = (a^2 + c^2)/2$  et  $\eta$  est le paramètre de déformation :  $\eta = (c^2 - a^2)/(a^2 + c^2)$ .

On peut avoir deux types de déformations : un noyau allongé ( $c > a$ ), le noyau sera dit "prolate" (une forme de "ballon de rugby"), ou un noyau aplati ( $c < a$ ), le noyau sera dit "oblate" (une forme de galette).

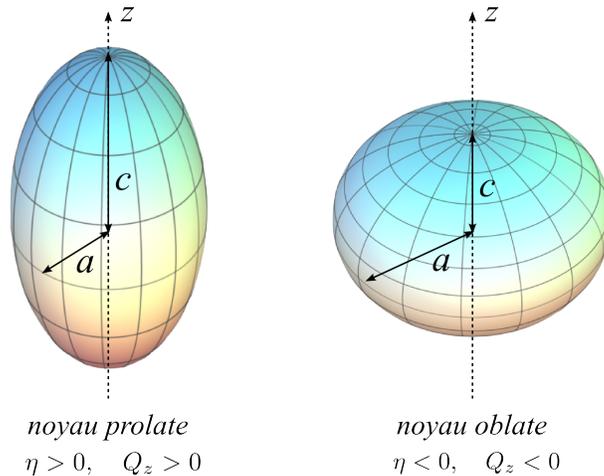


FIGURE 6.7

Si l'on suppose que l'axe  $Oz$  coïncide avec l'axe du moment cinétique total  $I$ , le moment quadripolaire spectroscopique est défini par rapport au référentiel utilisé pour effectuer la mesure. Il est lié en particulier au champ extérieur avec lequel interagit le noyau. En supposant l'axe  $Oz$  parallèle à  $\vec{I}$ , on montre alors en réalisant le calcul quantique :

$$\begin{aligned} Q &= Q_z \left( \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \right) \\ &= Q_z \left( \frac{3m_I^2 - I(I+1)}{2I(I+1)} \right) \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est l'angle entre l'axe  $Oz$  et l'axe  $Oz'$  du labo (ou du champ extérieur). En réalité,  $Oz$  n'est pas parallèle à  $I$ , la relation est différente :

$$Q = Q_z \left( \frac{3m_I^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} \right)$$

pour la plupart des noyaux dans l'état fondamental,  $m_I = I$  donc

$$Q = Q_z \left( \frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+3)} \right)$$

où l'on voit que le moment  $Q$  est nul si  $I = 0$  ou  $I = 1/2$ . Dans la plupart des cas,  $Q \neq 0$ , ce qui indique qu'à part les noyaux dont le nombre de nucléons est magique, les noyaux ne sont pas sphériques.

*Ajouter graphe moment quadripolaire électrique des noyaux*

## 2 Modèles collectifs

### 2.1 Généralités

Une excitation collective met en jeu une fraction appréciable des nucléons qui constituent le noyau, éventuellement tous peuvent être concernés. Ces nucléons ont alors un mouvement ordonné de manière cohérente.

### 2.2 Modèle vibrationnel

En s'inspirant de l'image de la goutte liquide, on considère des déformations de la matière nucléaire qui ne sont pas permanentes et qui correspondent à des oscillations de la surface du noyau, au voisinage de la forme sphérique.

Pour exploiter cette image, on décrit les déformations de la surface, au voisinage de la sphère, à l'aide de paramètres de déformation  $\alpha_{\lambda\mu}$ , définis en admettant que le rayon du noyau n'est plus constant mais dépend de la direction :  $R = R(\theta, \varphi)$  = distance entre le centre et la surface. Le modèle s'inspire des techniques de l'hydrodynamique. En développant  $R(\theta, \varphi)$  sur la base des harmoniques sphériques, on pose

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \varphi) \right) \quad (6.30)$$

où  $R_0$  est le rayon du noyau lorsqu'il est à l'équilibre sphérique. Pour une valeur de  $\lambda$  donnée,  $\mu$  prend  $(2\lambda + 1)$  valeurs (rappel : ceci vient des propriétés des  $Y_l^m$ ) et on a  $(2\lambda + 1)$  coefficients  $\alpha_{\lambda\mu}$

Pour visualiser de tels mouvements, supposons  $\mu = 0$  et que le coefficient  $\alpha_\lambda$  est une fonction sinusoïdale du temps, de la forme  $a \cos(\omega t)$ . Détaillons les mouvements correspondant aux premières valeurs de  $\lambda$  :

$$\lambda = 0$$

$$R = R_0 (1 + a_0 \cos(\omega t)) \quad (6.31)$$

C'est un mouvement monopolaire, le noyau conserve la forme sphérique mais son rayon varie sinusoïdalement au cours du temps. Il s'agit d'un mode "respiratoire" du noyau, directement lié à la compressibilité de la matière nucléaire. Cette dernière étant peu compressible, de tels modes mettent en jeu une grande énergie d'excitation ( $> 10$  MeV).

$$\lambda = 1$$

Pour visualiser ce mouvement, considérons le cas où seul  $\alpha_{10} \neq 0$  et varie sinusoïdalement. Dans ce cas

$$R = R_0 (1 + (a_0 \cos \omega t) \cos \theta) \quad (6.32)$$

(car  $Y_1^0 \propto \cos \theta$ ). Les points associés à  $\theta = \pm\pi/2$  sont immobiles. Le noyau oscille autour de sa position d'équilibre et les positions extrêmes; ceci équivaut à un mouvement oscillant du centre de masse le long du segment  $O_1O_2$ .

L'énergie interne du noyau est fortement changée dans le cas d'une oscillation en opposition de phase des centres de masse des protons d'une part et des neutrons d'autre part. Ce processus conduit à la production d'une résonance dipolaire géante. Son énergie est  $\geq 10$  MeV. Lorsqu'un photon  $\gamma$  interagit avec le noyau, nous pouvons le considérer comme un champ oscillant qui exerce une force sur les protons chargés mais pas sur les neutrons et tends à séparer les deux espèces. Si cette force est supprimée, les protons et les neutrons reprennent leur place en un temps qui est relié à la fréquence des oscillations des protons contre les neutrons. Quand la fréquence des photons incidents coïncide avec cette fréquence naturelle, il se produit une résonance : c'est la résonance dipolaire géante.

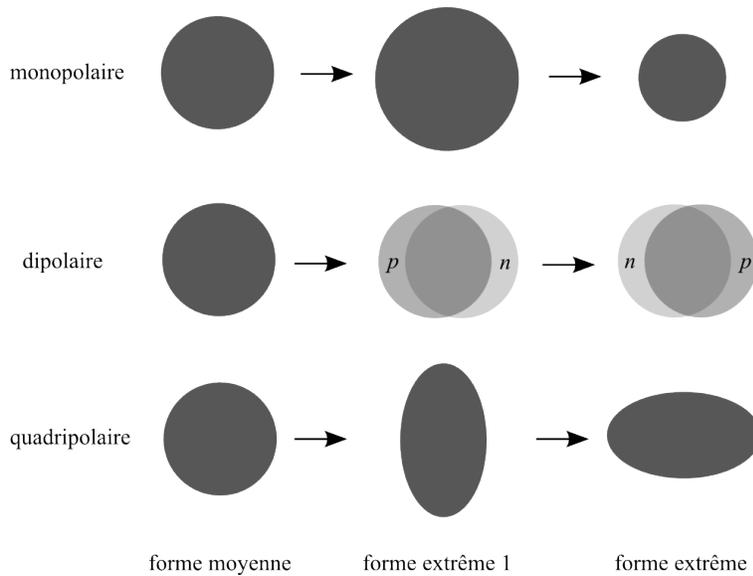


FIGURE 6.8: Modèle vibrationnel. Modes principaux des vibrations du noyau : monopolaire, dipolaire (les protons et les neutrons se déplacent dans deux directions opposées) et quadripolaire. Les protons et les neutrons se déplacent ensemble dans les cas monopolaire et dipolaire.

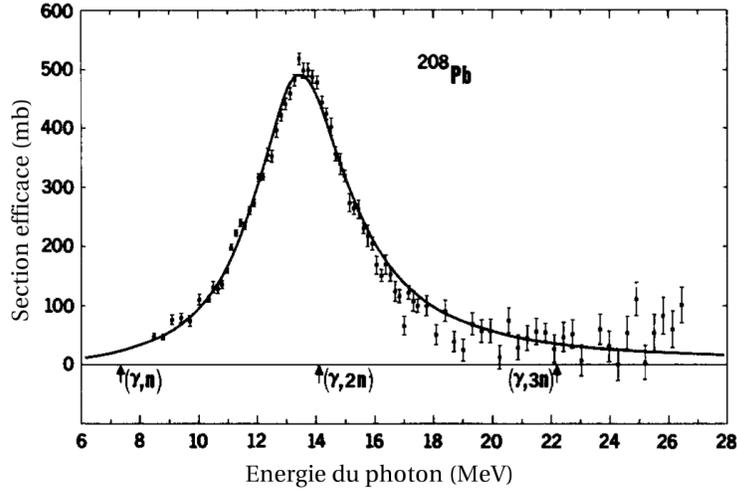


FIGURE 6.9: Résonance dipolaire géante de  $^{208}\text{Pb}$  observée dans la mesure de la section efficace de réaction de photons. D'après Berman, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 15 319 (1975)

$$\lambda = 2$$

Pour visualiser ce mode, prenons à nouveau seulement  $\alpha_{20} \neq 0$  avec  $\alpha_{20} = a_0 \cos \omega t$  :

$$R = R_0 (1 + (a_0 \cos \omega t)(3 \cos^2 \theta - 1)) \quad (6.33)$$

car  $Y_L^0 \propto (3 \cos^2 \theta - 1)$ . La surface oscille autour de la position d'équilibre.

### 2.3 Modèle rotationnel

De la même façon qu'en physique moléculaire, on peut avoir des niveaux d'énergie "rotationnels", ou des bandes rotationnelles, dûs à la rotation de la molécule autour d'un axe autour duquel elle a un moment d'inertie  $\mathcal{I}$ , en physique nucléaire, on peut avoir des bandes rotationnelles pour des noyaux ellipsoïdaux ou déformés.

Soit un solide tournant autour d'un axe quelconque,  $Ox'$ ,  $Oy'$  et  $Oz'$ , les axes principaux d'inertie de ce solide (rappel : axes autour desquels le tenseur d'inertie est diagonal). Soient  $Oxyz$  les axes dans le système du laboratoire.

Si l'on note  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$  et  $I_{z'}$  les moments d'inertie du solide autour de ses axes principaux, le hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{J_{x'}^2}{2I_{x'}} + \frac{J_{y'}^2}{2I_{y'}} + \frac{J_{z'}^2}{2I_{z'}} \quad (6.34)$$

Si il y a symétrie de révolution autour de  $Oz'$ , ce que nous supposons,  $I_{x'} = I_{y'} = I_{\perp}$  et  $I_{z'} = I_{//}$ ,

$$H = \frac{J^2 - J_{z'}^2}{2I_{\perp}} + \frac{J_{z'}^2}{2I_{//}} \quad (6.35)$$

en mécanique quantique, les valeurs propres du hamiltonien seront :

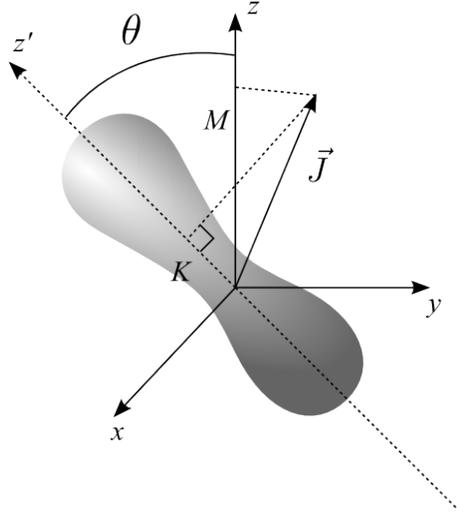


FIGURE 6.10

- pour  $J^2 \rightarrow J(J+1)\hbar^2$
- pour  $J_z^2 \rightarrow K^2\hbar^2$

L'état quantique  $|JMK\rangle$  est défini par trois nombres quantiques  $(J, M, K)$  tels que :

$$\hat{H}|JMK\rangle = E|JMK\rangle \quad (6.36)$$

$$J^2|JMK\rangle = J(J+1)\hbar^2|JMK\rangle \quad (6.37)$$

$$J_z|JMK\rangle = M\hbar|JMK\rangle \quad (6.38)$$

$$J_{z'}|JMK\rangle = K\hbar|JMK\rangle \quad (6.39)$$

$$(6.40)$$

et l'énergie de cet état est :

$$E = \left[ \frac{J(J+1) - K^2}{2I_{\perp}} + \frac{K^2}{2I_{//}} \right] \hbar^2 \quad (6.41)$$

Cette expression va se simplifier à cause des symétries du noyau. Soit  $|JK\rangle$  l'état du noyau dans le repère des axes principaux d'inertie  $Ox'y'z'$ . Dans la mesure où l'on considère le noyau comme un solide indéformable, on peut considérer la fonction d'onde comme constante. Dans le repère du laboratoire ( $Oxyz$ ), la fonction d'onde s'écrit

$$|JMK\rangle = D_{MK}^J(\theta_i)|JK\rangle \quad (6.42)$$

où les  $D_{MK}^J(\theta_i)$  sont les éléments de matrice qui permettent de passer de  $Ox'y'z'$  à  $Oxyz$ , les  $\theta_i$  étant les angles d'Euler.

Si l'on suppose une symétrie de révolution autour de  $Oz'$ , une rotation d'un angle  $\phi$  autour de cet axe change l'angle d'Euler  $\theta_3$  en  $\theta_3 + \phi$ ; compte tenu de la forme de  $D_{MK}^J$  :

$$D_{MK}^J(\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \phi) = e^{iK\phi} D_{MK}^J(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (6.43)$$

L'invariance par rotation autour de  $O'_z$  entraîne  $e^{iK\phi} = 1$  quelque soit  $\phi$ . Donc  $K = 0$ .

Le moment cinétique du solide en rotation est donc perpendiculaire à son axe de symétrie et

$$E = \frac{J(J+1)}{2I_{\perp}} \hbar^2$$

Pour les noyaux pair-pair, on a vu que  $J = 0$  dans l'état fondamental mais  $J$  entier pour les états excités ( $A$  est pair, donc il y a un nombre pair de nucléons de spin  $1/2$ ). La fonction d'onde doit être indépendante du sens de l'axe  $Oz'$  choisi; ceci revient à changer  $\theta$  en  $\pi - \theta$  et  $\varphi$  en  $\varphi + \pi$ . Or les harmoniques sphériques changent dans cette transformation de la manière suivante :

$$Y_J^M(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^J Y_J^M(\theta, \varphi)$$

l'invariance par rotation de  $180^\circ$  entraîne donc  $J$  pair. Finalement

$$E = \frac{J(J+1)}{2I_{\perp}} \hbar^2 \quad \text{avec } J \text{ pair}$$

La différence d'énergie entre deux niveaux successifs est

$$\Delta E = E(J) - E(J-2) = \frac{\hbar^2}{2I_{\perp}} (J(J+1) - (J-2)(J-1)) = \frac{\hbar^2}{2I_{\perp}} (4J-2)$$

Les photons émis auront donc une énergie  $E_{\gamma} = \Delta E$ , ce que l'on peut observer par exemple sur la figure 6.11 représentant le spectre du  $^{196}\text{Pb}$ .

*H. Hübel / Progress in Particle and Nuclear Physics 54 (2005) 1-69*

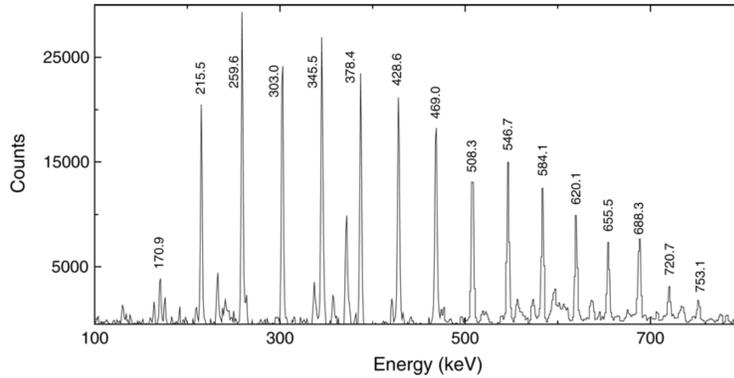


FIGURE 6.11

On observe également des oscillations de périodes correspondant à  $\Delta J = 4$  (déformations octupolaires).

Enfin, pour des noyaux n'ayant pas de symétrie droite-gauche le long de l'axe  $Oz$ , on n'a plus l'invariance selon le sens de l'axe  $Oz'$  et on observe des transitions  $\Delta J = 1$ , par exemple pour des noyaux en forme de "poire".